یادداشت پژوهشی

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۲، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۳۹۱

توصيف نيمه كلاسيك مگنت‌هاي غير هايزنبرگي همسانگرد براي اسپين $S=۳/۲$ و ديناميك برانگيختگي‌هاي چهارقطبي خطي

يوسف يوسفي[۱] و حكمت مومن اف[۲]

۱. دانشگاه پيام نور مركز تايباد، خراسان رضوي

۲. انستيتوي فيزيك-تكنيكي بنام اس او عمراف، آكادمي علوم جمهوري تاجيكستان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۰/۹/۱۲ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۱/۳/۳)

چكيده

در اين مقاله، سيستم با اسپين $S=۳/۲$ كه در آن تبادل با نزديك ترين همسايه مد نظر است، در تقريب ميدان ميانگين بررسي شده است. با استفاده از حالت‌هاي همدوس در گروه $SU(۴)$، معادلاتي كه مدل غيرهايزنبرگي همسانگرد را توصيف مي‌كنند را به‌دست آورده و سپس براي برانگيختگي‌هاي خطي كوچك، معادلات پاشندگي امواج اسپيني را براي شاخه‌هاي دوقطبي و چهارقطبي در حالت پايه (خلاء) به‌دست مي‌آوريم.

واژه‌هاي كليدي: حالت‌هاي همدوس، مگنت، مدل غيرهايزنبرگي

۱. مقدمه

تا به حال، مگنت‌ها در فرومغناطیس‌های هایزنبرگی، که دینامیک ماکروسکپی آنها با استفاده از معادله لاندو- لیف شیتز برای بردار مغناطش با اندازه ثابت توصیف شده، به طور مفصل بررسی شده است [۱-۵]. در این بررسی‌ها فقط برانگیختگی‌های دو قطبی در نظر گرفته شده و از برانگیختگی‌های بالاتر صرفنظر شده است. از دیدگاه میکروسکپی، این تصور متناظر با هامیلتونی‌های هایزنبرگی تبادلی، با برهم‌کنش اسپین خطی به صورت $J(\hat{S}_i.\hat{S}_j)$ است که J ثابت تبادل و i و j نزدیکترین همسایه‌ها در جایگاه[۱] مورد نظر هستند. با پیشرفت علم ریاضی و صنعت و سهمی که برانگیختگی‌های بزرگتر می‌تواند در سیستم‌های نانو و یا توصیف دقیق‌تر آن داشته باشد برای اسپین بزرگتر از ۱/۲، $(S>۱/۲)$ مخصوصاً برای تبادل‌های تک یونی[۲]، باید برانگیختگی‌های چندقطبی را در نظر گرفت، در نتیجه برهم‌کنش همسانگرد به عبارت خطی ذکر شده خلاصه نمی‌شود و باید جملات بیشتری را به صورت $J\left(\hat{S}_۱.\hat{S}_۲\right)^n$ در نظر گرفت که n تا $۲S$ افزایش می‌یابد [۶].

با توجه به این که هر حالت اسپینی را می‌توان به صورت ترکیب خطی از حالت‌های مؤلفه z اسپین، $|\psi\rangle=\sum_{i=۱}^{۲S+۱} m_i|\psi_i\rangle$ نوشت (m_i ضرایب بسط است) در نتیجه

۱. Site

۲. Single-Ion

تعداد $2S+1$ پارامتر مختلط برای توصیف هر حالت اسپینی لازم است و این معادل با $4S+2$ درجه آزادی است که یک درجه به خاطر شرط بهنجارش $\langle\psi_i|\psi_i\rangle=1$ و یک درجه به خاطر دلخواه بودن فاز کاهش می‌یابد. پس $4S$ درجه آزادی و در نتیجه $4S$ پارامتر برای توصیف آن لازم می‌باشد که در این مقاله برای توصیف کامل سیستم با اسپین ۳/۲، شش پارامتر لازم است [۷]. برای این اسپین شکل کلی مدل همسانگرد با در نظر گرفتن برهم‌کنش نزدیکترین همسایه، با هامیلتونی زیر توصیف می‌شود

$$\hat{H}=-\sum_i\left(J(\hat{\vec{S}}_i\hat{\vec{S}}_{i+1})+K(\hat{\vec{S}}_i\hat{\vec{S}}_{i+1})^2+L(\hat{\vec{S}}_i\hat{\vec{S}}_{i+1})^3\right), \qquad (1)$$

که در آن $\hat{\vec{S}}_i$ عملگر اسپین در جایگاه مورد نظر، J، K و L ثابت‌های تبادل متناظر با برهم‌کنش‌های خطی، مجذوری و مکعبی است و جمع روی نزدیکترین همسایه‌های تبادلی می‌باشد. این هامیلتونی مربوط به یک زنجیرهٔ اسپینی یک بعدی فرومغناطیسی بوده و علامت ضریب J مثبت و ضریب K انتگرال مبادله برای گشتاور چهارقطبی و ضریب L انتگرال مبادله برای گشتاور هشت قطبی است.

در این مقاله هدف به‌دست آوردن معادلات کلاسیکی برای هامیلتونی بالا و پیدا کردن جواب موج اسپین در برانگیختگی‌های خطی کوچک، بالاتر از حالت خلاء (پایه) است. با توجه به اینکه حالت‌های همدوس اصل عدم قطعیت را کمینه می‌کنند، این حالت‌ها نزدیکترین تصویر به حالت کلاسیکی یعنی شبهه کلاسیکی را به ما می‌دهند. برای این منظور در قسمت دوم حالت‌های همدوس برای اسپین $S=3/2$ که همان حالت‌های همدوس در گروه $SU(4)$ است را می‌نویسیم. برای به‌دست آوردن هامیلتونی کلاسیکی به مقادیر متوسط عملگرهای اسپینی احتیاج است، در قسمت سوم این مقادیر همراه با رابطهٔ کلاسیکی اسپین نوشته شده است. در قسمت چهارم هامیلتونی که در قسمت قبل محاسبه شده است را در معادلات کلاسیکی حرکت، که با استفاده از انتگرال مسیر فاینمن روی حالت‌های همدوس به‌دست آمده، جای‌گذاری می‌کنیم و در نهایت برای برانگیختگی‌های خطی کوچک بالاتر از حالت پایه، معادلات موج اسپینی و معادلات پاشندگی مربوط به شاخه‌های دوقطبی و چهارقطبی را به‌دست می‌آوریم.

۲. حالت‌هاي همدوس براي اسپين $S=\frac{3}{2}$

حالت‌های همدوس یک نوع خاصی از حالت‌های کوانتمی هستند که دینامیک آنها خیلی نزدیک به رفتار سیستم کلاسیکی مربوطه می‌باشد. این که چه نوع حالت همدوسی را در یک مسئله مورد استفاده قرار دهیم به تقارن عملگرهای موجود در هامیلتونی مسئله بستگی دارد. با توجه به تقارن موجود در عملگرهای هامیلتونی (۱) برای توصیف دقیق و در نظر گرفتن تمام برانگیختگی‌های چندقطبی از حالت‌های همدوس در گروه $SU(4)$ استفاده می‌شود که در این گروه حالت خلاء به صورت $(1,0,0,0)^T$ در نظر گرفته و حالت همدوس تک جایگاه[۱] آن به صورت زیر نوشته می‌شود[۸]

$$|\psi\rangle=D^{3/2}(\theta,\phi,\gamma)\exp\left(2ig\hat{Q}^{xy}\right)\exp\left(-i\beta\hat{S}^z\right)\exp\left(-ik\hat{F}^{xyz}\right)|0\rangle. \qquad (2)$$

در رابطه فوق تابع $D^{3/2}(\theta,\phi,\gamma)$، تابع ویگنر برای اسپین $S=3/2$، عملگر $\hat{Q}^{xy}$ مربوط به گشتاور چهارقطبی و عملگر $\hat{F}^{xyz}$ مربوط به گشتاور هشت قطبی می‌باشد. دو زاویهٔ θ و φ که زوایای اویلر هستند، جهت‌گیری بردار اسپین را مشخص می‌کنند و زاویه‌های γ و β چرخش گشتاورهای چندقطبی (چهارقطبی و هشت قطبی) حول بردار اسپین را مشخص می‌کند. پارامترهای g و k تغییر طول مقدار میانگین گشتاورهای چندقطبی (چهارقطبی و هشت قطبی) و اسپین را تعیین می‌کنند. قابل ذکر است که دامنهٔ تغییرات زاویه‌های ϕ,γ,β بین صفر تا 2π و زاویه θ بین $-\pi$ تا π است. با توجه به رابطهٔ (۲) و استفاده از انتگرال مسیر فاینمن برای حالت همدوس می‌توان لاگرانژی را به صورت زیر محاسبه کرد [۸]

$$L=\cos 2k\cos^2 g\left(3\cos^2 g\beta_t+\cos\theta\phi_t+\gamma_t\right)-H(\theta,\phi,g,\gamma). \qquad (3)$$

که در آن $x_t=\partial/\partial t$ شامل همهٔ متغیرهای لاگرانژی یعنی θ، φ، γ و g است و H هامیلتونی کلاسیکی سیستم است. البته

[۱]. Single-site coherent state

هنگام به‌دست آوردن لاگرانژی سیستم اسپینی از طریق انتگرال مسیر، دو جملهٔ دیگر نیز ظاهر می‌شود، جملهٔ جنبشی که ویژگی‌های فاز "بری" دارد از تداخل کوانتمی مسیرهای اینستانتون[۱] به‌دست می‌آید و در پدیده‌هایی کوانتمی مانند تونل‌زنی اسپین سهم بسزایی دارد و جملهٔ مرزی که به مقادیر مرزی مسیر بستگی دارد. این دو جملهٔ در دینامیک کلاسیک برانگیختگی‌های اسپین نقشی ندارند و در این مقاله این دو جمله درنظر گرفته نشده است.

۳. مقدار میانگین عملگرهاي اسپین در گروه $SU(4)$

در اینجا معادل کلاسیکی عملگرهای اسپین موجود در هامیلتونی (۱) در نظر گرفته می‌شود. بردار

$$\vec{S} = \langle \psi | \hat{\vec{S}} | \psi \rangle , \qquad (4)$$

را به عنوان بردار اسپین کلاسیک و

$$Q^{ij} = \frac{1}{2}(\hat{S}_i \hat{S}_j + \hat{S}_j \hat{S}_i - \frac{4}{3}\delta_{ij} I) , \qquad (5)$$

را به عنوان مؤلفه‌های گشتاور چهارقطبی در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه حالت همدوس را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب حالت‌های همدوس تک جایگاهی نوشت، یعنی $|\psi\rangle = \prod_i |\psi_i\rangle$، در نتیجه عملگرهای اسپین در حالت پایهٔ کلاسیکی در هامیلتونی‌های غیر تک یونی در جایگاه‌های مختلف با هم جابه‌جا می‌شوند، پس [۹]

$$\langle \psi | \hat{S}_n^i \hat{S}_{n+1}^j | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{S}_n^i | \psi \rangle \langle \psi | \hat{S}_{n+1}^j | \psi \rangle \qquad (6)$$

که در آن $|\psi\rangle = |\psi\rangle_n |\psi\rangle_{n+1}$ است.

عبارت‌های مقدار میانگین در گروه $SU(4)$ برای حالت همدوس (۲) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} S^+ &= \frac{3}{2} e^{i\phi} \left(1 - 4\cos^2 g\right) \cos 2k \sin\theta, \\ S^- &= \frac{3}{2} e^{-i\phi} \left(1 - 4\cos^2 g\right) \cos 2k \sin\theta, \\ S^z &= \frac{3}{2} \left(1 - 4\cos^2 g\right) \cos 2k \cos\theta. \end{aligned} \qquad (7)$$

همچنین

$$S^2 = \frac{9}{4}(1 - 4\cos^2 g)^2 \cos^2 2k ,$$

$$q^2 = \frac{9}{4}(1 - 4\cos^2 g)^2 \sin^2 2k ,$$

$$S^2 + q^2 = \frac{9}{4}(1 - 4\cos^2 g)^2 . \qquad (8)$$

در رابطهٔ (۸)، S^2 مربوط به گشتاور دوقطبی و q^2 مربوط به گشتاور چهارقطبی می‌باشد. با صرف‌نظر از گشتاور هشت قطبی، ($g = 0$) و در نظر گرفتن فقط گشتاور چهارقطبی داریم:

$$S^2 + q^2 = const . \qquad (9)$$

اگر از عبارات فوق برای هامیلتونی (۱) در حد کلاسیک استفاده نماییم، هامیلتونی کلاسیک در حد پیوسته به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} H = -\int \frac{dx}{a_0} \times (&\frac{9}{4} J A^2 \cos^2 2k + \frac{81}{16} K A^4 \cos^4 2k \\ &+ \frac{729}{64} L A^6 \cos^6 2k - \frac{a_0^2}{2}(J + \frac{9}{2} K A^2 \cos^2 2k \\ &+ \frac{243}{16} L A^4 \cos^4 2k) \times (36 g_x^2 \cos^2 2k \sin^2 2g \\ &+ 9 k_x^2 A^2 \sin^2 2k + \frac{9}{4} A^2 \cos^2 2k (\theta_x^2 + \sin^2\theta \phi_x^2))), \end{aligned} \qquad (10)$$

که در آن a_0 فاصله تعادلی دو جایگاه در زنجیره اسپینی می‌باشد و

$$A = (1 - 4\cos^2 2g) . \qquad (11)$$

۴. معادلات کلاسیکي

برای محاسبهٔ معادلات کلاسیکی، از لاگرانژی (۳) استفاده می‌کنیم. بدین ترتیب که گشتاور هشت قطبی را نزدیک حالت پایه حذف کرده و فقط گشتاور چهارقطبی را در نظر می‌گیریم، برای این منظور در هامیلتونی (۱۰) باید $g = 0$ باشد. معادلات به‌دست آمده در ضمیمه این مقاله می‌باشد.

معادلات ارائه شده در ضمیمه به طور کامل دینامیک غیرخطی را تا برانگیختگی چهارقطبی هامیلتونی مسئله توصیف می‌کند. جواب این معادلات سالیتون‌های مغناطیسی است. با صرفنظر کردن از برانگیختگی‌های چهارقطبی و هشت قطبی $(g = 0, k = 0)$، این معادلات به معادلهٔ لاندائو–لیف شیتز تبدیل می‌شود. بنابراین این معادلات در مقایسه با معادلهٔ لاندائو–لیف شیتز کامل تر بوده و درجات آزادی بیشتری را شامل می‌شود. قابل توجه است که جواب این معادلات شکل‌های مختلف سالیتونی را در بر می‌گیرد.

۱. Instanton

برای بررسی فرومغناطیس‌ها با چنین هامیلتونی‌های همسانگرد، ضروری است تا حالت پایهٔ کلاسیکی را برای این مگنت‌ها محاسبه نماییم. برای این منظور در هامیلتونی (۱۰) فقط جملات بدون مشتق را در نظر می‌گیریم:

$$H_0 = -\int \frac{dx}{a_0}\left(\left(\frac{9}{2}\right)^2 J\cos^2 2k + \left(\frac{9}{2}\right)^4 K\cos^4 2k + \left(\frac{9}{2}\right)^6 L\cos^6 2k\right). \qquad (12)$$

این عبارت در $k=0$ یا $k=\pi/2$ کمینه می‌شود در نتیجه مقدار کمینه هامیلتونی (۱۲) برابر با

$$H_0 = -\frac{1}{a_0}\left\{\left(\frac{9}{2}\right)^2 J + \left(\frac{9}{2}\right)^4 K + \left(\frac{9}{2}\right)^6 L\right\}, \qquad (13)$$

خواهد شد.

حال معادلات حرکت را در نزدیکی حالت پایه بررسی می‌کنیم. برای این منظور متغیر k را به صورت زیر تغییر می‌دهیم

$$2k \to \pi + k \qquad (14)$$

در نقطه $\theta = \pi/2$، برای برانگیختگی‌های خطی کوچک معادلات حرکت به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega_0}\phi_t &= \Lambda\theta_{xx}a_0^2\,, \\
\frac{1}{\omega_0}\theta_t &= -\Lambda\phi_{xx}a_0^2, \\
\frac{1}{\omega_0}\gamma_t &= -4\Lambda, \\
\frac{1}{\omega_0}\beta_t &= \frac{2\Lambda}{3}, \\
\frac{1}{\omega_0}k_t &= 0, \\
\frac{1}{\omega_0}g_t &= 0,
\end{aligned} \qquad (15)$$

که در آن $\omega_0 = \hbar a_0$ و

$$\Lambda = \frac{81}{64}(16J + 648K + 19683L). \qquad (16)$$

همچنین اندیس t در متغیرهای معادلات بالا، $\frac{\partial}{\partial t}$ می‌باشد.

اگر چه انتگرال‌های تبادل K و L کوچک هستند ولی مقادیر عددی ضرب شده در آنها در رابطهٔ (۱۶) نشان می‌دهد که سهم برانگیختگی‌های چهارقطبی و هشت قطبی در مسئله قابل توجه است. این معادلات نشان می‌هد که برای فرومغناطیس‌های همسانگرد، طول مقدار میانگین گشتاور چهارقطبی تغییر نکرده و دینامیک آنها فقط شامل دینامیک چرخشی می‌باشد و چرخش نیز حول بردار اسپین کلاسیک است.

حال پاشندگی امواج اسپینی که نزدیک حالت پایه منتشر می‌شوند را بررسی می‌کنیم. برای انجام این کار دو تابع θ و ϕ را به صورت دو موج تخت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
\phi &= \phi_0 e^{i(\omega t - kx)} + \overline{\phi}_0 e^{-i(\omega t - kx)} \\
\theta &= \theta_0 e^{i(\omega t - kx)} + \overline{\theta}_0 e^{-i(\omega t - kx)}
\end{aligned} \qquad (17)$$

با جایگذاری روابط فوق در معادلات (۱۵) داریم:

$$\begin{aligned}
\omega_1^2 &= (J + 2K + 3L)^2 a_0^2 \omega_0^2 k^4\,, \\
\omega_2 &= \frac{2}{3}\Lambda\omega_0\,, \\
\omega_3 &= -4\Lambda\omega_0\,.
\end{aligned} \qquad (18)$$

این رابطه‌ها نشان می‌دهند که علاوه بر شاخه صوتی پاشنده دو شاخه نوری غیر پاشنده مربوط به برانگیختگی‌های دوقطبی و چهارقطبی وجود دارد.

اگر در هامیلتونی (۱) فقط جمله خطی بر حسب $(\hat{\vec{S}}_i.\hat{\vec{S}}_j)$ در نظر گرفته شود در این صورت فقط یک شاخه صوتی پاشنده وجود خواهد داشت. اگر به جمله فوق جمله مجذوری اضافه گردد، $(\hat{\vec{S}}_i.\hat{\vec{S}}_j)^2$، علاوه بر شاخه صوتی یک شاخه نوری غیر پاشنده نیز مشاهده خواهد شد. در نهایت اگر جمله مکعبی نیز اضافه گردد، $(\hat{\vec{S}}_i.\hat{\vec{S}}_j)^3$، علاوه بر شاخه صوتی پاشنده دو شاخه نوری غیر پاشنده مشاهده می‌شود که این دو شاخه دارای گافی به بزرگی $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ می‌باشند. این چنین گافی بین شاخه‌های نوری در بلورهایی با پایهٔ بسیط دو تایی مانند NaCl مشاهده شده است [۱۰].

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله سیستم کوانتمی با اسپین $S = 3/2$ با استفاده از حالت‌های همدوس اسپین در گروه $SU(4)$، بررسی شد که در حد پیوسته کلاسیکی در هامیلتونی (۱) تبادل‌های خطی، مجذوری و مکعبی وجود داشت. وابستگی معادلات پاشندگی صوتی و نوری به ضرایب K و L و تغییری که در بسامد

زاویه‌ای با در نظر گرفتن این جملات ایجاد می‌شود، از نتایج این تحقیق است که شرح داده شده است. از مقدار عددی ضرب شده در این ضرایب متوجه می‌شویم که این برانگیختگی‌ها سهم مهمی در معادلات موج اسپینی دارند.

دانستن ساختار چنین گروه‌هایی ما را قادر خواهد ساخت تا نتایج جدید و دقیق‌تری، با در نظر گرفتن تمامی برانگیختگی‌های چندقطبی، به‌دست آوریم. بررسی مدل کلاسیکی مناسب اجازه می‌دهد تا جواب‌های سالیتونی مختلف با انرژی‌های معین را به‌دست آورده و همچنین توزیع فضایی گشتاورهای دوقطبی، چهارقطبی و هشت قطبی اسپین را به صورت سالیتون‌های دوقطبی، چهارقطبی، هشت قطبی و دوقطبی- چهارقطبی، دوقطبی- هشت قطبی و چهارقطبی- هشت قطبی به‌دست آورد.

ضمیمه

معادلات حرکت کلاسیکی به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{\omega_0}\phi_t = \frac{81}{512}(\cos 2k(128J + 81(32K + 729L)$$

$$+324(8K + 243L)\cos 4k \times 19683L\cos 8k)$$

$$\times(\theta_{xx}\csc\theta + \phi_x^2\cos\theta)a_0^2$$

$$\frac{1}{\omega_0}\theta_t = -\frac{81}{64}\phi_{xx}\cos 2k(16J + 648K\cos^2 2k$$

$$+19683L\cos^4 2k)\times\sin\theta a_0^2$$

$$\frac{1}{\omega_0}\beta_t = \frac{27}{32}(16J\cos 2k + 648K\cos^3 2k$$

$$+19683L\cos^5 2k)$$

$$+\frac{27}{64}(39366k_{xx}\cos^4 2k\sin 2k$$

$$+8k_{xx}\sin 2k(4J + 81K + 81K\cos 4k)$$

$$+19683L\cos^5 2k(4k_x^2 - 3\theta_x^2 - 3\phi_x^2\sin^2\theta)$$

$$+648\cos^3 2k(4Kk_x^2 - 2K\theta_x^2 - 243Lk_x^2\sin^2 2k$$

$$-2K\phi_x^2\sin^2\theta) - 16\cos 2k(162Kk_x^2\sin^2 2k$$

$$+J(-4k_x^2 + \theta_x^2 + \phi_x^2\sin^2\theta)))a_0^2$$

$$\frac{1}{\omega_0}\gamma_t = -\frac{81}{16}(16J\cos 2k + 648K\cos^3 2k$$

$$+19683L\cos^5 2k) - \frac{81}{64}(19683L\cos^5 2k$$

$$\times(8k_x^2 - 6\theta_x^2 + 1/2(-5 + 7\cos 2\theta + \theta_{xx}\cot\theta)\phi_x^2)$$

$$+64Jk_{xx}\sin 2k + 78732Lk_{xx}\sin 2k\cos^5 2k$$

$$+8\cos 2k(J(16k_x^2 - 4\theta_x^2 - \phi_x^2 + 3\phi_x^2\cos 2\theta$$

$$+2\theta_{xx}\cot\theta) - 648Kk_x^2\sin^2 2k) + 648\cos^3 2k$$

$$\times(8Kk_x^2 - 4K\theta_x^2 + K(1/2\phi_x^2(-3 + 5\cos 2\theta)$$

$$+\theta_{xx}\cot\theta) - 486Lk_x^2\sin^2 2k) + 648Kk_{xx}$$

$$\times(\sin 2k + \sin 6k))a_0^2$$

$$\frac{1}{\omega_0}k_t = 0$$

$$\frac{1}{\omega_0}g_t = 0$$

مراجع

1. V G Baryakhtar, B A Ivanov, and M V Chetkin, *Sov. Phys. Usp*. **28** (1985) 563; V G Baryakhtar, M V Chetkin, B A Ivanov, and S N Gadetskii, "*Dynamics of topological magnetic solitons. Experiment and theory*", Springer-Verlag, Berlin, (1994).
2. A M Kosevich, B A Ivanov, and A S Kovalev, *Phys. Rep*. **194** (1990) 117.
3. H J Mikeska, and M Steiner, *Adv. Phys*. **40** (1991) 191.
4. V G Bar'yakhtar, and B A Ivanov, "*Solitons and Thermodynamics of Low–Dimensional Magnets*", Soviet Scientific Reviews, Section A. Physics, I. M. Khalatnikov (ed.) (1992).
5. B A Ivanov, *Low Temp. Phys*. **31** (2005) 635.
6. B A Ivanov, A Yu Galkin, R S Khymyn, and A Yu Merkulov, *Phys*. *Rev*. B **77** (2008) 064402.
7. V O Ostrovskii, *Sov. Phys. JETP* **64** (**5**) (1986) 999.
8. Kh O Abdulloev, Kh Muminov, "*Coherent states of SU(4) group in real parameterization and Hamiltonian equations of motion",* Reports of Tajikistan Academy of science **36** (1993) 6.
9. Kh O Abdulloev, Kh Kh Muminov, *Phys. Solid State* **36** (1994) 93.
10. C Nayak, "*Solid State Physics"*, University of California (2000).