مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۹، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۳۹۸

حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر روی سطح کره

زهرا هیبتی گوجانی[۱]، علی مهدی‌فر[۲] و احسان عموقربان[۱، ۳، ۴]

۱. گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد

۲. گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه اصفهان، اصفهان

۳. گروه پژوهشی فوتونیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد

۴. مرکز تحقیقات نانوتکنولوژی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد

پست الکترونیکی: a.mahdifar@sci.ui.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۰۸/۲۲ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۷/۱۰/۲۴)

چکیده

در این مقاله، حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح کره را با استفاده از دو رهیافت به دست می‌آوریم. در این دو رهیافت هم ارز، نوسانگر سطح کره را یک بار به صورت نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی تغییر شکل یافتهٔ ناتبهگن و بار دیگر به صورت نوسانگر هماهنگ دوبعدی تبهگن در نظر گرفته و حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر متناظر را می‌سازیم. سپس اثر خمیدگی فضا را بر ویژگی‌های اپتیک کوانتومی حالت‌های همدوس ساخته شده با این دو رهیافت بررسی خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر- نوسانگر هماهنگ دوبعدی- ویژگی‌های اپتیک کوانتومی

۱. مقدمه

حالت‌های همدوس که در سال ۱۹۲۶ توسط شرودینگر معرفی شدند [۱] امروزه در بسیاری از شاخه‌های فیزیک، فناوری‌های کوانتومی و به‌طور خاص در اپتیک کوانتومی کاربرد یافته‌اند [۲- ۵]. از این‌رو، تلاش‌های روزافزونی برای تعمیم حالت‌های همدوس و کاربردهای آنها در سال‌های اخیر انجام گرفته است [۶].

یکی از تعمیم‌های مهم حالت‌های همدوس که توسط گازیو و کلاودر در سال ۱۹۹۹ معرفی شده‌اند، حالت‌هایی هستند که با نماد $|J,\gamma\rangle$ نشان داده شده و به حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر مشهور هستند. با توجه به این‌که ساخت حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر برای هر سامانهٔ کوانتومی دلخواه امکان‌پذیر است، این حالت‌ها تا کنون در مقالات گوناگونی مورد توجه و بررسی قرار گرفته‌اند [۷-۱۴].

از طرف دیگر، در مرجع [۱۵] یک نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح تخت و همچنین روی سطح کره بررسی شده است. با بررسی جبر نوسانگر دوبعدی روی سطح تخت نشان داده شده است که می‌توان این نوسانگر را توسط یک

جبر نوسانگر یک‌بعدی تغییر شکل یافته نمایش داد. علاوه بر آن، جبر نوسانگر روی سطح کره نیز به‌عنوان تغییر شکل یافتهٔ جبر نوسانگر روی سطح تخت به دست می‌آید.

هدف ما در این مقاله ساخت و بررسی ویژگی‌های حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح کره و بررسی اثر خمیدگی فضا بر حالت‌های مزبور است. بدین منظور ابتدا در بخش ۲ به بررسی نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح کره پرداخته و ویژه مقادیر انرژی تبهگن این نوسانگر را به دست می‌آوریم. با مقایسه جبر این نوسانگر با جبر نوسانگر هماهنگ تغییر شکل یافته نشان می‌دهیم که نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح کره را می‌توانیم به صورت یک نوسانگر تغییر شکل یافتهٔ یک‌بعدی نیز در نظر بگیریم. با این رهیافت ویژه مقادیر انرژی را می‌توان به صورت ناتبهگن در نظر گرفت. بنابراین در ادامه، ابتدا نوسانگر سطح کره را به صورت یک نوسانگر یک‌بعدی تغییر شکل یافتهٔ ناتبهگن در نظر می‌گیریم و در بخش ۳ حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر مرتبط با این نوسانگر را از این رهیافت ساخته و ویژگی‌هایاپتیک کوانتومی این حالت‌ها شامل شمارش فوتون‌ها، پارامتر مندل و چلاندگی کوادراتوری را بررسی خواهیم کرد. سپس نوسانگر هماهنگ سطح کره را به صورت نوسانگر دوبعدی معمولی و در نتیجه دارای طیف تبهگن در نظر می‌گیریم و در بخش ۴ حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر این نوسانگر را با این رهیافت نیز ساخته و ویژگی‌هایاپتیک کوانتومی این حالت‌ها را بررسی خواهیم کرد. در این بخش، اثر خمیدگی فضا و همچنین وجود تبهگنی را بر ویژگی‌های حالت‌های همدوس ساخته شده، بررسی خواهیم کرد. در انتها نیز به جمع‌بندی و نتیجه‌گیری خواهیم پرداخت.

۲. نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح کره

دستگاه‌های مختصات متنوعی روی یک کره وجود دارند که تعمیم‌های مفیدی از دستگاه مختصات دکارتی هندسهٔ اقلیدسی هستند. در اینجا ما از مختصات ژنومی (به زبان حرفه‌ای در کارتوگرافی) استفاده می‌کنیم [۱۵]. این مختصات، مختصات دکارتی روی صفحهٔ مماس بر کره است، بدین صورت که برای یافتن مختصات هر نقطهٔ کره، از مرکز کره به نقطهٔ مورد نظر شعاعی وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا صفحهٔ مماسی را قطع کند. مختصات دکارتی نقطهٔ تقاطع در صفحهٔ مماسی را به عنوان مختصات دکارتی نقطهٔ مورد نظر روی کره در نظر می‌گیریم. استفاده از این دستگاه مختصات از این مزیت برخوردار است که حرکت ذرهٔ آزاد روی کره (حرکت یکنواخت روی یک دایرهٔ عظیمه از کره) در صفحهٔ مماسی، روی یک خط مستقیم تصویر می‌شود. به عبارت دیگر، مدارهای حرکت ذرهٔ آزاد تصویر شده، همانند مدارهای حرکت ذرهٔ آزاد در هندسهٔ اقلیدسی است و انحنا تنها روی سرعت تصویر شده اثر خواهد گذاشت [۱۵].

اگر مختصات دکارتی روی صفحهٔ مماس بر کره را با x و y نشان دهیم، هامیلتونی یک نوسانگر هماهنگ دوبعدی کوانتومی روی سطح کره به صورت زیر به دست می‌آید [۱۵]:

$$\hat{H}=\frac{1}{2}(\hat{\pi}^2+\lambda\hat{L}^2)+\frac{1}{2}(\hat{x}^2+\hat{y}^2), \qquad (1)$$

که در آن $\lambda=\frac{1}{R^2}$ خمیدگی کره است و داریم:

$$\vec{\pi}=\vec{p}+\frac{\lambda}{2}[\vec{x}(\vec{x}.\vec{p})+(\vec{p}.\vec{x})\vec{x}], \qquad (2)$$

و

$$\hat{L}^2=\frac{1}{2}\hat{L}_{ij}\hat{L}_{ij}, \qquad \hat{L}_{ij}=\hat{x}_i\hat{p}_j-\hat{x}_j\hat{p}_i. \qquad (3)$$

ویژه مقادیر انرژی این نوسانگر دوبعدی روی سطح کره نیز به صورت زیر به دست می‌آید (با فرض $\hbar=\omega=1$):

$$(e_n)_{sphere}\equiv\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{4}}(n+1)+\frac{\lambda}{2}(n+1)^2. \qquad (4)$$

علاوه بر این، در مرجع [۱۶]، به منظور بررسی ارتباط میان تابع تغییر شکل f در جبر ویل- هایزنبرگ تغییر شکل یافته و ساختار هندسی فضای فیزیکی، جبر نوسانگر دوبعدی روی سطح کره با جبر نوسانگر تغییر شکل یافته

$$[\hat{A},\hat{A}^\dagger]=(\hat{n}+1)f(\hat{n}+1)f^\dagger(\hat{n}+1)-\hat{n}f(\hat{n})f^\dagger(\hat{n}),$$

$$[\hat{A},\hat{n}]=\hat{A}, \tag{۵}$$
$$[\hat{A}^{\dagger},\hat{n}]=-\hat{A}^{\dagger},$$

مقایسه و نشان داده شده است که نوسانگر دوبعدی مزبور را می‌توان به عنوان نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی تغییر شکل یافته با تابع تغییر شکل:

$$f_S(n)=\sqrt{(N+1-n)}\times\sqrt{\left[\lambda(N+1-n)+\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{4}}\right]\left[\lambda n+\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{4}}\right]}, \tag{۶}$$

در نظر گرفت که در اینجا N بعد فضای فوک متناهی الابعاد مربوط به جبر نوسانگر هماهنگ روی سطح کره است.

در این مقاله، دو نوع حالت همدوس گازیو- کلاودر برای سامانهٔ نوسانگر دوبعدی سطح کره با دو رهیافت متفاوت به دست می‌آوریم. در ابتدا در بخش ۳، نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح کره را به صورت یک نوسانگر یک‌بعدی تغییر شکل یافته در نظر می‌گیریم که در این صورت سامانه به عنوان یک سامانهٔ ناتبهگن در خواهد آمد. سپس در بخش ۴ آن را به صورت یک نوسانگر دوبعدی غیر تغییر شکل یافته در نظر می‌گیریم که در این صورت سامانه به عنوان یک سامانهٔ تبهگن بررسی خواهد شد.

۳. حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر یک‌بعدی تغییر شکل یافتهٔ ناتبهگن سطح کره

در این بخش ابتدا به معرفی حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر برای سامانه‌های دارای طیف ناتبهگن می‌پردازیم. سپس حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر روی سطح کره را برای طیف انرژی ناتبهگن می‌سازیم و در ادامه ویژگی‌های اپتیک کوانتومی آنها از جمله تعداد متوسط فوتون‌ها، پارامتر مندل و چلاندگی حالت‌های مزبور را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۳. ۱. تعریف حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر سامانه‌های ناتبهگن

یک سامانه با هامیلتونی H و ویژه مقادیر انرژی گسسته و ناتبهگن e_n در نظر می‌گیریم. ویژه‌حالت‌های هامیلتونی سامانهٔ بردارهای متعامدی هستند که در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$H|n\rangle=e_n|n\rangle,\qquad n\geq 0. \tag{۷}$$

همچنین برای تعریف حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر برقراری شرط $0=e_0<e_1<e_2<\cdots$ ضروری است.

حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر برای سامانه‌ای با طیف گسسته به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۷ و ۱۸]:

$$|J,\gamma\rangle=N(J)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{J^{n/2}\,e^{-ie_n\gamma}}{\sqrt{[e_n]!}}|n\rangle, \tag{۸}$$

با تعریف $[e_n]!\equiv e_1e_2\ldots e_n$ و با توجه به این‌که $[e_0]!=1$ است، ضریب بهنجارش $N(J)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$N(J)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{J^n}{[e_n]!}. \tag{۹}$$

دامنهٔ γ به صورت $-\infty<\gamma<\infty$ بوده و دامنهٔ J نیز، $0\leq J\leq R$ است که در آن R شعاع همگرایی است و به صورت زیر داده می‌شود:

$$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{[e_n]!}. \tag{۱۰}$$

مطابق با تعریف گازیو- کلاودر حالتی را حالت همدوس می‌نامیم که چهار شرط زیر را داشته باشد [۱۷]:

الف) پیوستگی در برچسب، یعنی اگر $(J,\gamma)\to(J',\gamma')$ میل کند، باید $|J,\gamma\rangle\to|J',\gamma'\rangle$.

ب) برقرار بودن رابطهٔ $\int|J,\gamma\rangle\langle J,\gamma|d\mu(J,\gamma)=1$، که به رابطهٔ تفکیک واحد موسوم است.

ج) برقراری رابطهٔ پایداری زمانی یعنی رابطهٔ $e^{-itH}|J,\gamma\rangle=|J,\gamma+\omega t\rangle$.

د) برقرار بودن رابطهٔ کنش واحد یعنی رابطهٔ $\langle J,\gamma|H|J,\gamma\rangle=\omega J$.

به سادگی دیده می‌شود که حالت‌های همدوس (۸) هر چهار ویژگی بالا را دارند.

از طرف دیگر، می‌توان نشان داد که حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر، برای سامانهٔ نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی، به تعریف حالت‌های همدوس استاندارد تبدیل می‌شود [۱۷]. از این‌رو، حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر را می‌توان تعمیم حالت‌های همدوس استاندارد به سامانه‌های متفاوت با نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی در نظر گرفت.

۳. ۲. حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر یک‌بعدی تغییر شکل یافتهٔ ناتبهگن سطح کره

همان‌گونه که در بخش ۲ بیان شد، می‌توان نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح کره را به عنوان یک نوسانگر یک‌بعدی تغییر شکل یافتهٔ ناتبهگن با ویژه مقادیر انرژی (۴) در نظر گرفت. در این بخش حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر سامانهٔ مزبور را با این رهیافت به دست می‌آوریم.

با استفاده از تغییر متغیرهای $\alpha=\frac{\lambda}{۲}$ و $\beta=\sqrt{۱+\alpha^{۲}}$، ویژه مقادیر انرژی (۴) به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$e_n=(n+۱)\left[\beta+\alpha(n+۱)\right]. \tag{۱۱}$$

چون $e_{\circ}=\alpha+\beta\neq\circ$ است و برای تعریف حالت‌های همدوس باید انرژی حالت پایه صفر باشد، ویژه مقادیر انرژی را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$e'_n\equiv e_n-e_{\circ}=\alpha n\left[n+\left(۲+\frac{\beta}{\alpha}\right)\right]. \tag{۱۲}$$

با استفاده از تغییر متغیر $\mu=۲+\frac{\beta}{\alpha}$ رابطهٔ بالا به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$e'_n=\alpha n(n+\mu), \tag{۱۳}$$

بنابراین داریم

$$[e'_n]!=\frac{\alpha^n\, n!\,\Gamma(n+\mu+۱)}{\Gamma(۱+\mu)}, \tag{۱۴}$$

که در آن از این ویژگی تابع گاما یعنی، $\Gamma(z+۱)=z\,\Gamma(z)$، استفاده کرده‌ایم.

حال برای ساختن حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر هماهنگ تغییر شکل یافتهٔ سطح کره، e'_n و $[e'_n]!$ را در رابطهٔ کلی حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر طیف گسسته، رابطهٔ (۸)، جایگذاری می‌کنیم،

$$\begin{aligned}|J,\gamma\rangle=&\frac{\left[\Gamma(\mu+۱)\right]^{۱/۲}}{N(J)}\\&\times\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{J^{n/۲}\ e^{-i\alpha n(n+\mu)\gamma}}{\left[\alpha^n\ n!\,\Gamma(n+\mu+۱)\right]^{۱/۲}}|n\rangle.\end{aligned} \tag{۱۵}$$

ضریب بهنجارش $N(J)$ نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$N^{۲}(J)=\Gamma(\mu+۱)\frac{I_\mu\left(۲\sqrt{J/\alpha}\right)}{(J/\alpha)^{\mu/۲}}, \tag{۱۶}$$

که در آن I_μ تابع بسل تغییر شکل یافته نوع اول است [۱۹].

به‌سادگی می‌توان نشان داد که رابطهٔ بالا دارای هر چهار ویژگی حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر است.

۳. ۳. ویژگی‌های اپتیک کوانتومی حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر یک‌بعدی تغییر شکل یافته

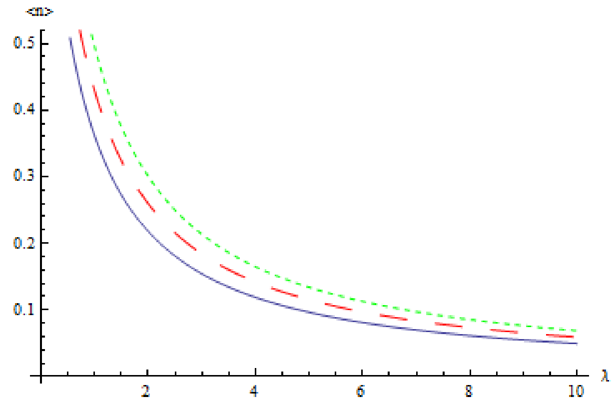
پس از ساخت ریاضی حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر یک‌بعدی تغییر شکل یافته ناتبهگن روی سطح کره، در این قسمت خواص اپتیک کوانتومی حالت‌های همدوس مزبور را بررسی خواهیم کرد.

الف) شمار میانگین و آمار شمارش فوتون‌ها

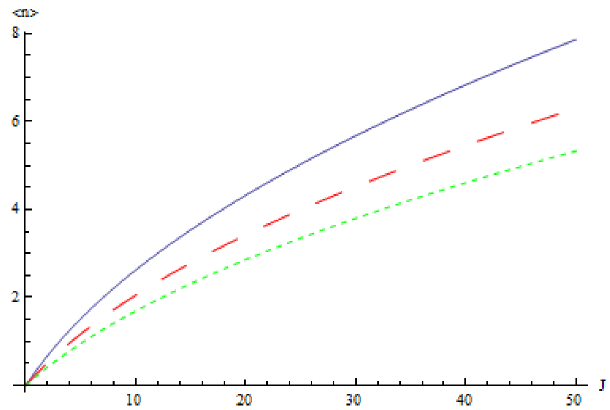
یکی از ویژگی‌های مهم حالت‌های همدوس که در این بخش مورد توجه قرار می‌دهیم تابع توزیع احتمال فوتونی آنهاست. شمار میانگین فوتون‌ها در حالت $|J,\gamma\rangle$ به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\langle\hat{n}\rangle=&\langle J,\gamma|\hat{a}^{\dagger}\hat{a}|J,\gamma\rangle\\=&\frac{(J/\alpha)^{\mu/۲}}{I_\mu\left(۲\sqrt{J/\alpha}\right)}\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{J^n n}{\alpha^n n!\Gamma(n+\mu+۱)}.\end{aligned} \tag{۱۷}$$

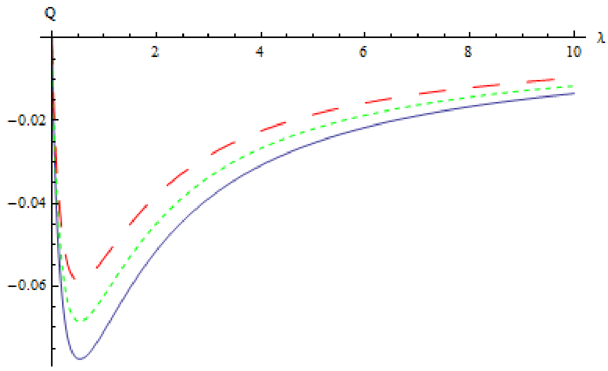
در شکل ۱ شمار میانگین فوتون‌ها برای حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر مزبور برحسب λ برای مقادیر مختلف J و



شکل ۱. (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) شمار میانگین فوتون‌های حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر سطح کره برحسب λ به‌ازای $N=۲۰۰$ برای $J=۱$ (خط توپر)، $J=۱/۲$ (خط چین)، $J=۱/۴$ (نقطه چین).



شکل ۲. (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) شمار میانگین فوتون‌های حالت همدوس گازیو- کلاودر سطح کره برحسب J به‌ازای $N=۵۰۰$ برای $\lambda=۱$ (خط توپر)، $\lambda=۱/۵$ (خط چین)، $\lambda=۲$ (نقطه چین).



شکل ۳. (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) پارامتر مندل برای حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر سطح کره برحسب λ به‌ازای $N=۲۰۰$ برای $J=۱$ (خط چین)، $J=۱/۲$ (نقطه چین)، $J=۱/۴$ (خط توپر).

همچنین در شکل ۲ شمار میانگین فوتون‌ها برحسب J برای λ های مختلف رسم شده است. همان طور که از این دو شکل دیده می‌شود، با افزایش J، تعداد متوسط فوتون‌ها افزایش می‌یابد. علاوه بر این افزایش خمیدگی فضای فیزیکی کره نیز باعث کاهش شمار میانگین فوتون‌ها می‌شود.

ب) پارامتر مندل

برای مطالعهٔ آمار فوتون‌های حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر سطح کره لازم است پارامتر مندل [۲۰] یعنی

$$Q=\frac{\langle n^{۲}\rangle-\langle n\rangle^{۲}-\langle n\rangle}{\langle n\rangle}, \qquad (۱۸)$$

را مورد بررسی قرار دهیم .

مقادیر مثبت، صفر و منفی پارامتر مزبور به ترتیب نشانگر آمار فراپواسونی، آمار پواسونی و آمار زیرپواسونی است.

در شکل ۳ اثر انحنای فضا بر پارامتر مندل حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر سطح کره برای مقادیر مختلف J نشان داده شده است. همان گونه که دیده می‌شود افزایش λ، در ابتدا باعث تقویت سرشت زیرپواسونی آمار شمارش فوتون‌های حالت‌های همدوس کره می‌شود و سپس افزایش خمیدگی فضای فیزیکی سبب کاهش ویژگی زیرپواسونی می‌شود. علاوه بر این، با افزایش J نیز، سرشت زیرپواسونی آمار شمارش فوتون‌ها تقویت می‌شود.

ج) چلاندگی

در ایـن بخـش بـه بررسـی نوفـه‌هـای کوانتـومی مؤلفـه‌هـای کوادراتوری میدان نسبت به حالت‌هـای همـدوس مـی‌پـردازیم. بدین منظور $\hat{x}_{1a}$ و $\hat{x}_{2a}$ را در نظر می‌گیریم که به صورت زیر برحسب عملگرهای خلق و نابودی تعریف می‌شوند [۲۱]:

$$\hat{x}_{1a} = \frac{1}{2}(\hat{a}e^{i\varphi} + \hat{a}^{\dagger}e^{-i\varphi}), \tag{۱۹}$$

$$\hat{x}_{2a} = \frac{1}{2i}(\hat{a}e^{i\varphi} - \hat{a}^{\dagger}e^{-i\varphi}). \tag{۲۰}$$

با استفاده از رابطهٔ جابـه‌جـایی بـین $\hat{a}$ و $\hat{a}^{\dagger}$ بـه رابطـهٔ عـدم قطعیـــــــــت $(\Delta x_{1a})^2 (\Delta x_{2a})^2 \geq \frac{1}{16} |\langle[\hat{x}_{1a}, \hat{x}_{2a}]\rangle|^2 = \frac{1}{16}$ می‌رسیم.

اکنـون، بنـا بـه تعریـف اگـر بـرای حالـت میـدان، رابطـهٔ $(\Delta x_{ia})^2 < \frac{1}{4}$ برقرار باشد یا به طور هم ارز رابطهٔ

$$S_{ia} \equiv 4(\Delta x_{ia})^2 - 1 < 0, \tag{۲۱}$$

برقـرار باشـد $(i = 1\, or\, 2)$، آن‌گـاه حالـت مزبـور یـک حالـت چلانده است. بنابراین، بـرای حالـت چلانـده افـت و خیزهـای کوانتومی یکی از مؤلفه‌های کوادراتوری میدان نسبت به مقـدار مربوط به حالت با کمینهٔ حاصل‌ضرب نامعینی کاهش مـی‌یابـد. این به بهـای افـزایش افـت و خیزهـای کوانتـومی مؤلفـه‌هـای کوادراتوری دیگر میدان خواهد بود، به طـوری کـه اصـل عـدم قطعیت همچنان پا بر جا می‌ماند. حالت‌های چلاندهٔ میدان فاقد همتـای کلاسـیکی هسـتند. از ایـن‌رو، بـه عنـوان دسـته‌ای از حالت‌های غیرکلاسیک میدان به حساب می‌آیند [۲۲]. به منظور دستیابی به درک روشن‌تری از حالت‌های چلاندهٔ میـدان خـاطر نشان می‌کنیم که وردایی مؤلفـه‌هـای کواداراتـوری حالـت‌هـای همدوس استاندارد و حالت خلأ میدان تابشی مساوی $\frac{1}{4}$ اسـت [۲۲]، یعنی $(\Delta x_{ia})^2_{Coh} = (\Delta x_{ia})^2_{vac} = \frac{1}{4}$. به این ترتیب واضح است که $(\Delta x_{ia})^2_{sq} < (\Delta x_{ia})^2_{Coh,vac}$.

رابطهٔ اخیر، کاهش افت و خیزهـای کوانتـومی حالـت‌هـای چلانده را نسبت به حالت همـدوس اسـتاندارد و حالـت خـلأ میدان نشان می‌دهد.

به سادگی می‌توان نشان داد که رابطـهٔ (۲۱) را مـی‌تـوان بـه صورت زیر بازنویسی کرد:

$$S_{1a} = [2\langle\hat{n}\rangle + 2|\langle\hat{a}^2\rangle|\cos(2\varphi) - (2|\langle\hat{a}\rangle|\cos\varphi)^2], \tag{۲۲}$$

$$\begin{aligned} S_{2a} = -[&2|\langle\hat{a}^2\rangle|\cos(\theta + 2\varphi) + 4|\langle\hat{a}\rangle| \\ &\times \cos^2(\psi + 2\varphi) - 2\langle\hat{n}\rangle]. \end{aligned} \tag{۲۳}$$

کـــه در آنهــــا از تعریـــــف‌هــــای $\langle a^2\rangle = |\langle a^2\rangle| e^{2i\theta}$ و $\langle a\rangle^2 = |\langle a\rangle^2| e^{2i\psi}$ استفاده شده است.

مقـادیر چشمداشـتی $\langle\hat{a}\rangle$ و $\langle\hat{a}^2\rangle$ نیـز بـرای حالـت‌هـای همدوس گازیو- کلاودر سطح کـره بـه شـکل زیـر بـه دسـت می‌آیند:

$$\begin{aligned} \langle\hat{a}\rangle = \langle J,\gamma|\hat{a}|J,\gamma\rangle = &\frac{(J/\alpha)^{\frac{\mu}{2}}}{I_{\mu}\left(2\sqrt{J/\alpha}\right)} \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} &\frac{\sqrt{n}\, J^{(n-1/2)} e^{-i\gamma\alpha[n(n+\mu)-(n-1)(n-1+\mu)]}}{\left[\alpha^{n} n!\,\Gamma(n+\mu+1)\right]^{1/2} \left[\alpha^{n-1}(n-1)!\,\Gamma(n+\mu)\right]^{1/2}}, \end{aligned} \tag{۲۴}$$

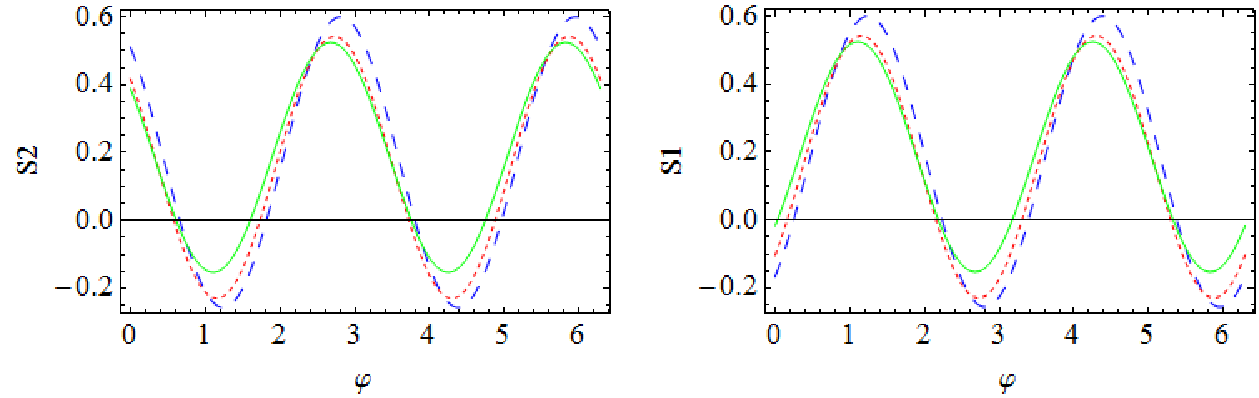
$$\begin{aligned} \langle\hat{a}^2\rangle = \langle J,\gamma|\hat{a}|J,\gamma\rangle = &\frac{(J/\alpha)^{\frac{\mu}{2}}}{I_{\mu}\left(2\sqrt{J/\alpha}\right)} \\ \times \sum_{n=2}^{\infty} &\frac{\sqrt{n(n-1)}\, J^{n-1} e^{-i\gamma\alpha[n(n+\mu)-(n-2)(n-2+\mu)]}}{\left[\alpha^{n} n!\,\Gamma(n+\mu+1)\right]^{1/2} \left[\alpha^{n-2}(n-2)!\,\Gamma(n+\mu-1)\right]^{1/2}}. \end{aligned} \tag{۲۵}$$

اکنون با جایگذاری رابطه (۱۷) و روابط بـالا در روابـط (۲۲) و (۲۳)، شکل نهایی روابط S_{1a} و S_{2a} به دست می‌آید.

با توجه به پیچیدگی این روابط، در شکل ۴ توابع $S_1(\varphi)$ و $S_2(\varphi)$ برحسب φ برای مقادیر مختلف λ رسم شـده اسـت. همان گونه دیده می‌شود در φهایی که چلاندگی رخ می‌دهـد، افزایش خمیدگی کره سبب افزایش چلاندگی شده است.

۴. حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر هماهنگ دوبعدی تبهگن روی سطح کره

در این بخش حالت‌هـای همـدوس گـازیو- کـلاودر نوسـانگر هماهنگ دوبعدی سطح کره را از رهیافت دوم به دست خواهیم آورد. در این رهیافت نوسانگر سطح کره را به صورت دوبعدی و بدون تغییـر شـکل در نظـر مـی‌گیـریم. بـدین منظـور، ابتـدا حالت‌های همدوس گـازیو- کـلاودر بـرای سـامانه‌هـای دارای



شکل ۴. (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) نمودارهای $S_1(\varphi)$ و $S_2(\varphi)$ برحسب φ به ازای $J=1$ و $\gamma=0/1$ و $N=200$ برای $\lambda=0/14$ (خط توپر)، $\lambda=0/15$ (نقطه چین)، $\lambda=0/16$ (خط چین).

طیف تبهگن را معرفی می‌کنیم. سپس حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر هماهنگ دوبعدی تبهگن روی سطح کره را می‌سازیم و در ادامه ویژگی های اپتیک کوانتومی آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۴. ۱. حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر سامانه‌های تبهگن

در این بخش سامانه‌ای با هامیلتونی H_d و ویژه مقادیر انرژی تبهگن زیر را در نظر می‌گیریم:

$$e_0 \le e_1 \le e_2 \le \cdots \le e_{n-1} \le e_n \le \cdots, \qquad (۲۶)$$

ویژه حالت‌های انرژی را به صورت $\{|\psi_n\rangle\}$ بیان می‌کنیم.

ترازهای انرژی مزبور را می‌توان به شکل زیر دسته‌بندی کرد:

$$\rho_0 = 0 < \rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_{n-1} < \rho_n < \cdots, \qquad (۲۷)$$

که در آن، انرژی ρ_n به اندازهٔ d_n بار در سامانه تکرار شده است و طیف انرژی به گونه‌ای جابه‌جا شده تا انرژی حالت پایه برابر صفر شود. دیده می‌شود که اگر $\{\forall n : d_n = 1\}$ باشد، سامانه مورد نظر دیگر تبهگن نخواهد بود.

در ادامه از d_n ویژه حالت تبهگن و نامتعامد دارای انرژی ρ_n، یک پایه متعامد و بهنجار $\{|n,p_n\rangle, p_n = 0,1,\ldots,d_{n-1}\}$ را انتخاب می‌کنیم. علاوه بر این، برای هر n، یک فاز η_n نیز معرفی می‌شود که در بازهٔ $[0,2\pi]$ قرار دارد. حال اگر به ازای هر انرژی ρ_n، یک حالت به صورت بر هم نهی از حالت‌های $|n,p_n\rangle$ به شکل زیر تعریف کنیم:

$$|n,d_n,\eta_n\rangle_D = \sum_{p_n=0}^{d_{n-1}} e^{ip_n\eta_n} |n,p_n\rangle, \qquad (۲۸)$$

داریم:

$$_D\langle n,d_n,\eta_n | m,d_m,\eta_m\rangle_D = d_n\delta_{nm}. \qquad (۲۹)$$

در نهایت، حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر برای سامانهٔ تبهگن مزبور به صورت رابطهٔ زیر تعمیم داده می‌شود [۲۳]:

$$|J,\gamma,\eta\rangle = N(J)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^{n/2}\, e^{-i\rho_n\gamma}}{\sqrt{[\rho_n]!}} |n,d_n,\eta_n\rangle_D, \qquad (۳۰)$$

که در آن مجموعه فازهای $\{\eta_n, n\in N\}$ با بردار $\boldsymbol{\eta}$ نشان داده شده است و ضریب بهنجارش نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$N(J)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n\, J^n}{[\rho_n]!}. \qquad (۳۱)$$

از طرف دیگر، عملگرهای آفرینش و نابودی را برای یک سامانهٔ کوانتومی تبهگن می‌توان به شکل زیر تعریف کرد:

$$\hat{A}_D = \sqrt{H_{\rho_{n+1}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{d_{n+1}} \big|n,d_n,\eta_n\big\rangle\big\langle n+1,d_{n+1},\eta_{n+1}\big|, \qquad (۳۲)$$

$$\hat{A}_D^{\dagger} = \sqrt{H_{\rho_n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{d_{n+1}} \big|n+1,d_{n+1},\eta_{n+1}\big\rangle\big\langle n,d_n,\eta_n\big|, \qquad (۳۳)$$

که در آنها H_{ρ_n} و $H_{\rho_{n+1}}$ با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$H_{\rho_n} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n}{d_n} |n,d_n,\eta_n\rangle\langle n,d_n,\eta_n|, \qquad (۳۴)$$

$$H_{\rho_{n+1}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_{n+1}}{d_n} | n, d_n, \eta_n \rangle \langle n, d_n, \eta_n |. \quad (۳۵)$$

با محاسبات ساده می‌توان نشان داد که روابط زیر برقرارند:

$$\hat{A}_D | n, d_n, \eta_n \rangle = \sqrt{\rho_n} \, | n-1, \, d_{n-1}, \eta_{n-1} \rangle, \quad (۳۶)$$

$$\hat{A}_D^{\dagger} | n, d_n, \eta_n \rangle = \frac{d_n}{d_{n+1}} \sqrt{\rho_{n+1}} \, | n+1, d_{n+1}, \eta_{n+1} \rangle. \quad (۳۷)$$

به سادگی می‌توان دید که حالت همدوس گازیو- کلاودر (۳۰) ویژه حالت عملگر نابودی (۳۶) است:

$$\hat{A}_D | J, \gamma, \boldsymbol{\eta} \rangle = J^{1/2} \, | J, \gamma, \boldsymbol{\eta} \rangle. \quad (۳۸)$$

۴. ۲. حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر دوبعدی روی سطح کره برای طیف انرژی تبهگن

در بخش قبل روش ساخت حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر سامانه‌های تبهگن را بررسی کردیم. در این بخش حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر مرتبط با نوسانگر هماهنگ دوبعدی تبهگن روی سطح کره را به دست می‌آوریم.

برای به دست آوردن تعداد تبهگنی d_n در ویژه مقادیر انرژی (۴)، ابتدا یک نوسانگر دوبعدی روی سطح تخت در نظر می‌گیریم. انرژی این نوسانگر با استفاده از رابطهٔ (۴) و قرار دادن $\lambda = 0$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$e_n = (n+1). \quad (۳۹)$$

به وضوح دیده می‌شود که این انرژی از ترکیب انرژی دو نوسانگر مستقل از یکدیگر به شکل زیر به دست آمده است:

$$\begin{aligned} e_n &= e_{n_1} + e_{n_2} = (n_1 + \tfrac{1}{2}) + (n_2 + \tfrac{1}{2}) \\ &= (n_1 + n_2) + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}). \end{aligned} \quad (۴۰)$$

از این‌رو به سادگی دیده می‌شود که برای هر مقدار از n به اندازهٔ

$$d_n = n+1 \quad (۴۱)$$

تبهگنی وجود دارد. برای سامانهٔ نوسانگر دوبعدی تبهگن با توجه به رابطهٔ (۴) و شرط صفر شدن ρ_0 داریم:

$$\rho_n = \alpha n (n+\mu). \quad (۴۲)$$

اکنون با جایگذاری روابط (۴۱) و (۴۲) در رابطهٔ (۳۰)، شکل کلی حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر دوبعدی تبهگن روی سطح کره به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} |J, \gamma, \eta\rangle &= \frac{\left[\Gamma(\mu+1)\right]^{1/2}}{N(J)} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^{n/2} \, e^{-i\alpha n(n+\mu)\gamma}}{\left[\alpha^n \, n! \, \Gamma(n+\mu+1)\right]^{1/2}} \left| n, d_n = n+1, \eta \right\rangle_D, \end{aligned} \quad (۴۳)$$

که در آن ضریب بهنجارش با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$N^2(J) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{(J/\alpha)^{\mu/2}} \left[\frac{\partial}{\partial(J/\alpha)} + 1 - \frac{\mu}{2}\right] I_\mu\left(2\sqrt{J/\alpha}\right). \quad (۴۴)$$

۴. ۳. ویژگی‌های **اپتیک کوانتومی حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر دوبعدی تبهگن روی سطح کره**

پس از ساخت ریاضی حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر هماهنگ دوبعدی تبهگن روی سطح کره، در این قسمت ویژگی‌های اپتیک کوانتومی حالت‌های همدوس مزبور را بررسی می‌کنیم. بدین منظور، ابتدا ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر سامانه دارای طیف انرژی تبهگن از جمله پارامتر مندل، خواص فازی و چلاندگی عددی- فازی را بررسی می‌کنیم. سپس ویژگی‌هایغیرکلاسیکی مزبور را برای حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر روی سطح کره به دست خواهیم آورد.

۴. ۳. ۱ ویژگی‌های **غیرکلاسیکی حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر برای سامانه‌ای دارای طیف انرژی تبهگن**

پارامتر مندل: برای سامانهٔ دارای طیف انرژی تبهگن، عملگر عددی به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۴]:

$$\hat{N}_D \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{d_n} | n, d_n, \eta_n \rangle \langle n, d_n, \eta_n |. \quad (۴۵)$$

به سادگی دیده می‌شود که داریم:

$$\hat{N}_D | n, d_n, \eta_n \rangle = n \, | n, d_n, \eta_n \rangle. \quad (۴۶)$$

بنابراین پارامتر مندل تعمیم یافته به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۵]:

$$Q_D = \frac{\langle \hat{N}_D^2\rangle - \langle \hat{N}_D\rangle^2}{\langle \hat{N}_D\rangle} - 1. \quad (۴۷)$$

ویژگی‌های فازی و چلاندگی عددی- فازی

بر اساس فرمول‌بندی پگ- بارنت، در یک فضای هیلبرت با بعد متناهی $(s+1)$، مجموعه‌ای متعامد از حالت‌های فازی $\{|\theta_m\rangle, m = 0,1,...,s\}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۶ و ۲۷]:

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^{s} e^{in\theta_m} |n\rangle, \quad (۴۸)$$

که در آن داریم:

$$\theta_m = \theta_0 + \frac{2\pi m}{s+1}, \quad (۴۹)$$

و θ_0 نیز مقداری دلخواه است.

بر اساس تعریف حالت فازی (۴۸)، عملگر فازی هرمیتی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{\phi}_\theta = \sum_{m=0}^{s} \theta_m |\theta_m\rangle\langle\theta_m|. \quad (۵۰)$$

از طرف دیگر، برای یک سامانه دارای طیف تبهگن نیز، حالت فازی و عملگر فازی به صورت زیر تعمیم داده می‌شوند:

$$|\theta_m\rangle_D = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^{s} \frac{e^{in\theta_m}}{\sqrt{d_n}} |n, d_n\rangle, \quad (۵۱)$$

$$\hat{\phi}_\theta^D = \sum_{m=0}^{s} \theta_m |\theta_m\rangle_D \, {}_D\langle\theta_m|. \quad (۵۲)$$

از این‌رو، توزیع احتمال فازی پگ- بارنت برای حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر (۳۰) مربوط به سامانهٔ تبهگن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P_D(\theta) = \lim_{s\to\infty} \frac{s+1}{2\pi} \left| {}_D\langle\theta_m | J,\gamma,\eta\rangle \right|^2. \quad (۵۳)$$

با جایگذاری روابط (۳۰) و (۵۱) در رابطهٔ (۵۳) به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$P_D(\theta) = \frac{1}{2\pi}(1 + 2N(J)^{-1}) \times \sum_n \sum_{k<n} \sqrt{\frac{d_n d_k}{[\rho_n]![\rho_k]!}} z^n z^{*k} \cos[(n-k)\theta], \quad (۵۴)$$

از طرف دیگر، بر طبق اصل عدم قطعیت، عملگرهای فازی و عددی در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$\left\langle \left(\Delta\phi_\theta^D\right)^2 \right\rangle \left\langle \left(\Delta N_D\right)^2 \right\rangle \geq \frac{1}{4} \left| \left\langle \left[\hat{N}_D, \hat{\phi}_\theta^D\right] \right\rangle \right|^2, \quad (۵۵)$$

همچنین داریم [۳۰]:

$$\left[\hat{N}_D, \hat{\phi}_\theta^D\right] = i\left[1 - 2\pi P_D(\theta)\right]. \quad (۵۶)$$

عدم قطعیت فازی و عددی برای حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر سامانه‌های تبهگن (۳۰) نیز با رابطهٔ زیر به دست می‌آیند:

$$\langle(\Delta\phi_\theta^D)^2\rangle = \int \theta^2 P_D(\theta) d\theta - \left(\int \theta P_D(\theta) d\theta\right)^2$$
$$= \frac{\pi^2}{3} + 4N(J)^{-1} \sum_n \sum_{k<n} \sqrt{\frac{d_n d_k}{[\rho_n]![\rho_k]!}} \times J^{n/2} J^{*k/2} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^2}, \quad (۵۷)$$

$$\langle(\Delta N_D)^2\rangle = \langle \hat{N}_D^2\rangle - \langle \hat{N}_D\rangle^2 = N(J)^{-1} \times \sum_n n^2 \frac{|z|^{2n}}{[\rho_n]!} d_n - \left[N(J)^{-1} \sum_n n \frac{J^n}{[\rho_n]! d_n}\right]^2. \quad (۵۸)$$

برای بررسی چلاندگی مؤلفه‌های عددی یا فازی، پارامترهای چلاندگی عددی و فازی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_N = \frac{2\langle(\Delta N_D)^2\rangle}{|\langle[\hat{N}_D, \hat{\phi}_\theta^D]\rangle|} - 1, \quad (۵۹)$$

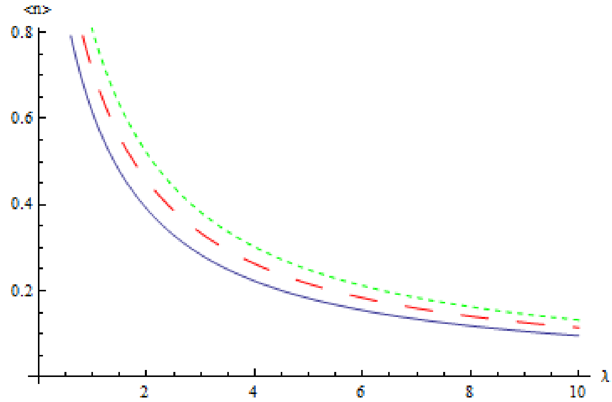
$$S_\varphi = \frac{2\langle(\Delta\phi_\theta^D)^2\rangle}{|\langle[\hat{N}_D, \hat{\phi}_\theta^D]\rangle|} - 1. \quad (۶۰)$$

از این‌رو، اگر $S_N < 0$ ($S_\varphi < 0$) باشد، آنگاه حالت همدوس مورد نظر دارای چلاندگی در عملگر عددی (فازی) خواهد بود. در ادامه، ویژگی‌هایغیرکلاسیکی بیان شده را برای حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر دوبعدی تبهگن روی سطح کره به دست می‌آوریم.

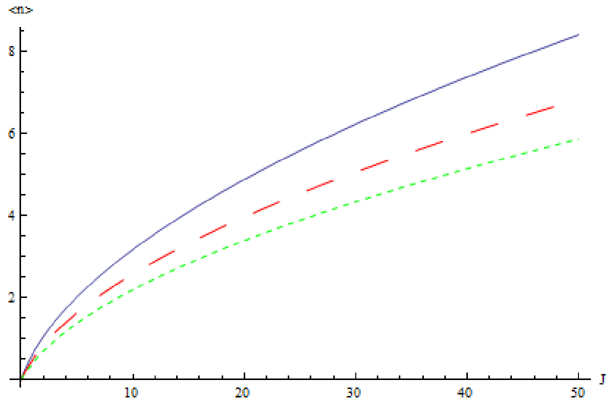
الف) شمار میانگین و آمار شمارش فوتون‌ها

شمار میانگین فوتون‌ها در این حالت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

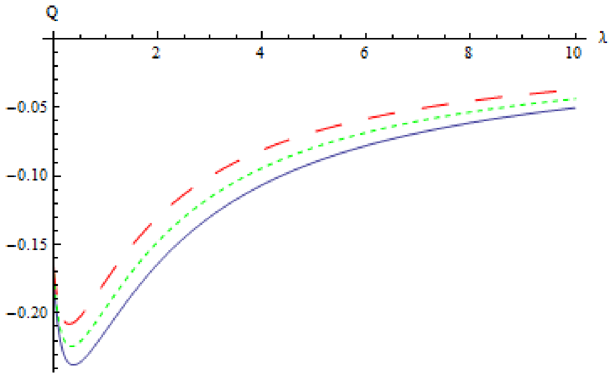
$$\langle \hat{N}_D\rangle \equiv \langle J,\gamma,\eta | \hat{N}_D | J,\gamma,\eta\rangle = \frac{\Gamma(\mu+1)}{N(J)^2} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^n}{[\alpha^n n!(n+\mu)!]} n(n+1). \quad (۶۱)$$



شکل ۵. (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) شمار میانگین فوتون‌های حالت همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر دوبعدی روی سطح کره برحسب λ به‌ازای $N=۲۰۰$ برای $J=۱$ (خط توپر)، $J=۱٫۲$ (خط چین)، $J=۱٫۴$ (نقطه چین).



شکل ۶. (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) شمار میانگین فوتون‌های حالت همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر دوبعدی روی سطح کره برحسب J به‌ازای $N=۵۰۰$ برای $\lambda=۱$ (خط توپر)، $\lambda=۱٫۵$ (خط چین)، $\lambda=۲$ (نقطه چین).



شکل ۷. (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) پارامتر مندل برای حالت همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر دوبعدی روی سطح کره بر حسب λ به‌ازای $N=۲۰۰$ برای $J=۱$ (خط چین)، $J=۱٫۲$ (نقطه چین)، $J=۱٫۴$ (خط توپر).

در شکل ۵ شمار میانگین فوتون‌ها برای حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر دوبعدی سطح کره برحسب λ به ازای مقادیر مختلف J و همچنین در شکل ۶ شمار میانگین فوتون‌ها برحسب J برای λهای مختلف رسم شده است. همان طور که دیده می‌شود، با افزایش J، تعداد متوسط فوتون‌ها افزایش می‌یابد. علاوه بر آن، افزایش خمیدگی فضای فیزیکی کره باعث کاهش شمار میانگین فوتون‌ها می‌شود.

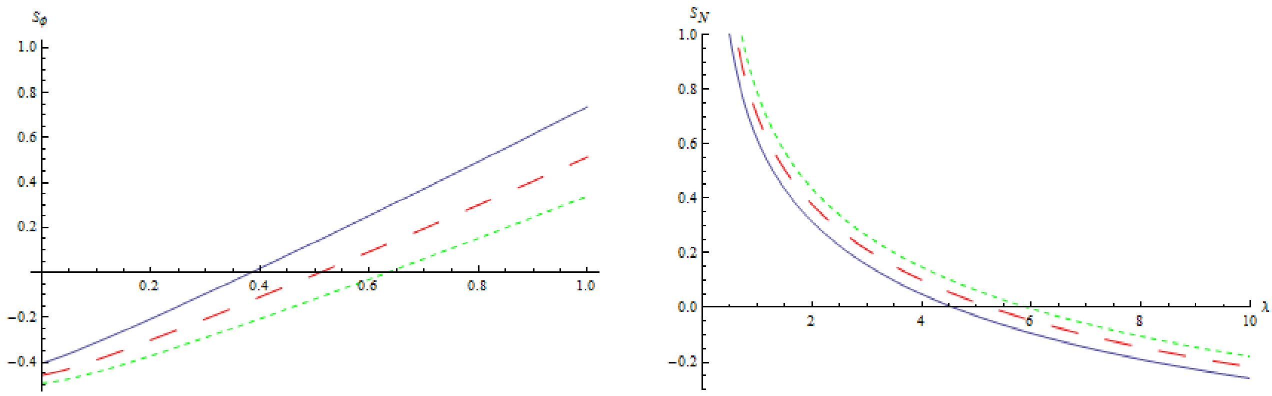
ب) پارامتر مندل

برای مطالعهٔ آمار فوتون‌های حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح کره پارامتر مندل (۴۷) را بررسی می‌کنیم.

در شکل ۷ اثر انحنای فضای فیزیکی بر پارامتر مندل برای مقادیر مختلف J نشان داده شده است. همان گونه که دیده می‌شود افزایش λ، در ابتدا باعث تقویت سرشت زیرپواسونی آمار شمارش فوتون‌های حالت‌های همدوس کره می‌شود و سپس افزایش خمیدگی فضای فیزیکی سبب کاهش ویژگی‌زیرپواسونی می‌شود. علاوه بر این، با افزایش J نیز، سرشت زیرپواسونی آمار شمارش فوتون‌ها تقویت می‌شود.

ج) چلاندگی

در این بخش، با جایگذاری تعریف حالت‌های همدوس



شکل ۸ (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) پارامتر چلاندگی برای حالت همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر دوبعدی روی سطح کره بر حسب λ به‌ازای $N=۱۰۰$ و $\theta=\frac{\pi}{۶}$ برای $J=۱/۴$ (خط توپر)، $J=۱/۶$ (خط چین)، $J=۱/۸$ (نقطه چین).

نوسانگر هماهنگ دوبعدی تغییر شکل یافته، رابطهٔ (۴۳)، در روابط (۵۹) و (۶۰) چلاندگی در عملگر عددی و عملگر فازی را به دست می‌آوریم.

در شکل ۸ نمودارهای S_N و S_φ برحسب λ برای مقادیر مختلف J رسم شده است. همان طور که دیده می‌شود، مقدار پارامتر چلاندگی S_N با افزایش J افزایش و با افزایش λ، کاهش می‌یابد. از این‌رو، افزایش خمیدگی فضا سبب افزایش چلاندگی در عملگر عددی شده در حالی که افزایش پارامتر J چلاندگی عملگر عددی را کاهش می‌دهد. همچنین دیده می‌شود که در عملگر فازی این روند برعکس اتفاق می‌افتد.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله پس از بررسی نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح کره، حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح کره با دو رهیافت متفاوت ساخته شد. در رهیافت نخست، سامانهٔ مزبور به صورت نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی تغییر شکل یافته با طیف انرژی ناتبهگن در نظر گرفته شد. در رهیافت دوم، سامانه به صورت نوسانگر هماهنگ دوبعدی با طیف انرژی تبهگن بررسی شد. همچنین ویژگی‌های اپتیک کوانتومی حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر کره از جمله میانگین شمارش فوتون‌ها، پارامتر مندل و چلاندگی کوادراتوری محاسبه و اثر خمیدگی فضای فیزیکی بر ویژگی‌های حالت‌های همدوس ساخته شده بررسی شد. نتایج نشان داد که افزایش خمیدگی فضای فیزیکی کره باعث کاهش شمار میانگین فوتون‌ها می‌شود. همچنین با افزایش پارامتر J، تعداد متوسط فوتون‌ها افزایش پیدا می‌کند. علاوه بر این مشاهده شد که افزایش خمیدگی فضای فیزیکی، در ابتدا باعث تقویت سرشت زیرپواسونی آمار شمارش فوتون‌های حالت‌های همدوس کره می‌شود و سپس با افزایش بیشتر خمیدگی، ویژگی زیرپواسونی کاهش می‌یابد. افزایش J نیز، سرشت زیرپواسونی آمار شمارش فوتون‌ها را تقویت می‌کند. در انتها نیز دیده شد که در نواحی که چلاندگی رخ می‌دهد، افزایش خمیدگی کره سبب افزایش چلاندگی کواداتوری و همچنین عملگر عددی شده است. از طرف دیگر مقایسه نمودارهای حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر دوبعدی تبهگن با نوسانگر یک‌بعدی تغییر شکل یافتهٔ ناتبهگن نشان می‌دهد که با این که رفتار کلی حالت‌های همدوس به دست آمده از این دو رهیافت، با توجه به نمودارهای شمار میانگین و پارامتر مندل، یکسان است، تبهگنی باعث افزایش شمار میانگین و تضعیف سرشت زیرپواسونی آمار شمارش فوتون‌های حالت‌های همدوس مزبور شده است.

مراجع

۱. ع. مهدی‌فر، «*ساختار هندسی حالت‌های همدوس غیر خطی*»، پایان‌نامه دکتری، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه اصفهان (۱۳۸۶).

2. J R Klauder and B S Skagerstam, "*Coherent States, Applications in Physics and Mathematical Physics Singapore*", World Scientific (1985).
3. S Twareqe Ali, J-P Antoine, and J-P Gazeau, "*Coherent States, Wavelets and Their Generalizations*", Springer-Verlag, New York, (2000).
4. P Deuar and P D Drummond, *Phys. Rev*. A **66** (2002) 033812.
5. C C Chong, D I Tsomokos, and A Vourdas, *Phys. Rev*. A **66** (2002) 033813.
6. R Roknizadeh and M K Tavassoly, *J. Phys*. A **37** (2004) 5649.
7. J-P Gazeau and J R Klauder, *J. Phys*. A **32** (1999) 123.
8. J-P Gazeau and P Monceau, "*Generalized Coherent States for Arbitrary Quantum Systems*", Klauer Academic Publishers, Printed in the Netherlands (2000)..
9. R Roknizadeh and M K Tavassoly, *J. Phys*. A **37**, (2004) 8111.
10. D Popov, *Phys. Lett*. A **316** (2003) 369.
11. J-P Antoine, J-P Gazeau, J R Klauder, P Monceau, and K A Penson, *J. Math. Phys*. **42** (2001) 2349.
12. A H El Kinani and M Daoud, *J. Math. Phys*. **35** (2001) 2279, *J. Phys*. A **34** (2001) 5373.
13. A H El Kinani and M Daoud, *Int. J. Mod. Phys*. B **16** (2002) 3915.
14. A H El Kinani and M Daoud, *Int. J. Mod. Phys*. B **15** (2003) 2465.
15. P W Higgs, *J. Phys*. A: *Math. Gen.* **12** (1979) 309.
16. A Mahdifar, R Roknizadeh and M H Naderi, *J. Phys.* A: *Math. Gen*. **39** (2006) 7003.
17. J P Gazeau and R Klauder, *J. Phys*. A: *Math. Gen*. **32** (1999).
18. R Roknizadeh, M K Tavassoly, J. *Math. Phys*. **46** (2005) 042110.
19. I S Gradshteyn, I M Ryzhik, *Table of Integrals and Series*, Academic Press (1980).
20. L Mandel and E Wolf, "*Optical Coherence and Quantum Optics*", Cambridge University Press, Cambridge (1995).
21. M O Scully and M S Zubairy, "*Quantum optics*", Cambridge University Press, Cambridge (1997).
22. G S Agarwal and K Tara, *Phys. Rev*. A **43** (1991) 429.
23. L Dello Sbarba and V Hussin, *J. Math. Phys*. **48** (2007) 012110.
24. G R Honarasa, M K Tavassoly, M Hatami and R Roknizadeh, Physica A **390** (2011) 1381.
25. L Mandel, *Opt. Lett*. **4** (1979) 205.
26. D T Pegg and S M Barnett, *Phys. Rev*. A **39** (1989) 1665.
27. G.R. Honarasa, M.K. Tavassoly, M. Hatami, Optics Communications 282 (2009) 2192.