مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ٤، شمارهٔ ٢، تابستان ١٣٨٣

محاسبه گشتاور وارد بر تیغه نازک بلور مایع نماتیک در میدان مغناطیسی قوی

محمد علی شاهزمانیان و مجید غفاری
گروه فیزیک - دانشگاه اصفهان

(دریافت مقاله: ۸۲/۵/۲۵ ؛ دریافت نسخه نهایی: ۸۲/۹/۱۴)

چکیده: در این مقاله معادلات هیدرودینامیک برای یک تیغه نازک بلور مایع نماتیک که به‌صورت یک نوسانگر پیچشی است برای میدانهای معناطیسی قوی نوشته شده و مؤلفه‌های سرعت مایع تا تقریب مرتبه اول و سپس گشتاور وارد بر تیغه محاسبه شده است. تغییرات بسامد تشدید نوسانگر در حضور بلور مایع نماتیک و پهنای خط آن ضمن آنکه گذار فردریکز را تأیید می‌کند خود راهی برای به دست آوردن برخی از کمیتهای فیزیکی مایع است.

واژه‌های کلیدی: بلور مایع نماتیک، گذار فاز، شرط مرزی سطحی، خواص مادی و مغناطیسی

۱. مقدمه

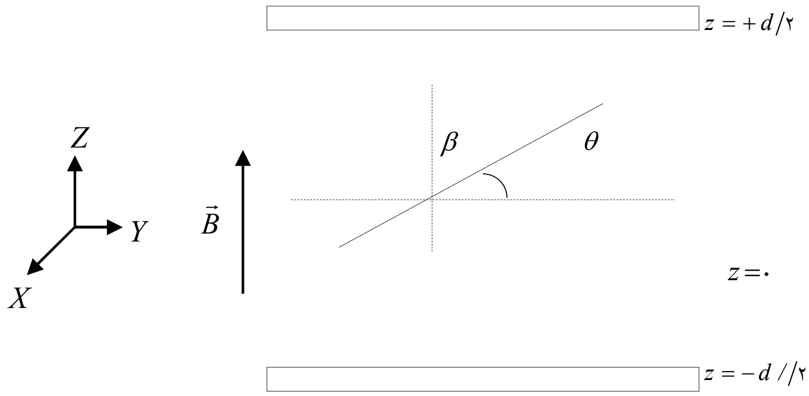
برای بلورهای مایع نماتیک، معمولا دو لایهٔ مرزی معروف به لایه مرزی هومیوتروپیک[۱] و مسطح[۲] مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در مورد لایهٔ مرزی هومیوتروپیک جهت آسان عمود بر صفحه سطح بلور مایع و در مورد لایه مرزی مسطح جهت آسان منطبق بر صفحه سطح بلور مایع می‌باشد. یک جهت مرجع که محور طولی مولکولها در هر ناحیه کوچکی از بلور مایع در امتداد آن صف‌بندی می‌کنند را برداری‌که جهتنمای $\vec{n}$ نامیده و آن جهتهایی از $\vec{n}$ که انرژی سطحی را کمینه می‌کند جهتهای آسان گویند، که این جهتها بستگی به طبیعت محیط خارجی بلور مایع دارند [۱و۲] .

یک تیغه نازک بلـور مایـع نماتیک را کـه، بـه صورت یک نوسانگر پیچشی در آمده است در نظـر مـی‌گیـریم. اگـر میـدان مغناطیس اعمال شده به تیغـه (B) از یـک مقـدار آسـتانه B_C تجاوز نماید، بردار جهتنما و به تبع آن، آرایش‌بندی ملکولهـا از مکانی به مکان دیگر تغییر و شدت تغییر آن تـابع B مـی‌باشـد [۳]. نوسانگر پیچشی که تیغه‌های آن حاوی بلور مایع نماتیـک است، یک جستجوگر برای تعیین‌گذار فردریکـز[۳] در بلـورهـای مایع می‌باشد. این نوسانگر تغییرات بسامد تشـدید آن را نسـبت به میدان مغناطیسی (یا الکتریکی) با دقت بسـیار خـوبی تعیـین می‌کند. مسئله در میـدانهای مغناطیسـی نزدیـک میـدان بحرانـی B_C نیز مورد مطالعه قرار گرفته که نتایج آن در جـای دیگـری به چاپ خواهد رسید[۳].

مسـئله در تـمام میدانهای مغـناطیـسی نیـاز به محاسـبات عددی پـیچـیده‌ای دارد کـه در دست انـجـام است.

این مسئله برای تعـیین برخـی از کمیتهای بلور مایـع توسـط دجو[۴] [۲] در یک استوانه دوار که حاوی بلور مایع می‌باشد مورد مطالعه قرار گرفته است. البته در این مطالعه بافت در بلور

---
۱. Homeotropic
۲. Planar
۳. Frederiks
۴. DeJeu



شکل ۱. تیغه نازک بلور مایع نماتیک در میدان مغناطیسی.

مایع در نظر گرفته نشده و مؤلفه‌های سرعت شاره با توجه به تقریبهای به کار برده شده به آسانی به دست آمده‌اند. انجام کارهای تجربی در این مورد و نوسانگر پیچشی مورد بحث می‌تواند در آینده کارآیی این وسایل را تأیید کند.

روش ما در این مقاله به‌این صورت می‌باشد که، در بخش دوم لایه مرزی مسطح و روش وردشی مورد مطالعه قرار گرفته به طوری که، در آن زاویه بافت نسبت به مکان تعیین شده و سپس معادلات ناویر- استوکس که تعیین‌کننده مؤلفه‌های سرعت υ_x ، υ_y و υ_z هستند به دست آمده‌اند، آن گاه تا تقریب مرتبه اول این سرعتها بر حسب مکان حساب شده‌اند. در بخش سوم گشتاور وارد بر تیغه محاسبه شده و سرانجام در بخش چهارم بحث و نتیجه‌گیری صورت گرفته است.

۲. لایه مرزی مسطح و روش وردشی

یک تیغه نازک بلور مایع نماتیک به ضخامت d به‌صورت یک نوسانگر پیچشی در یک میدان مغناطیسی $\vec{B}$ عمود بر تیغه‌های آن در نظر می گیریم (شکل ۱).

اگر میدان مغناطیسی را در راستای محور Z و زاویه بین سمت‌گیری موضعی جهتنما و صفحه XOY برابر $\theta(z)$ باشد داریم:

$$\vec{n}=(0,\cos\theta(z),\sin\theta(z))\,. \tag{1}$$

چگالی انرژی آزاد تیغه را می‌توان به‌صورت زیر نوشت[۱]:

$$\begin{aligned} f &= f_0+\frac{1}{2}[K_1(div\vec{n})^2+K_2(\vec{n}.curl\vec{n})^2 \\ &+K_3(\vec{n}\times curl\vec{n})^2]-\frac{1}{2}\frac{\chi_\alpha}{\mu_0}(\vec{n}.\vec{B})^2\,, \end{aligned} \tag{2}$$

که در آن f_0 ، چگالی انرژی آزاد راستای یکنواخت (بدون بافت) است، جملات داخل کروشه، چگالی انرژی آزاد بافت و جمله آخر مربوط به اثر میدان مغناطیسی می‌باشد. K_1، K_2 و K_3 نیز ثابتهای کشسانی هستند. با جایگذاری رابطه (۱) در معادله (۲) چگالی انرژی آزاد به صورت زیر خواهد شد [۱]:

$$f=f_0+\frac{1}{2}\left[(K_1\cos^2\theta+K_3\sin^2\theta)(\frac{d\theta}{dz})^2-\frac{\chi_\alpha}{\mu_0}B^2\sin^2\theta\right]. \tag{3}$$

با استفاده از معادله اویلر – لاگرانژ برای کمینه کردن چگالی انرژی آزاد و با توجه به شرایط مرزی که در $z=0$ ، θ مقدار بیشینه $\theta_{\max}$ مطابق با بیشترین واپیچش و در $z=\pm d/2$، θ کمترین مقدار $\theta_{\min}$ را دارد، خواهیم داشت:

$$(\frac{dz}{d\theta})^2=\frac{\mu_0}{B^2\chi_a}\frac{K_1+(K_3-K_1)\sin^2\theta}{\sin^2\theta_{\max}-\sin^2\theta}\,. \tag{4}$$

برای میدانهای نزدیک میدان بحرانی و در تقریب زوایای کوچک $(\sin\theta\cong\theta,\sin\theta_{\max}\cong\theta_{\max})$ و با

اعـــــمال تقـــــریب یــــک ثابـــــتی $K_1 = K_2 = K_3 = K$ داریـــم:

$$(\frac{dz}{d\theta}) = \frac{1}{B}\left[\frac{\mu_0}{\chi_a}\,\frac{K}{\theta_m^2 - \theta^2}\right]^{1/2} . \qquad (۵)$$

با انتگرال گیری از معادله فوق و اعمال شرایط مرزی میدان بحرانی B_C به‌دست می‌آید

$$B_C = \frac{\pi}{d}(\frac{\mu_0 K}{\chi_a})^{1/2} . \qquad (۶)$$

بنابراین برای میدانهای مغناطیسی کوچکتر از میدان بحرانی B_C در بلور مایع بافت نداریم. این گذار را به نام فردریکز که اولین بار آن را کشف کرد نامیده اند.

برای مورد حدی دیگر یعنی، میدانهای خارجی خیلی بزرگ‌تر از میدان بحرانی B_C که مورد علاقه و بررسی ما در این مقاله است، به علت آن که $\theta(z)$ مقدار بزرگی می‌باشد، از کمیت دیگری به نام $\beta(z)$ استفاده می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\beta(z) = \frac{\pi}{2} - \theta(z). \qquad (۷)$$

بنابراین در این مورد، β در مرکز تیغه کم‌ترین مقدار و در مرزها بیشترین مقدار ممکن را خواهد داشت و در کل، β مقدار کوچکی خواهد بود.

از رابطه های (۴) ، (۶) و (۷) خواهیم داشت:

$$\frac{dz}{d\beta} = \pm\frac{B_C d}{B\pi\sqrt{K_1}}[\frac{K_1 + (K_3 - K_1)\cos^2\beta}{\cos^2\beta_{\min} - \cos^2\beta}]^{1/2} . \qquad (۸)$$

در رابطه (۸)، علامت مثبت برای z های بزرگتر از صفر و علامت منفی برای z های کوچکتر از صفر می‌باشد. اکنـون بـا توجه به کوچک بودن β، از تقریب $\cos^2\beta \cong 1 - \beta^2$ اسـتفاده کـــرده و مـــی‌دانـــیم کـــه بـــرای میـــدانهای بـــزرگ داریم: $\cos^2\beta_{\min} \to 1$. بنابراین

$$\frac{dz}{d\beta} = \pm\frac{B_C d}{B\pi\sqrt{K_1}}[\frac{K_1 + (K_1 - K_3)\beta^2}{\beta^2}]^{1/2} . \qquad (۹)$$

اکنون از جمله $(K_1 - K_3)\beta^2$ در مقابل جمله K_1 به علت کوچک بودن صرف نظر کرده و خواهیم داشت:

$$\frac{dz}{d\beta} = \pm\frac{B_C d}{B\pi} Ln\beta + C_\pm , \qquad (۱۰)$$

که $C_\pm$ ثابت انتگرال بوده و برای محاسبه آن از این شرط که در $z = 0$، β کمترین مقدار را دارد $(\beta_{\min} = \beta_0)$، استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$C_\pm = \mp\frac{B_C d}{B\pi} Ln\beta_0 , \qquad (۱۱)$$

در نتیجه داریم:

$$\beta = \begin{cases} \beta_0 e^{+az} & z \geq 0 \\ \beta_0 e^{-az} & z \leq 0 \end{cases} , \qquad (۱۲)$$

که در آن a به صورت زیر تعریف می‌شود

$$a = \frac{B\pi}{B_C d} . \qquad (۱۳)$$

اکنون مؤلفه‌های میدان سرعت شاره را برای تیغه نازک بلور مایع که به صورت یک نوسانگر پیچشی در آمده است به دست می‌آوریم. برای تحقق این امر از معادلات پایستگی جرم و قانون دوم نیوتن استفاده کرده و فرض می‌کنیم که چگالی شارش در طی حرکت نوسانی ثابت بماند. بنابراین از پایستگی جرم نتیجه می‌شود که

$$\vec{\nabla}.(\rho\vec{\upsilon}) = -\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 . \qquad (۱۴)$$

معادله حرکت نیوتنی را در نظر می‌گیریم. برای حجم کوچکی از شاره داریم:

$$\rho\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{f} . \qquad (۱۵)$$

با استفاده از مشتق جزئی و کامل خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\upsilon}.\vec{\nabla} , \qquad (۱۶)$$

بنابراین

$$\rho\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t} + \rho(\vec{\upsilon}.\vec{\nabla})V = \vec{f} . \qquad (۱۷)$$

نیروی کل $\vec{f}$ که بر شاره وارد می‌شود شامل قسمتهای زیر می‌باشد:

الف) نیروهای هیدرودینامیکی که شامل نیروی ناشی از فشار، $-\vec{\nabla}p$ و نیروهای چسبندگی، $\vec{f}_{visc}$ است.

ب) نیروی مغناطیسی

ج) نیروهای گرانشی

همچنین چون دامنه نوسانات نوسانگر کوچک می‌باشد، از شرط هیدروستاتیکی روی فشار استفاده می‌کنیم. به عبارت دیگر در گذار فردریکز بین نیروهای مغناطیسی و نیروهای پیچشی یک رقابت وجود دارد و ما می‌توانیم تقریباً فشار را ثابت در نظر بگیریم [۱] .

بنابراین از معادله (۱۷) داریم:

$$\rho[(\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t}) + (\vec{\upsilon}.\vec{\nabla})\vec{\upsilon}] = \vec{f}_{visco} \; . \tag{۱۸}$$

چنانچه در معادله بالا نیروی چسبندگی را بر حسب تانسور تنش[۱] بنویسیم، داریم:

$$\rho\left[\frac{\partial \upsilon_\alpha}{\partial t} + \upsilon_\beta \frac{\partial \upsilon_\alpha}{\partial x_\beta}\right] = \frac{\partial \sigma_{\beta\alpha}}{\partial x_\beta} \; . \tag{۱۹}$$

عناصر این تانسور برای نماتیک تراکم ناپذیر، در حالت عام به صورت زیر می‌باشد [۲].

$$\begin{aligned}\sigma'_{\alpha\beta} &= \alpha_4 A_{\alpha\beta} + \alpha_1 n_\alpha n_\beta n_\mu n_\rho A_{\mu\rho} + \alpha_2 n_\alpha N_\beta \\ &+ \alpha_3 n_\beta N_\alpha + \alpha_5 n_\alpha n_\mu A_{\mu\beta} + \alpha_6 n_\beta n_\mu A_{\mu\alpha} \; ,\end{aligned} \tag{۲۰}$$

که در رابطه فوق $\alpha_i \, (i = 1,2,3,...,6)$ به ثابتهای لس‌لی[۲] معروفند و نیز داریم:

$$\alpha_6 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 \; , \tag{۲۱}$$

$$N_\alpha = \frac{dn_\alpha}{dt} - W_{\alpha\beta} n_\beta \; , \tag{۲۲}$$

$$A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \vec{\upsilon}_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \vec{\upsilon}_\alpha}{\partial x_\beta}) \; , \tag{۲۳}$$

$$W_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \upsilon_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \upsilon_\alpha}{\partial x_\beta}) \; . \tag{۲۴}$$

برای حل معادلات هیدرودینامیک بافت مسطح ، میدان سرعت شاره را به صورت زیر فرض می‌کنیم [۴]

$$\vec{\upsilon} = [\upsilon_x(y,z)\hat{i} + \upsilon_y(x,z)\hat{j} + \upsilon_z(x,z)\hat{k}]e^{i\omega t} \; . \tag{۲۵}$$

برای شاره تراکم ناپذیر با استفاده از معادله (۱۴) و رابطه (۲۵) داریم:

$$\vec{\nabla}.\vec{\upsilon} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{\partial \upsilon_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad , \quad \alpha \equiv x,y,z \; , \tag{۲۶}$$

در نتیجه میدان سرعت شاره چنین می‌شود:

$$\vec{\upsilon} = [\upsilon_x(y,z)\hat{i} + \upsilon_y(x,z)\hat{j} + \upsilon_z(x)\hat{k}]e^{i\omega t} \; . \tag{۲۷}$$

اکنون با توجه به این که $\vec{n} \equiv (0, \sin\beta(z), \cos\beta(z))$، و با قرار دادن رابطه (۲۷) و عناصر رابطه (۲۰) در معادله (۱۹)، معادلات زیر را برای بافت مسطح خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\rho i\omega.\upsilon_x + \rho\upsilon_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + \rho\upsilon_z \frac{\partial \upsilon_x}{\partial z} \\ &= \frac{1}{2}(\alpha_4 + (\alpha_3 + \alpha_5)\sin^2\beta)\frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y^2} \\ &+ \frac{1}{2}(\alpha_4 + (\alpha_2 + \alpha_5)\cos^2\beta)\frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial z^2} \\ &+ \frac{1}{4}(\alpha_2 + \alpha_5)\sin 2\beta \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y \partial z} + \frac{1}{4}(\alpha_5 - \alpha_2)\sin 2\beta \frac{\partial^2 \upsilon_y}{\partial z \partial x} \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial \cos^2\beta}{\partial z}[(\alpha_2 + \alpha_5)\frac{\partial \upsilon_x}{\partial z} + (\alpha_5 - \alpha_2)\frac{\partial \upsilon_z}{\partial x}] \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial \sin 2\beta}{\partial z}[(\alpha_5 + \alpha_2)\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + (\alpha_5 - \alpha_2)\frac{\partial \upsilon_y}{\partial x}] \; ,\end{aligned} \tag{۲۸}$$

$$\begin{aligned}&\rho i\omega.\upsilon_y + \rho\upsilon_x \frac{\partial \upsilon_y}{\partial x} + \rho\upsilon_z \frac{\partial \upsilon_y}{\partial z} = \\ &\frac{1}{2}(\alpha_4 + (\alpha_2 + \alpha_5)\sin^2\beta)\frac{\partial^2 \upsilon_y}{\partial x^2} \\ &+ \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6 + \frac{\alpha_1}{2}\sin^2 2\beta)\frac{\partial^2 \upsilon_y}{\partial z^2} \\ &+ \frac{1}{4}(\alpha_2 + \alpha_5)\sin 2\beta \frac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\alpha_1}{4}\frac{\partial(\sin^2 2\beta)}{\partial z}\frac{\partial \upsilon_y}{\partial z} \; ,\end{aligned} \tag{۲۹}$$

$$\begin{aligned}&\rho i\omega.\upsilon_z + \rho\upsilon_x \frac{\partial \upsilon_z}{\partial x} = \\ &\frac{1}{2}(\alpha_4 + (\alpha_2 + \alpha_5)\cos^2\beta)\frac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial x^2} + \frac{1}{4}(\alpha_2 + \alpha_5)\sin 2\beta \frac{\partial^2 \upsilon_y}{\partial x^2} \\ &+ \frac{[(\alpha_1\cos^2\beta + \alpha_5)\sin 2\beta]}{2}\frac{\partial^2 \upsilon_y}{\partial z^2} \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial[(\alpha_1\cos^2\beta + \alpha_5)\sin 2\beta]}{\partial z}\frac{\partial \upsilon_y}{\partial z} \; .\end{aligned} \tag{۳۰}$$

---

۱. Stress

۲. Leslie

برای حل سه معادله فوق با توجه به ساختار میدانی سرعت شاره (۲۷)، تقارن مسئله و ارائه راه حلهای مختلف و رفع تناقضهای بوجود آمده در پاسخها به این نتیجه رسیدیم که مؤلفه y سرعت، $\upsilon_y(x,z)$ ، را برابر صفر فرض کنیم. بنابراین دو معادله (۲۹) و (۳۰) را دوباره بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{1}{4}(\alpha_2+\alpha_5)\sin 2\beta \frac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial x^2}=0 \ , \tag{۳۱}$$

$$\rho i\omega_. \upsilon_z + \rho\upsilon_x \frac{\partial \upsilon_z}{\partial x} = \frac{1}{2}(\alpha_4+(\alpha_2+\alpha_5)\cos^2\beta)\frac{\partial^2\upsilon_z}{\partial x^2} \ . \tag{۳۲}$$

از معادله (۳۱) چنین نتیجه می‌شود که، $\upsilon_z(x)$ حداکثر می‌تواند تابع درجه اولی از متغییر x باشد. با توجه به این نتیجه، معادله (۳۲) را به صورت زیر باز نویسی می‌کنیم

$$i\omega_. \upsilon_z(x) = -\upsilon_x(y,z) \ . \tag{۳۳}$$

طرف چپ معادله (۳۳) تابعی است از x در صورتی که طرف راست همین معادله تابعی است از y و z. برای رفع این تناقض می‌بایست υ_z دارای مقدار ثابتی باشد. فرض می‌کنیم که این مقدار ثابت برابر $C_.$ باشد، با جای گذاری $\upsilon_z = C_.$ در معا دله (۳۲) داریم:

$$\upsilon_z(x) = C_. = 0 \qquad \text{یا} \qquad \rho i\omega_. C_. = 0 \ . \tag{۳۴}$$

همان طور که قبلاً بیان شد، شکلبندی مسئله به صورتی است که بلور مایع نماتیک در قالب دو تیغه موازی به ضخامت d، در حال نوسان پیچشی است. بر مبنای این فرضیه و تقارن مسئله، مؤلفه $\upsilon_x(y,z)$ میدان سرعت را می توان چنین بسط داد:

$$\upsilon_x(y,z) = \sum_{n=0}^{n=\infty}\upsilon_{nx}(y,z)\beta_.^n \ . \tag{۳۵}$$

اکنون با توجه به این که β کوچک می‌باشد، برای زوایای کوچک، رابطه (۳۵) را در معادله (۲۸) جایگذاری نموده و تا تقریب مرتبه اول $\beta_.$ معادله به دست آمده را حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
\rho i\omega_. \sum_{n=0}^{n=\infty}\upsilon_{nx}\beta_.^n = \ & \frac{1}{2}(\alpha_4+(\alpha_2+\alpha_5)\beta^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\sum_{n=0}^{n=\infty}\upsilon_{nx}\beta_.^n \\
& +\frac{1}{2}[(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5) \\
& -(\alpha_2+\alpha_5)\beta^2]\frac{\partial^2}{\partial z^2}\sum_{n=0}^{n=\infty}\upsilon_{nx}\beta_.^n \\
& +\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_5)\beta\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\sum_{n=0}^{n=\infty}\upsilon_{nx}\beta_.^n \\
& -\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_5)\frac{\partial\beta^2}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\sum_{n=0}^{n=\infty}\upsilon_{nx}\beta_.^n \\
& +(\alpha_2+\alpha_5)\frac{\partial\beta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\sum_{n=0}^{n=\infty}\upsilon_{nx}\beta_.^n \ .
\end{aligned} \tag{۳۶}$$

الف) تقریب مرتبه صفرم

معادله مربوط به تقریب مرتبه صفرم معادله (۳۶)، به صورت زیر می‌باشد.

$$\rho i\omega_. \upsilon_{.x} = \frac{\alpha_4}{2}\frac{\partial^2\upsilon_{.x}}{\partial y^2}+\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)\frac{\partial^2\upsilon_{.x}}{\partial z^2} \tag{۳۷}$$

$(z \geq 0 \ \text{و} \ z \leq 0).$

برای حل معادله (۳۷) فرض می‌کنیم، $\upsilon_{.x}(y,z) = f_.(y)g_.(z)$ ، که با توجه به شرط مرزی، $f_.(y)$ برابر y می‌باشد. (شرط مرزی این است که در $z=\pm d/2$ ، سرعت شاره برابر است با: $r\omega\hat{\phi} = -\omega y\hat{i}+\omega x\hat{j}$) بنابراین

$$\frac{d^2 g_.(z)}{dz^2} - \gamma^2 g_.(z) = 0 \ , \tag{۳۸}$$

که در معادله (۳۸)، γ^2 برابر است با:

$$\gamma^2 = \frac{2\rho i\omega_.}{\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5} \ . \tag{۳۹}$$

جواب معادله (۳۸) برابر است با:

$$g_.(z) = A\sinh(\gamma z) + B\cosh(\gamma z) \ , \tag{۴۰}$$

که در آن A و B ثابتهایی هستند که با در نظر گرفتن شرط مرزی تعیین می‌شوند و برابرند با:

$$A=0 \qquad \text{و} \qquad B=-\frac{\omega y}{\cosh(\gamma d/2)} \qquad (۴۱)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\upsilon_{0x}(y,z)=f_0(y)g_0(z)=-\frac{\omega y}{\cosh(\gamma d/2)}\cosh(\gamma z)\ . \qquad (۴۲)$$

ب) تقریب مرتبهٔ اول

معادلات مربوط به تقریب مرتبه اول معادله (۳۶) به صورت زیر می‌باشند.

$$\rho i\omega.\upsilon_{1x}=\frac{\alpha_4}{2}\frac{\partial^2\upsilon_{1x}}{\partial y^2}+\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)\frac{\partial^2\upsilon_{1x}}{\partial z^2}$$
$$+\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_5)e^{az}\frac{\partial^2\upsilon_{0x}}{\partial y\partial z}+a(\alpha_2+\alpha_5)e^{az}\frac{\partial\upsilon_{0x}}{\partial y}\ , \qquad (۴۳)$$
$$(z\ge 0)$$

$$\rho i\omega.\upsilon_{1x}=\frac{\alpha_4}{2}\frac{\partial^2\upsilon_{1x}}{\partial y^2}+\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)\frac{\partial^2\upsilon_{1x}}{\partial z^2}$$
$$+\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_5)e^{-az}\frac{\partial^2\upsilon_{0x}}{\partial y\partial z}-a(\alpha_2+\alpha_5)e^{-az}\frac{\partial\upsilon_{0x}}{\partial y}\ . \qquad (۴۴)$$
$$(z\le 0)$$

اکنون رابطه (۴۲) را در معادله‌های (۴۳) و (۴۴) جایگذاری کرده و با توجه به این که مؤلفهٔ $\upsilon_{1x}(y,z)$، حداکثر می‌تواند تابع درجه اولی از متغییر y باشد، خواهیم داشت:

$$\frac{d^2\upsilon_{1x}}{dz^2}-\gamma^2\upsilon_{1x}$$
$$-\frac{(\alpha_2+\alpha_5)\omega}{(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)\cosh(\gamma d/2)}[\gamma\sinh(\gamma z) \qquad (۴۵)$$
$$+2a\cosh(\gamma z)]e^{az}=0\ ,$$
$$z\ge 0$$

$$\frac{d^2\upsilon_{1x}}{dz^2}-\gamma^2\upsilon_{1x}-\frac{(\alpha_2+\alpha_5)\omega}{(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)\cosh(\gamma d/2)} \qquad (۴۶)$$
$$[\gamma\sinh(\gamma z)-2a\cosh(\gamma z)]e^{-az}=0,$$
$$z\le 0$$

جواب کلی دو معادله (۴۵) و (۴۶) به صورت زیر می‌باشند:

$$\upsilon_{1x}(y,z)=C_1e^{-\gamma z}+C_2e^{\gamma z}$$
$$-\frac{(\alpha_2+\alpha_5)\omega\,\mathrm{sech}(\gamma d/2)[2(a^2-\gamma^2)-3a\gamma\sinh(\gamma z)]e^{-az}}{a(a^2-4\gamma^2)(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)},$$
$$z\ge 0 \qquad (۴۷)$$

$$\upsilon_{1x}(y,z)=C_3e^{-\gamma z}+C_4e^{\gamma z}$$
$$-\frac{(\alpha_2+\alpha_5)\omega\,\mathrm{sech}(\gamma d/2)[2(a^2-\gamma^2)+3a\gamma\sinh(\gamma z)]e^{-az}}{a(a^2-4\gamma^2)(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)}$$
$$z\le 0 \qquad (۴۸)$$

جواب حدی دو معادله (۴۷) و (۴۸) به‌صورت زیر می‌باشد (برای بلور مایع نماتیک $MBBA$، $d\gamma\cong10^{-3}$ و $z\gamma\cong10^{-3}$، $d\cong10^{-6}$، $z\cong10^{-6}$). بنابراین

$$\upsilon_{1x}(y,z)=C_{1,2}-\frac{(\alpha_2+\alpha_5)\omega(2a^2-3a\gamma^2z)e^{az}}{a^3(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)}\ ,\quad z\ge 0 \qquad (۴۹)$$

$$\upsilon_{1x}(y,z)=C_{3,4}-\frac{(\alpha_2+\alpha_5)\omega(2a^2+3a\gamma^2z)e^{-az}}{a^3(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)}\ ,\quad z\le 0 \qquad (۵۰)$$

در معادلات فوق $C_{1,2}=C_1+C_2$ و $C_{3,4}=C_3+C_4$ ، که با توجه به شرط مرزی به دست می‌آیند. بنابراین

$$\upsilon_{1x}(y,z)=-\omega y$$
$$-\frac{(\alpha_2+\alpha_5)\omega}{a^3(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)}[(2a^2-3a\gamma^2z)e^{az} \qquad (۵۱)$$
$$+(-2a^2+3ad\gamma^2/2)e^{ad/2}]\ ,\ z\ge 0$$

$$\upsilon_{1x}(y,z)=-\omega y$$
$$-\frac{(\alpha_2+\alpha_5)\omega}{a^3(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)}[(2a^2+3a\gamma^2z)e^{-az} \qquad (۵۲)$$
$$+(-2a^2+3ad\gamma^2/2)e^{ad/2}]\ .\ z\le 0$$

با توجه به نیازی که به این مولفه‌های سرعت برای محاسبه گشتاور خواهیم داشت، در این جا این سه مؤلفه را به‌طور مجزا بازنویسی می‌کنیم.

$$\upsilon_x(y,z)=-\frac{\omega y}{\cosh(\gamma d/2)}\cosh(\gamma z)-\omega y\beta.$$
$$-\frac{(\alpha_2+\alpha_5)\omega}{a^3(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)}[(2a^2-3a\gamma^2z)e^{az} \qquad (۵۳)$$
$$+(-2a^2+3ad\gamma^2/2)e^{ad/2}]\beta.\ ,$$
$$z\ge 0$$

$$\upsilon_x(y,z) = -\frac{\omega y}{\cosh(\gamma d/2)}\cosh(\gamma z) - \omega y \beta_0$$
$$-\frac{(\alpha_2+\alpha_5)\omega}{a^3(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)}[(2a^2+3a\gamma^2 z)e^{-az}$$
$$+(-2a^2+3ad\gamma^2/2)e^{ad/2}]\beta_0 \quad , z \le 0 \tag{۵۴}$$

$$\upsilon_y(x,z) = 0 \qquad z \ge 0 \text{ و } z \le 0 \tag{۵۵}$$

$$\upsilon_z(x) = 0 \qquad z \ge 0 \text{ و } z \le 0 \tag{۵۶}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود در این نوسانگر پیچشی، جریانهای شعاعی به درون و برون مرکز تیغه و مماسی (حلقوی) به ازای هر مقدار z وجود دارند. این جریانها کاملاً در صفحه‌هایی به موازات صفحه نوسانگر پیچشی بوده و تابعی از کمیتهای خارجی B، d و ω می‌باشند. مشخصات بلور مایع در کمیتهای β_0، B_C و α_i خود را نشان می‌دهند.

۳. محاسبه گشتاور وارد بر تیغه

گشتاور وارد بر تیغه نازک بلور مایع که به صورت نوسانگر پیچشی در آمده است در میدان مغناطیسی عمود بر صفحات آن از رابطه زیر تبعیت می‌کند

$$\Gamma_z = \rho \frac{d}{dt}\int (x\upsilon_y - y\upsilon_x)\, d^3x \,. \tag{۵۷}$$

تغییرات گشتاور اعمال شده در دو مورد $B \rangle B_C$ ، $(\Gamma_z(\pi/2))$ و $B \le B_C$ ، $(\Gamma_z(\beta))$ را با $\Delta\Gamma_z$ نشان داده و برابر است با:

$$\Delta\Gamma_z(\beta) = \Gamma_z(\beta) - \Gamma_z(\pi/2) \,, \tag{۵۸}$$

که در آن برای میدانهای $B \le B_C$، $\Delta\Gamma_z = 0$ می‌باشد.

با توجه به رابطه‌های (۵۳) تا (۵۸) داریم:

$$\Gamma_{1z} = \frac{\rho\pi a_0^4}{4}\frac{d\omega}{dt}[\frac{\tanh(\gamma d/2)}{\gamma} + (d/2)\beta_0] \,, \qquad z \ge 0 \tag{۵۹}$$

$$\Gamma_{2z} = \frac{\rho\pi a_0^4}{4}\frac{d\omega}{dt}[\frac{\tanh(\gamma d/2)}{\gamma} + (d/2)\beta_0] \,, \qquad z \le 0 \tag{۶۰}$$

در نتیجه،

$$\Gamma_z = \Gamma_{1z} + \Gamma_{2z} = \frac{\rho\pi a_0^4}{4}\frac{d\omega}{dt}[\frac{2\tanh(\gamma d/2)}{\gamma} + d\beta_0] \,, \tag{۶۱}$$

و

$$\Delta\Gamma_z = \frac{\rho\pi d a_0^4}{4}\frac{d\omega}{dt}\beta_0 \,. \tag{۶۲}$$

$\Delta\Gamma_z$ را می توان بر حسب کمیتهای بدون بعد Δf_1 و Δf_2 به صورت زیر نوشت [۵]:

$$\Delta\Gamma_z = \rho\pi d a_0^4 \frac{d\omega}{dt}[\Delta f_1 + i\Delta f_2] \,. \tag{۶۳}$$

از مقایسه دو رابطه (۶۲)و (۶۳) مشاهده می‌شود که، $\Delta f_1 = \frac{\beta_0}{4}$ و $\Delta f_2 = 0$.

۴. بحث و نتیجه‌گیری

ما در این مقاله معادلات هیدرودینامیک حاکم بر بلور مایع نماتیک محبوس در یک تیغه به ضخامت d، در میدان مغناطیسی عمود بر صفحات آن را برای نمونه بافت‌دار مسطح حل نموده و سپس مؤلفه‌های میدان سرعت را تا تقریب مرتبه اول β_0 به دست آوریم.

آن‌گاه گشتاور یا Δf_1 و Δf_2 را برای بلور مایع نماتیک $MBBA$ به دست آورده و مشاهده شد که Δf_1، متناسب با تغییر بسامد تشدید و Δf_2، متناسب با پهنای باند تشدید دارای مقادیر زیر هستند.

$$\Delta f_1 = \frac{\beta_0}{4} \quad , \quad \Delta f_2 = 0 . \tag{۶۴}$$

بنابراین بسامد تشدید نوسانگر حاوی بلور مایع نماتیک توسط رابطه زیر داده می‌شود.

$$\nu_R = \nu_0 - \frac{\pi\nu_0 \rho a_0^4 d}{4I}(\frac{\beta_0}{4}) \quad , \tag{۶۵}$$

که در آن $\nu_0 = \frac{1}{2\pi}(\frac{C}{I})^{1/2}$، بسامد تشدید تیغه خالی و I ممان اینرسی نوسان گر خالی و C ثابت پیچش می‌باشند.

همان طور که مشاهده می‌شود در میدان‌های مغناطیسی قوی تغییرات پهنای خط صفر و تغییرات بسامد تشدید نسبت به بلور بدون بافت کوچک است. این نتیجه می‌تواند علاوه بر تعیین مقدار β_0 توسط اندازه گیری تغییرات بسامد تشدید و تابعیت آن نسبت به میدان مغناطیسی، در حل عددی مسئله در تمام میدان‌ها نیز کمک شایانی را انجام دهد. همچنین با معلوم

بودن β. می توان از رابطه (۱۲) مقادیر β و یا $\theta(z)$ را بر حسب میدان مغناطیسی یا ضخامت تیغه تعیین کرد.

تعیین شکل خطوط NMR بلور مایع محبوس در تیغه [۶] و پهنای خط آن نیاز به تـابع توزیـع چگـالی دارد، کـه آن هـم بستگی به θ. و θ_m پیدا می‌کند. با تلفیق این دو نتیجه می‌توان علاوه بر تأیید نظریه مربوط به خطوط NMR، برخی از کمیات بلور مایع را به صورت نظری محاسبه کرد.

مراجع

1. P G De Gennes and J Prost The Physics of Liquid Crystals, 2nd ed, (*Oxford University Press*, 1993).
2. W H de Jeu, Physical Properties of Liquid Crystalline Materials (*Gordon and Breach* , 1980).
3. M A Shahzamanian and M Ghafari , To be appeared in *J. Molecular Crystals and Liquid Crystals*, (2004) 414.
4. M A Shahzamanian , *J. Phys: Condens . Matter* (1995) 6833 .
5. J R Hook , *Phys Rev Lett* ***37*** (1988) 954.
6. M A Shahzamanian and Babaei, *MSM 99 B*, (*World Scientific* 1999).