

## محاسبه انحنای اسکالر در مدل اسپینی مختلط چهارحالتی و بررسی رفتار آن

طهماسب مردانی<sup>۱</sup> و بهروز میرزا<sup>۲</sup>

۱. دانشگاه پیام نور شهرکرد

۲. دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان،

پست الکترونیکی: b.mirza@cc.iut.ac.ir

(دریافت مقاله: ۸۳/۷/۱۸ ؛ دریافت نسخه نهایی: ۸۴/۱/۲۷)

### چکیده

در مدل‌های مختلف مکانیک آماری تعریف یک متریک بر روی فضای پارامترها باعث نگرش جدیدی به ساختار فاز نظریه می‌شود. در این مقاله انحنای اسکالر  $R$  مربوط به این متریک برای مدل اسپین مختلط چهار حالتی حساب شده است. نشان داده شده است که انحنای اسکالر در این مدل رفتار مشابهی با مدل‌های ایزینگ و پاتس دارد.

واژه‌های کلیدی: انحنای اسکالر، گذار فاز، مدل‌های اسپینی

### ۱. مقدمه‌ای بر مدل انحنای اسکالر

با نمایش متغیرهای مکانیک آماری مانند دما و میدان مغناطیسی به صورت  $(\theta_1, \theta_2) = (\beta, h)$ ، تابع انحنای اسکالر توسط عبارت زیر محاسبه می‌شود [۱، ۲]:

$$R = -\frac{1}{2G^2} \begin{vmatrix} \partial_\beta^2 f & \partial_\beta \partial_h f & \partial_h^2 f \\ \partial_\beta^2 f & \partial_\beta^2 \partial_h f & \partial_\beta \partial_h^2 f \\ \partial_\beta^2 \partial_h f & \partial_\beta \partial_h^2 f & \partial_h^3 f \end{vmatrix}, \quad (1)$$

که در آن  $f$  انرژی آزاد کاهش یافته بر هر جایگاه و  $\partial_i = \partial / \partial \theta^i$  است. مقدار  $G$  نیز مطابق با رابطه زیر تعریف می‌شود [۱-۴]:

$$G = \det(G_{ij}), \quad G_{ij} = -\partial_i \partial_j f. \quad (2)$$

تنها کمیتی که در نزدیکی نقطه بحرانی، یک گذار مرتبه - بالا را توصیف می‌کند طول همبستگی  $\xi$  است. انحنای اسکالر مطابق با  $R \sim \xi^{-d}$  به این کمیت وابسته می‌شود که در آن  $d$  تعداد

ابعاد سیستم است. اگر فرض کنیم که رابطه ابرمقیاسی

$$\nu d = 2 - \alpha \quad \text{برقرار باشد آنگاه خواهیم داشت [۳ و ۲]:}$$

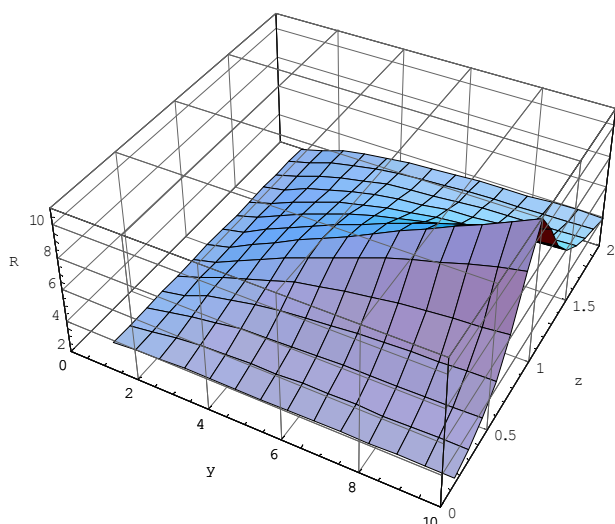
$$R \sim |\xi|^{(2-\alpha)/\nu}. \quad (3)$$

برای بررسی رفتار  $R$  یک مدل حل پذیر را در نظر می‌گیریم. مدل ایزینگ یک بعدی دارای چنین ویژگی است. انحنای اسکالری که مطابق با عبارت (۱) برای این مدل به دست می‌آید چنین است [۵]:

$$R_I = 1 + \frac{\cosh h}{\sqrt{\sinh^2 h + e^{-4\beta}}}, \quad (4)$$

در این مورد  $R_I$  یک مقدار مثبت است و تنها در دما و میدان صفر (نقطه بحرانی) واگرا می‌شود. طول همبستگی توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$\xi^{-1} = -\ln(\tanh \beta). \quad (5)$$



شکل ۱. انحنای اسکالر برای مدل آیزینگ یک بعدی. با دقت در این شکل مقدار بیشینه  $R$  در امتداد خط  $z=1$  واقع است.

یک بعدی تعریف می‌شود:

$$\xi^{-1} = -\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right), \quad (11)$$

که در آن ویژه مقادیر ماتریس انتقال مدل پاتس یک بعدی به صورت زیر هستند:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} (y(1+z) + q - 2 \pm \sqrt{(y(1-z) + q - 2)^2 + (q-1)^2 z}) (yz)^{-\frac{1}{q}}. \quad (12)$$

برای  $z=1$  و در  $y \rightarrow \infty$  داریم  $y \sim \xi$ . بنابراین دوباره مقدار انتظاری مقیاس بندی شده  $R$  را برای مدل پاتس یک بعدی مطابق با  $R \sim y$  در  $y \rightarrow \infty$  می‌یابیم. نماها نیز مشابه با مدل آیزینگ یک بعدی به صورت  $\alpha=1, \nu=1$  هستند.

مشاهده تغییرات  $R$  به صورت توابعی از  $y$  و  $z$  در رویه‌های سه بعدی برای درک بهتر مطلب مفید است. در شکل ۱ طرح تابع  $R$  برای مدل آیزینگ ( $q=2$ ) ترسیم شده است. تقارن  $\pm h$  مدل آیزینگ با تبدیل  $z \rightarrow \sqrt{z}$  در نمودار  $R$ ، واضح است. در کل می‌توان دید که در این مدل  $R$  برای همه  $y$ ها و  $z$ ها مثبت است. مقدار بیشینه  $R$  برای یک مقدار  $y$  داده شده در امتداد یک خط میدان و در  $z=1$  قرار دارد.

در نزدیکی نقطه بحرانی  $\xi \sim e^{\nu\beta}$  و در مقایسه با رابطه (۳) مطابق با مقادیر  $\alpha=1, \nu=1$  است که با انتظار ما برای این نماها مطابقت دارد.

انحنای اسکالر برای مدل پاتس یک بعدی توسط رابطه (۴) به صورت زیر محاسبه می‌شود [۵]:

$$R_{Potts} = A(q, y, z) + \frac{B(q, y, z)}{\sqrt{\eta(q, y, z)}}, \quad (6)$$

که در آن  $y = \exp(\beta)$  و  $z = \exp(h)$  است. در رابطه بالا عبارات  $B, A$  به شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned} A(q, y, z) &= \frac{\alpha(q, y, z)}{\gamma(q, y, z)^2}, \\ B(q, y, z) &= \frac{\beta(q, y, z)}{\gamma(q, y, z)^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

این عبارتها نسبت به  $y$  و  $z$  توابعی با تغییرات آرام بوده و در دما و میدان محدود (فیزیکی) واگرا نمی‌شوند. مقدار  $\eta$  توسط تابع زیر محاسبه می‌گردد:

$$\eta(q, y, z) = (y(1-z) + q - 2)^2 + (q-1)^2 z. \quad (8)$$

به طور کلی عبارتهای  $\alpha(q, y, z)$  و  $\beta(q, y, z)$  برای مقادیر مختلف  $q$  خیلی طولانی هستند (اما به دست آوردن آنها کار ساده‌ای است).

به ازای  $q=2$  رابطه (۶) به رابطه زیر تبدیل می‌گردد که این همان رابطه (۴) برای مدل آیزینگ است:

$$R_I = 1 + \frac{y(1+z)}{\sqrt{y^2 - 2y^2z + y^2z^2 + 2z}}. \quad (9)$$

در میدان صفر  $z=1$  عبارت  $R$  برای مدل پاتس یک بعدی به شکل بسیار فشرده تری به دست می‌آید:

$$R = \frac{(y+q-1)(4q^2 + (q-2)y - (q-2)(q-1))}{(q-1)(2y+q-2)^2}, \quad (10)$$

مشاهده می‌شود که با تغییر  $y$  از ۱ تا  $\infty$ ، مقدار  $R$  از  $(q-1)/(q-1)$  تا  $\infty$  تغییر می‌کند. به طور کلی شکل هندسی  $R$  که تابعی از  $y$  و  $z$  است یکسان می‌باشد. طول همبستگی برای مدل پاتس یک بعدی همانند مشابه‌اش در مدل آیزینگ

حال می‌توان هر یک از جملات فوق را به‌عنوان عناصر ماتریس انتقال در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} Z_N &= \sum_{S_1} \cdots \sum_{S_N} T_{S_1 S_2} T_{S_2 S_3} \cdots T_{S_{N-1} S_N} \\ &= \sum_{S_1} \cdots \sum_{S_N} T_{12} T_{23} \cdots T_{N1} \\ &= \sum_{S_1} T_{11}^N \\ &= \text{tr } T^N \end{aligned} \quad (18)$$

که در آن شکل عمومی عناصر ماتریس انتقال چنین است:

$$T_{ij} = e^{(\beta+\alpha)S_i S_j^* + (\beta-\alpha)S_j S_i^*} \quad (19)$$

به‌دلیل اینکه هر کدام از  $S_i$  ها می‌توانند  $q$  مقدار داشته باشند، لذا ماتریس فوق،  $q \times q$  بعدی است. به‌عنوان مثال برای  $q=4$  این ماتریس عبارت است از:

$$\begin{pmatrix} e^{2\beta} & e^{-2i\alpha} & e^{-2\beta} & e^{2i\alpha} \\ e^{2i\alpha} & e^{2\beta} & e^{-2i\alpha} & e^{-2\beta} \\ e^{-2\beta} & e^{2i\alpha} & e^{2\beta} & e^{-2i\alpha} \\ e^{-2i\alpha} & e^{-2\beta} & e^{2i\alpha} & e^{2\beta} \end{pmatrix} \quad (20)$$

ویژه مقادیر این ماتریس به قرار زیرند:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2(\cosh 2\beta - \cos 2\alpha) \\ \lambda_2 &= 2(\cosh 2\beta + \cos 2\alpha) \\ \lambda_3 &= 2(\sinh 2\beta - \sin 2\alpha) \\ \lambda_4 &= 2(\sinh 2\beta + \sin 2\alpha) \end{aligned} \quad (21)$$

اگر ویژه مقدار بیشینه در بین عبارات بالا مشخص شود آنگاه می‌توان انرژی آزاد کاهش یافته بر هر جایگاه را محاسبه نمود. برای این منظور، مسئله را به صورت عددی حل می‌نماییم. می‌توان برای یک مقدار  $\beta$  و تغییر پارامتر دیگر یعنی  $\alpha$  این کار را انجام داد. در شکل‌های ۲ و ۳ به ازای مقادیر ثابت  $\beta$  گذار فاز مدل مختلط را مشاهده می‌کنیم. با دقت در این منحنیها و عدم وجود مشتق مرتبه اول در جایی که دو قله از منحنی مجزا می‌شوند ویژه مقدار بیشینه محاسبه می‌گردد. عدم وجود مشتق در این تیزی‌ها به مفهوم گذار فاز مرتبه اول می‌باشد. بعد از محاسبه ویژه مقدار بیشینه انحنای اسکالر محاسبه می‌شود.

$$f = -kT \ln \lambda_{\max} \quad (22)$$

## ۲. مدل اسپینی مختلط یک بعدی

هامیلتونی کلی این مدل، به صورت زیر نوشته می‌شود [۶]:

$$-KH = \beta(S_i S_j^* + S_j S_i^*) + \alpha(S_i S_j^* - S_j S_i^*) \quad (14)$$

که در آن  $K = J/kT$  و  $\alpha$  و  $\beta$  دو ثابت هستند. مقادیر اسپینها چنین است:

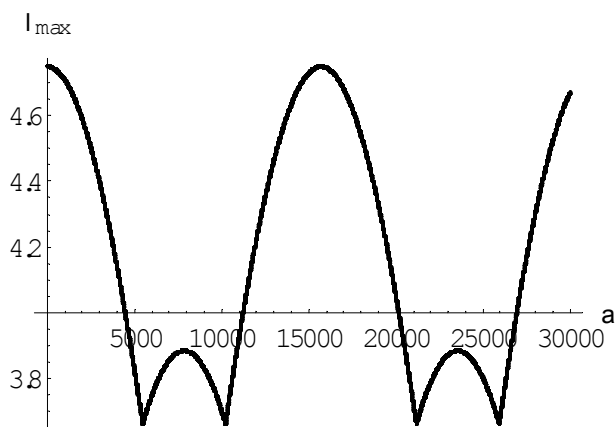
$$S_n = e^{\frac{2\pi i n}{q}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, q-1 \quad (15)$$

به عبارت دیگر اسپینها به جای دو مقدار  $\pm 1$  آیزینگ،  $q$  حالت را اختیار می‌کنند. در حالت خاص  $q=2$  مقادیر اسپین آیزینگ به‌دست می‌آیند. بنابر قضیه پرون-فروبنیوس سیستمهای یک بعدی گذار فازی نشان نمی‌دهند اما این مدل به‌دلیل مختلط بودن از این قضیه پیروی نمی‌کند و با وجود یک بعدی بودن دارای گذار فاز مرتبه اول است [۶، ۷]. مدل مختلط دارای کاربردهای متفاوتی بوده است. اینگونه کنشها در نظریه‌های پیمانه‌ای شبکه‌ای به‌عنوان کنش چرن شناخته شده و بطور موثر جانشین کنش فرمیونها در نظریه‌های پیمانه‌ای می‌شود [۸]. مدل مختلط اسپینی در محاسبات مربوط به گرانش دوبعدی و جفت شدگی اسپینها و سطوح تصادفی و تعیین نماهای بحرانی این مدلها به‌عنوان یک نظریه حل پذیر موجب پیشرفت بوده است [۶]. در این حالات ابتدا زنجیره‌ای شامل  $N$  اسپین را با شرط مرزی دوره‌ای  $S_{N+1} \equiv S_1$  در نظر می‌گیریم. تابع پارش کلی چنین نوشته می‌شود:

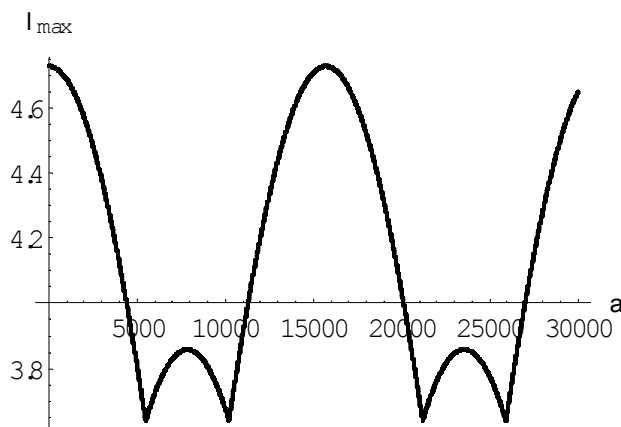
$$Z_N = \sum_{\{S\}} e^{\left\{ \sum_{i,j} \beta(S_i S_j^* + S_j S_i^*) + \alpha(S_i S_j^* - S_j S_i^*) \right\}} \quad (16)$$

با در نظر گرفتن نزدیکترین همسایه‌ها خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Z_N &= \sum_{S_1=0}^{q-1} \cdots \sum_{S_N=0}^{q-1} \exp \beta \{ (S_1 S_2^* + S_2 S_1^* + S_2 S_3^* + S_3 S_2^* + \cdots + S_N S_1^* + S_1 S_N^*) + \\ &\quad \alpha (S_1 S_2^* - S_2 S_1^* + S_2 S_3^* - S_3 S_2^* + \cdots + S_N S_1^* - S_1 S_N^*) \} \\ &= \sum_{S_1=0}^{q-1} \cdots \sum_{S_N=0}^{q-1} \exp \{ (\beta + \alpha) S_1 S_2^* + (\beta - \alpha) S_2 S_1^* \} \cdots \\ &\quad \exp \{ (\beta + \alpha) S_N S_1^* + (\beta - \alpha) S_1 S_N^* \} \end{aligned} \quad (17)$$



شکل ۳. منحنی ویژه مقدار بیشینه، برای شبکه مختلط یک بعدی به ازای  $\beta = 0.43$  و  $q = 4$ .



شکل ۲. منحنی ویژه مقدار بیشینه، برای شبکه مختلط یک بعدی به ازای  $\beta = 0.415$  و  $q = 4$ .

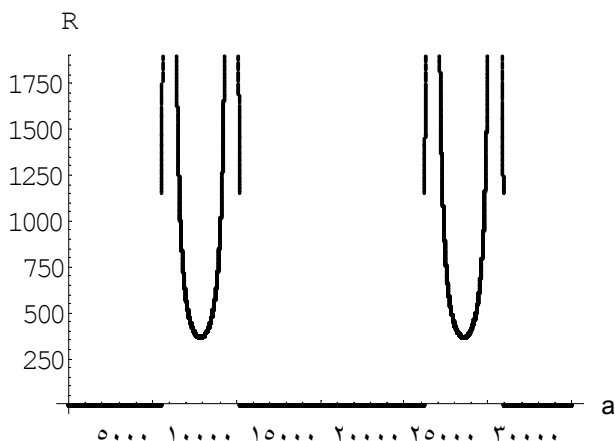
انحنای اسکالر مورد نظر ما برای بزرگترین ویژه مقدار ماتریس انتقال از بین چهار مقدار بالا انتخاب می‌شود. این بدان معنی است که با تغییر مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  ویژه مقدار بیشینه در بین چهار ویژه مقدار موجود تعویض می‌شود، زیرا توابعی که این ویژه مقادیر را تشکیل می‌دهند توابع مثلثاتی هستند. در شکل ۴ نمودار سه بعدی ویژه مقدار بیشینه ترسیم شده است. نقاطی از این رویه که به ازای یک مقدار  $\beta$  و در امتداد یک خط از متغیر  $\alpha$ ، منحنی مشتق آنها ناپیوسته است همان نقاط گذار سیستم هستند؛ که در شکل در قعر رویه قرار دارند. در شکل‌های ۵ و ۶ منحنی تغییرات  $R$ ، به ازای مقادیر مختلف  $\beta$  ترسیم شده است. با دقت در این منحنیها مشاهده می‌شود که در نقاطی که منحنی مشتق دارای ناپیوستگی است (نقطه بحرانی) مقدار  $R$  همانند مدل‌های آیزینگ و پاتس واگرا می‌شود.

در حالت کلی محاسبه انحنای اسکالر مدل مختلط برای هر  $q$  دلخواه و به‌طور تحلیلی از نظر ریاضی دشوار است. برای محاسبه این کمیت با هر مقدار  $q$  می‌توان از روشهای حل عددی کمک گرفت. این کار را می‌توان بعد از محاسبه مقادیر ویژه و محاسبه مشتقات انرژی آزاد نسبت به  $h, \beta$  انجام داد که در نهایت با استفاده از رابطه ۱ انحنای اسکالر  $R$  محاسبه می‌شود. در محاسبه  $R$  برای مدل سه حالتی اتفاق جالبی رخ می‌دهد. در این مورد ویژه مقادیر ماتریس انتقال به صورت زیر

### ۳. محاسبه انحنای اسکالر برای مدل مختلط یک بعدی چهارحالتی

در این مقاله به محاسبه انحنای اسکالر مدل مختلط یک بعدی برای مورد خاص ( $q = 4$ ) خواهیم پرداخت. اهمیت این محاسبه در این است که، مدل انحنای اسکالر علاوه بر کاربرد در سیستمهای با گذار فاز مرتبه دوم در سیستمهای با گذار فاز مرتبه اول نیز قابل کاربرد است. تا کنون سیستمهای با گذار فاز مرتبه اول با کمک مدل انحنای اسکالر بررسی نشده بودند. در این مقاله برای اولین بار امکان کاربرد این مدل در این‌گونه مسائل مطرح شده است. برای این منظور لازم است که ویژه مقدار بیشینه را در بین چهار ویژه مقدار به‌دست آمده در بخش قبل و نسبت به متغیرهای  $\beta, \alpha$  مشخص کنیم. بعد از این مرحله و برای تعیین مقدار  $R$  انرژی آزاد را مطابق با رابطه (۲۲) محاسبه می‌نماییم. سپس توسط رابطه (۴) انحنای اسکالر را برای چهار ویژه مقدار موجود به‌دست می‌آوریم. در زیر مقدار ساده شده انحنای اسکالر برای چهار ویژه مقدار ذکر شده آورده شده است:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= 0 \\
 R_2 &= 0 \\
 R_3 &= \frac{\cosh 4\beta - \cos 4\alpha}{2(\sinh 2\beta + \sin 2\alpha)^2} \\
 R_4 &= \frac{\cosh 4\beta - \cos 4\alpha}{2(\sinh 2\beta - \sin 2\alpha)^2}
 \end{aligned} \tag{23}$$

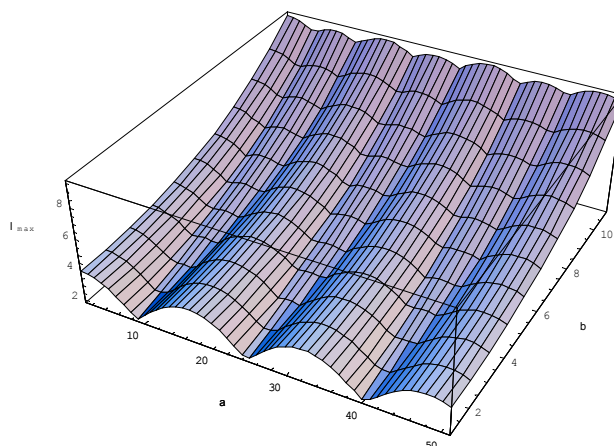


شکل ۵. منحنی انحنای اسکالر، برای شبکه مختلط یک بعدی به ازای  $\beta = 0.415$  و  $q = 4$ .

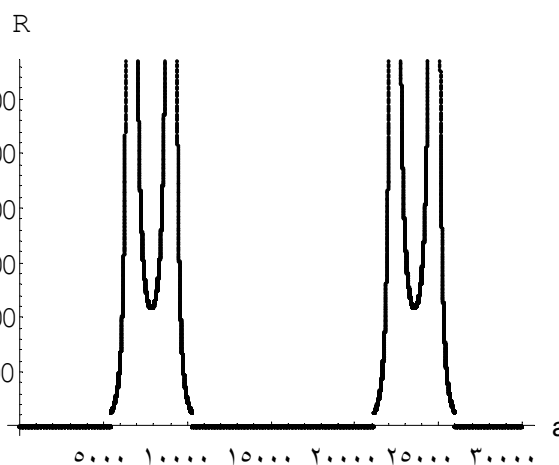
هم برابرند. دلیل و چگونگی برابری این سه مقدار و عدم نمایش وجود گذار فاز هنوز برای ما مشخص نیست و این موضوع می‌تواند به‌عنوان مسئله دیگری در این راستا مورد بررسی قرار گیرد.

#### ۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله، بررسی مدل مختلط یک بعدی چهار حالتی با گذار فاز مرتبه اول توسط مدل انحنای اسکالر صورت گرفته است. انحنای اسکالر محاسبه شده در نقاطی که این سیستم گذار فاز دارد و اگر می‌شود که با انتظار ما برای این کمیت و رفتار آن برای سایر مدلها با گذار فاز مرتبه دوم، همانند آیزینگ و پاتس سه حالتی در توافق است. نتایج مقاله حاضر مؤید این مطلب است که مدل انحنای اسکالر می‌تواند نقش مهمی در بررسی کلیه سیستمهای آماری با گذار فاز از هر مرتبه ایجاد کند و به بیان دیگر زبان ریاضی دیگری برای اینگونه مسائل است.



شکل ۴. ویژه مقدار بیشینه بر حسب مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $\beta$  در مدل اسپینی مختلط یک بعدی و برای  $q = 4$ .



شکل ۶. منحنی انحنای اسکالر، برای شبکه مختلط یک بعدی به ازای  $\beta = 0.43$  و  $q = 4$ .

به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2e^{-\beta} \cos(\sqrt{3}\alpha) + e^{2\beta} \\ \lambda_2 &= 2e^{-\beta} \cos\left(\sqrt{3}\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + e^{2\beta} \\ \lambda_3 &= 2e^{-\beta} \cos\left(\sqrt{3}\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) + e^{2\beta} \end{aligned} \quad (24)$$

با استفاده از این مقادیر و محاسبه مقدار  $R$  برای تک تک آنها

به این نتیجه می‌رسیم که هر سه مقدار  $R_1 = R_2 = R_3 = \frac{1}{3}$  با

## مراجع

1. W Janke, D A Johnston and R Kenna., *Physica A* **336** (2004) 618 – 634.
2. G Ruppeiner, *Rev. Mod. Phys.* **67** (1995) 605; *Phys. Rev. A* **20**.(1976) 1608; *ibid A* **24** (1980) 488.
3. H Janyszek and R Mrugala, *Phys. Rev. A* **39** (1998) 6515; H Janyszek, *Rep. Math. Phys.* **24** (1986) 1; *ibid* 11.
4. Dorje C Brody and Adam Ritz, *journal of geometry and physics* **47** (2003) 207-220.
5. B P Dolan, D A Johnston, R Kenna, *J. Phys. A* **35** (2002) 9025 – 9036.
6. J D Correia, B Mirza and J f Wheater, *Phys, lett, B* **415** (1997) 15 – 23.
7. J A Cuesta, A Sanchez, *Cond – mat* /**0306354**.
8. T G Kovacs and J F Wheater, *Mod. Phys. Lett. A*, **30** (1991) 2827-2835.