

+

rabeie@razi.ac.ir :

(دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۲/۱۸؛ پذیرش: ۱۳۹۱/۵/۱۰)

+

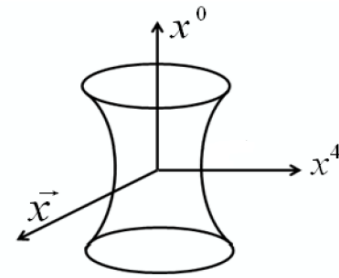
تا کنون روش‌های مختلفی برای تعیین حالت‌های هم‌دوس ارائه شده که ما در این کار از ایده برایان هال که به دست آوردن حالت‌های هم‌دوس را معادل با حل معادله گرما می‌داند، استفاده می‌نمائیم [۴].
در پایان با داشتن این حالت‌ها و تعیین اندازه مناسب، به کوانتس مشاهده پذیرهای کلاسیکی روی دوسیتتر ۱+۳، به روش برزین-گلوبر-گرو می‌پردازیم.

فضا - زمان دوسیتتر، جواب با بیشینه تقارن برای معادله انیشتین در حالت خلاء و با ثابت کیهان شناسی مثبت می‌باشد. این فضا-زمان را می‌توان به صورت یک هذلولی وار چهاربعدي که در فضا - زمان مینکوفسکی پنج بعدی شناور است، تصور کرد (شکل ۱):

$$X_H = \{x \in M_5 : x^\gamma = \eta_{\gamma\beta} x^\gamma x^\beta = -\frac{r^2}{\Lambda}, \gamma, \beta = 0, 1, 2, 3, 4\},$$

هدف ما در این مقاله توصیف کوانتومی حرکت ذره جرم‌دار روی فضا - زمان دوسیتتر ۱+۳ است. مسلماً شناخت فضای فاز کلاسیکی مربوط به این حرکت در راستای تحقق این هدف، می‌تواند مؤثر باشد. به این منظور ابتدا فضای فاز مربوطه را با به کار بردن روش مدار و قضایای کیریلوو [۱] به صورت فضای کتانژانت $T^*(S^3)$ تعیین خواهیم نمود که البته با کره مختلط سه بعدی یکرخت می‌باشد. از طرفی برای سیستم‌هایی با فضای فاز غیر صفحه، سیستم مورد بررسی در این کار، کوانتس معمولی جوابگو نیست [۵]. روشی که برای اعمال کوانتس روی چنین سیستم‌هایی پیشنهاد می‌شود، کوانتس کمک حالت‌های هم‌دوس و از نوع برزین - گلوبر-گرو می‌باشد [۳]. که در این روش، ما تنها به تعیین حالت‌های هم‌دوس روی فضای هیلبرت و اندازه مناسب روی فضای فاز احتیاج داریم.

دوسیتر، مدار هم الحاقی با مدار الحاقی مشخص می‌شود. بنابراین فضای فاز مربوط به حرکت ذره جرم‌دار روی دوسیتر ۱+۳ را می‌توان از مدارالحاقی گروه $Sp(2,2)$ تعیین نمود.



شکل ۱. هذلولی وار دوسیتر.

$$Sp()$$

هر المان مربوط به گروه $Sp(2,2)$ به صورت زیر تجزیه می‌شود [۶]:

$$g = jl$$

انتقال فضا

انتقال زمان

$$j = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \bar{\eta} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cosh \frac{\psi}{2} & \sinh \frac{\psi}{2} \\ \sinh \frac{\psi}{2} & \cosh \frac{\psi}{2} \end{pmatrix}$$

چرخش فضا

بوست

$$l = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cosh \frac{\phi}{2} & \hat{u} \sinh \frac{\phi}{2} \\ -\hat{u} \sinh \frac{\phi}{2} & \cosh \frac{\phi}{2} \end{pmatrix}$$

$$\psi, \phi \in R$$

$$\xi, \eta, \hat{u} = -\bar{\hat{u}} \in SU(2).$$

این گروه با سه زیر گروه تک پارامتری انتقال فضا، سه زیر گروه تک پارامتری چرخش فضا، سه زیر گروه تک پارامتری مربوط به بوست و یک زیر گروه تک پارامتری انتقال زمان می‌باشد. بر این اساس جبر مربوط به این گروه ده پارامتری به شکل کلی زیر بیان می‌شود:

$$Sp(2,2) \ni X = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 & q \\ \bar{q} & \bar{y}_2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

که \bar{y}_1 و \bar{y}_2 کواترنیون خالص و q کواترنیون معمولی می‌باشد. حال نقطه X از این جبر را که مربوط به حرکت ذره جرم‌دار روی دوسیتر ۱+۳ است، به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

می‌توان نشان داد که این نقطه تحت عمل الحاقی گروه جبری $SU(2) \times SO(1,1)$ ناوردا می‌باشد. از این رو فضای همگن مربوط به مدار الحاقی به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$M_H = \frac{Sp(2,2)}{SO(1,1) \times SU(2)}, \quad (4)$$

که $\eta_{\alpha\beta}$ متریک فضا- زمان مینکوفسکی و Λ ثابت کیهان شناسی می‌باشد.

گروه متقارن دینامیکی این فضا - زمان گروه ده پارامتری $SO(1,4)$ است که ما در این کار ترجیح می‌دهیم از گروه دوپوششی آن یعنی گروه دوتایی $Sp(2,2)$ استفاده نمائیم. این گروه به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$Sp(2,2) = \{g \in M_4(K) : \det g = 1, g^+ \gamma^0 g = \gamma^0\}, \quad (1)$$

که K معرف میدان اعداد کواترنیون و $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ماتریس دیراک است.

در مکانیک کلاسیک، فضایی که مجموعه حالت‌های سیستم روی آن مشخص است فضای فاز نامیده می‌شود که از نظر توپولوژی یک رویه (منیفلد) دوتایی هموار است. از طرفی بر اساس قضایای کیریلوو و روش مدار، مدار هم‌الحاقی مربوط به گروه G نیز ساختار دوتایی دارد که خود با رویه دوتایی همگن با گروه دینامیکی G یکریخت است. از این رو می‌توان فضای همگن مربوط به گروه تقارنی سیستم هامیلتونی را به عنوان فضای فاز مطرح نمود.

بر اساس مطالب ذکر شده ، ما می‌توانیم فضای فاز مربوط به حرکت ذره روی دوسیتر ۱+۳ را از مدار هم الحاقی گروه $Sp(2,2)$ تعیین نمائیم. از طرفی برای گروه‌های لی ساده، مثل

داشته باشند، می‌تواند به عنوان حالت‌های همدوس در نظر گرفته شوند:

۱. پیوسته باشند،

۲. بهنجاری پذیر باشند، یعنی: $\langle x|x \rangle < \infty$ ،

۳. رابطه هماتی را روی فضای هیلبرت برآورده نمایند:

$$\int_{\bar{X}} |x\rangle \langle x| v(dx) = I_H, \quad (10)$$

که $v(dx)$ اندازه مناسب روی \bar{X} می‌باشد، که اصولاً به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$v(dx) = h(x)\mu(dx),$$

که در آن $h(x)$ تابعی قابل اندازه‌گیری مثبت و $\mu(dx)$ اندازه ناوردا روی \bar{X} می‌باشد

یک ویژگی غیر معمول روی حالت‌های همدوس فرا کامل بودن آنها است، به این معنا که ضرب داخلی حالت‌های همدوس متفاوت صفر نخواهد بود. در واقع سیستمی از حالت‌های همدوس فرا کامل و یک زیر فضا از آن کامل خواهد بود.

بر اساس کار هال - میچل می‌توان بیان روشنی از حالت‌های همدوس را بر حسب هسته گرمایی روی S^d به صورت زیر ارائه داد [۴]:

$$\rho^d(\bar{a}, \bar{x}) = \langle \delta_{\bar{x}} | \psi_{\bar{a}} \rangle \quad a \in S_c^d, x \in S^d,$$

که در آن $|\psi_{\bar{a}}\rangle$ و $|\delta_{\bar{x}}\rangle$ به ترتیب حالت‌های همدوس و ویژه کت بهنجار ناپذیر می‌باشند. لازم به ذکر است که τ کمیتی

مثبت با مقدار $\frac{\hbar}{m\omega r^2}$ است.

با توجه به اینکه فضای فاز مربوط به دوسیت ۱+۳، کره مختلط سه بعدی می‌باشد لذا در اینجا سعی می‌کنیم از هسته گرمایی حالت‌های همدوس دوسیت ۱+۳ را استخراج نماییم.

+

هسته گرمایی برای کره مختلط سه بعدی به صورت زیر می‌باشد [۴]:

به راحتی می‌توان نشان داد که عمل الحاقی مربوط به ماتریس‌های انتقال فضا و پوست به صورت زیر خواهد بود:

$$g.X_0 = \begin{pmatrix} \frac{\bar{P}}{m} & \frac{P_0}{m} \zeta \\ \frac{P_0}{m} \bar{\zeta} & -\bar{\zeta} \frac{\bar{P}}{m} \zeta \end{pmatrix} = X(\bar{P}, \zeta), \quad (5)$$

که در آن $P_0 = \pm(m^2 + \bar{P}^2)^{\frac{1}{2}}$ و \bar{P} و ζ هر کدام با سه پارامتر مستقل مشخص می‌شوند. $X(\bar{P}, \zeta)$ به ما اجازه می‌دهد که فضای فاز مربوط به این حرکت را به صورت فضای کتانژانت $T^*(S^3)$ که به صورت زیر توصیف می‌شود، نمایش دهیم:

$$T^*(S^3) = \left\{ (\bar{x}, \bar{p}) \in R^6 \times R^6 \mid x^2 = r^2, \bar{x} \cdot \bar{p} = 0 \right\}, \quad (6)$$

x_i ها معرف مختصات یک نقطه روی قسمت فضایی فضای فاز و p_i ها مختصات تکانه خطی نقطه مورد نظر واقع بر صفحه مماس بر آن فضا می‌باشند.

از طرفی با استفاده از روش مختلط ساز تیمن می‌توان نشان

داد این فضا و کره مختلط سه بعدی زیر:

$$S_c^3 = \left\{ \bar{a} \in C^4 \mid a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = r^2 \right\}, \quad (7)$$

یکریخت هستند [۲ و ۴]، یعنی:

$$T^*(S^3) \cong S_c^3, \quad (8)$$

که مؤلفه‌های \bar{a} با مؤلفه‌هایی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$a_j = x_i \cosh p + \frac{i}{p} p_i \sinh p, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (9)$$

بنابراین فضای فاز مربوط به ذره‌ای که روی دوسیت ۱+۳ حرکت می‌کند، کره مختلط S_c^3 می‌باشد.

در مکانیک کلاسیک هر نقطه روی فضای فاز، یک حالت از سیستم را مشخص می‌کند اما در مکانیک کوانتومی، سیستم فیزیکی به وسیله حالت‌هایی که بردارهایی روی فضای هیلبرت هستند معرفی می‌شوند. حد وسطی برای دو بحث بالا وجود دارد که ما را به مفهوم حالت‌های همدوس رهنمون می‌کند. بدین ترتیب که اگر \bar{X} مجموعه با اندازه μ و H یک زیرفضای هیلبرت باشد، مجموعه‌ای از ویژه بردارهای روی این زیر فضای هیلبرت، به شرطی اینکه حداقل سه ویژگی زیر را

می توان نشان داد که رابطه همبستگی معرفی شده توسط هال و میچل رابطه یکدقیقی نیست [۴] و می توان آن را با در نظر گرفتن اندازه‌ای به صورت:

$$\mu(d\bar{x}, d\bar{p}) = \frac{v_\tau(\tau, p)}{\int_{\bar{x} \in S^\tau} d\bar{x}} \left(\frac{\sinh \tau p}{\tau p} \right)^\tau v_\tau d\bar{x} d\bar{p}, \quad (17)$$

به شکل زیر تصحیح نمود:

$$I_\tau = \int_{\bar{x} \in S^\tau} \int_{\bar{x} \cdot \bar{p} = 0} |\psi_a\rangle \langle \psi_a| N \mu(d\bar{x}, d\bar{p}). \quad (18)$$

لازم به ذکر است که (τ, p) و v_τ هسته گرمایی روی هذلولی وار سه بعدی می باشد.

با انتخاب \bar{x} و \bar{p} به صورت زیر

$$\begin{cases} x_\tau = \sin \alpha_x \sin \theta_x \cos \phi_x, \\ x_\tau = \sin \alpha_x \sin \theta_x \sin \phi_x, \\ x_p = \sin \alpha_x \cos \theta_x, \\ x_\tau = \cos \alpha_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_\tau = \cos \alpha \sin \theta \cos \phi p_\alpha + \cos \theta \cos \phi p_\theta - \sin \phi p_\phi, \\ p_\tau = \cos \alpha \sin \theta \sin \phi p_\alpha + \cos \theta \sin \phi p_\theta + \cos \phi p_\phi, \\ p_p = \cos \alpha \cos \theta - \sin \theta p_\theta, \\ p_\tau = -\sin \alpha p_\alpha. \end{cases}$$

و با نوشتن المان حجم روی این فضا به صورت:

$$ds^\tau = dx_\tau^\tau + dx_\tau^\tau + dx_p^\tau + dx_\tau^\tau + dp_\tau^\tau + dp_p^\tau + dp_\tau^\tau + dp_\tau^\tau.$$

می توان المان حجم ناورد را مربوط به فضای فاز یعنی $d\bar{x}d\bar{p}$ را به دست آورد:

$$d\bar{x}d\bar{p} = \sqrt{1 + p_\alpha^\tau + p_\theta^\tau + p_\phi^\tau} \sin^\tau \alpha \sin \theta d\alpha d\theta d\phi dp_\alpha dp_\theta dp_\phi.$$

جایگزین کردن مشاهده پذیرهای کلاسیکی روی فضای فاز توسط مشاهده پذیرهای کوانتومی روی فضای هیلبرت کوانتس نامیده می شود. روشی که در این کار، برای کوانتس مشاهده پذیرهای کلاسیکی به کار می گیریم، کوانتس به کمک حالت های همدوس می باشد که در این روش کوانتس به هر مشاهده پذیر کلاسیکی f روی فضای فاز مشاهده پذیر کوانتومی O_f به صورت زیر وابسته می شود:

$$O_f = \int_{\bar{x}} f(\psi) |\psi\rangle \langle \psi| d\mu(\psi), \quad (19)$$

$$\rho_\tau^\tau(\bar{a}, \bar{x}) = (\tau\pi\tau)^{-\frac{\tau}{2}} e^{-\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\sin \tilde{\theta}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tilde{\theta} - \tau\pi n) e^{-\frac{(\tilde{\theta} - \tau\pi n)^2}{\tau\tau}}, \quad (11)$$

که $\tilde{\theta} = \cos^{-1} \left(\frac{\bar{a} \cdot \bar{x}}{r^\tau} \right)$ زاویه موهمی بین \bar{a} و \bar{x} می باشد.

با اعمال رابطه جمع پواسون و استفاده از توابع گیگنبرور (C_l^m) و چند جمله ای های لژاندر (P_l^m) می توان هسته گرمایی را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\rho_\tau^\tau(\bar{a}, \bar{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\tau \frac{n^\tau - 1}{\tau}} \cdot \begin{aligned} & M_{nl} \sin^l \alpha_a C_{n-l-1}^{l+1}(\cos \alpha_a) Y_{lm}^*(\theta_a, \phi_a) \cdot \\ & M_{nl} \sin^l \alpha_x C_{n-l-1}^{l+1}(\cos \alpha_x) Y_{lm}(\theta_x, \phi_x), \end{aligned}$$

که

$$M_{nl} = \tau^{l+1} l! \left[\frac{n(n-l-1)!}{\tau\pi(n+l)!} \right]^\tau.$$

با انتخاب

$$|\delta_x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^l Y_{n,l,m}^*(\alpha_x, \theta_x, \phi_x) |n, l, m\rangle, \quad (12)$$

که در آن

$$Y_{n,l,m}(\alpha, \theta, \phi) = M_{nl} \sin^l \alpha C_{n-l-1}^{l+1}(\cos \alpha) Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (13)$$

حالت های همدوس به صورت زیر از هسته گرمایی جدا می شود:

$$|\psi_a\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^l e^{-\tau \frac{n^\tau - 1}{\tau}} Y_{n,l,m}^*(\alpha_a, \theta_a, \phi_a) |n, l, m\rangle. \quad (14)$$

لازم به ذکر است که حالت هایی که از هسته گرمایی به دست می آیند، بهنجار نشده اند و ما می توانیم با وارد کردن ضریب بهنجارش N به صورت زیر آنها را بهنجار نمائیم:

$$|\psi_a\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\tau \frac{n^\tau - 1}{\tau}} Y_{n,l,m}^*(\alpha_a, \theta_a, \phi_a) |n, l, m\rangle \quad (15)$$

که نتیجه می دهد:

$$\rho_\tau^\tau(\bar{a}, \bar{x}) = (\tau\pi\tau)^{-\frac{\tau}{2}} e^{-\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\sin \tilde{\theta}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tilde{\theta} - \tau\pi n) e^{-\frac{(\tilde{\theta} - \tau\pi n)^2}{\tau\tau}}. \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \left(F^\tau_{n,l,m,n',l'} \right)_\pm = \\ & \frac{e^{-\tau \frac{n^2+n'^2}{2}}}{\pi(\pi\tau)^2} M_{n,l,m,\pm} M_{n',l',m'} \int \int \int \int \int \sin^2 \alpha \sin \theta \sqrt{1+p^2} \\ & \frac{\sinh \frac{p}{\tau}}{p} e^{-\frac{p}{\tau}} A_{n,l,m,\pm}^* (\alpha_a, \theta_a, p_\alpha, p_\theta, p_\phi) \\ & A_{n',l',m'} (\alpha_a, \theta_a, p_\alpha, p_\theta, p_\phi) d\alpha d\theta dp_\alpha dp_\theta dp_\phi. \end{aligned}$$

این عملگر مشابه عملگر خلق و نابودی عمل می‌کند.

در این کار، ابتدا فضای فاز مربوط به حرکت ذره جرم‌دار روی دوسیت ۱+۳ را به صورت فضای کتانژانت $T^*(S^3)$ به دست آوردیم و سپس از یک ریختی بین این فضا و کره مختلط استفاده نموده و حالت‌های همدوس را از هسته گرمایی کره مختلط استخراج نمودیم و در پایان تعدادی از مشاهده پذیرهای کلاسیکی را به روش برزین-گلوبر-گزو کوانتیزه نمودیم.

که $|\psi\rangle$ حالت‌های همدوس و $d\mu(\psi)$ اندازه مناسب روی فضای فاز می‌باشد. با استفاده از این روش می‌توان تعدادی از مشاهده پذیرهای کلاسیکی را روی دوسیت ۱+۳ کوانتیزه نمود. در این کار ما به کوانتش دو مشاهده پذیر زیر می‌پردازیم:

عملگر انرژی جنبشی: همتای کوانتومی $f(\psi) = \frac{p^2}{2}$ عملگر $O_{\frac{p^2}{2}}$ به صورت

$$O_{\frac{p^2}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n,l,m} \left(n^2 + \frac{3}{2\tau} \right) |n,l,m\rangle \langle n',l',m'|, \quad (20)$$

می‌باشد. نکته حائز اهمیت در رابطه (۲۰) جمله $\left(n^2 + \frac{3}{2\tau} \right)$ است که با ویژه مقدار عملگر انرژی برای نوسانگر هماهنگ سه بعدی قابل مقایسه می‌باشد.

عملگر فوریه: در حالت $f(\psi) = e^{\pm i\phi}$ می‌توان گفت:

$$O_{e^{\pm i\phi}} = \sum_{\substack{n,l,m \\ n',l'}} \left(F^\tau_{n,l,m,n',l'} \right)_\pm |n,l,m,\pm\rangle \langle n',l',m|, \quad (21)$$

که

4. B Hall, and J J Mitchell, *J. Math. Phys.* **43** (2002) 1211.
5. F A Berezin, *Common. Math.* **40** (1975) 153.
6. A Rabeie, "physique quantique des systems elementaries dans de sitter", These de doctorat de universite de Marne-La-Vallee, (2005).

1. A A Kirillov, "Elements of the theory of representation", Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1976).
2. T Thiemann, *arXiv:gr- qc/0206037*.
3. Jean-pierre Gazeau, "Coherent states in Quantum physics", Wiley-Verlag (2009).