

بررسی و تحلیل خواص حالت‌های همدوس یک نوسانگر هماهنگ غیرخطی تغییر شکل یافته

محسن دایی محمد^۱ و محمد نیلی احمد ابادی^۲

۱. گروه فیزیک، دانشکده مهندسی کامپیوتر، واحد نجف اباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف اباد

۲. گروه ریاضی، دانشکده مهندسی کامپیوتر، واحد نجف اباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف اباد

پست الکترونیکی: m.daeimohammad@pco.iaun.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۲ / ۰۴ / ۰۶ ؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۲ / ۰۵ / ۲۰)

چکیده:

در این تحقیق حالت‌های همدوس یک نوسانگر هماهنگ غیرخطی تغییر شکل یافته را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. با استفاده از نظریه اختلال، ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی را برای یک نوسانگر هماهنگ غیرخطی تغییر شکل یافته محاسبه می‌کنیم و سپس حالت‌های همدوس تعمیم یافته را بر اساس فرمول بندی گازیو-کلادر تعریف می‌کنیم. سپس با استفاده از پارامتر مندل و تابع همبستگی مرتبه دوم به بررسی خواص آماری سامانه می‌پردازیم. تجزیه و تحلیل نشان می‌دهد که حالت‌های همدوس برای یک نوسانگر هماهنگ غیرخطی تغییر شکل یافته و غیر تغییر شکل یافته به ترتیب آمار زیرپواسونی و فراپواسونی پیروی می‌کند و اثرات پادگروه و گروه را نشان می‌دهند. به علاوه نشان می‌دهیم که تابع پادهمبستگی برای یک نوسانگر هماهنگ غیرخطی تغییر شکل یافته به شدت نوسانی و بی نظم است. همچنین تابع پادهمبستگی یک نوسانگر هماهنگ غیرخطی غیر تغییر شکل یافته پدیده‌های نابودی و احیا و احیای کسری را نشان می‌دهد. حدود پارامترهای مختلف را برای این که نتایج حاصل شده معتبر باشد نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: نوسانگر هماهنگ غیرخطی تغییر شکل یافته، حالت‌های همدوس، پارامتر مندل، توزیع آماری فراپواسونی و زیرپواسونی، اثرات گروه و پادگروه

۱. مقدمه

غیرخطی شده است. ماتیوس و لاکشمانان یک معادله

دیفرانسیل غیرخطی به شکل

$$(1 + \lambda x^2)\ddot{x} - (\lambda x)\dot{x} + \alpha x = 0, \quad (1)$$

را مورد مطالعه قرار دادند. معادله فوق معادله حرکت برای یک

نوسانگر غیرخطی است (NHO) که

در واقع نمایشی از یک نوسانگر هماهنگ ساده با دامنه وابسته

به بسامد است [۱ و ۲]. جواب معادله (۱) به صورت زیر است:

$$x = A \sin(\omega t + \phi), \quad (2)$$

با این محدودیت که بسامد غیر ثابت است و توسط رابطه زیر

به دامنه وابسته است:

نوسانگر هارمونیک تقریباً در همه رشته‌های فیزیک مورد مطالعه

قرار گرفته است و همچنین نقش مهمی در توصیف آرمانی

بسیاری از مسائل فیزیکی مانند نظریه کوانتومی لیزرها،

الکترو دینامیک کوانتومی و نوسانات کوچک مولکول‌های چند

اتمی ایفا کرده است. از سوی دیگر، بسیاری از پدیده‌های واقعی

در طبیعت، نوسانات غیرخطی دارند که همین علت باعث

برانگیختن شدن انگیزه پژوهشگران برای بررسی نوسانگرهای

پلانک شده است [۲۹، ۳۰ و ۳۲].

در این مقاله، ما ساختار حالت‌های همدوس یک نوسانگر هماهنگ غیرخطی تغییرشکل یافته و بعضی خواص آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم. یک تعبیر فیزیکی از یک نوسانگر هماهنگ غیر خطی تغییرشکل یافته می‌تواند به این شکل باشد که یک نوسانگر هماهنگ غیرخطی غیرتغییرشکل یافته در یک محیط کرمانند قرار گرفته است. حالت‌های همدوس نوسانگر هماهنگ غیرخطی غیرتغییرشکل یافته در مراجع [۳۳-۳۵] مورد بررسی قرار گرفته است. هامیلتونی کلاسیک نوسانگر را با استفاده از روشی که در آن جرم مؤثر و تکانه وابسته به موقعیت به طور متقارن مرتب می‌شوند کوانتیده می‌کنیم [۳۶ و ۳۷]. این امر باعث می‌شود که هامیلتونی کوانتومی در فضای پیکربندی به طور آشکاری هرمیتی باشد [۳]. ما ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی نوسانگر غیرخطی را برحسب پارامتر غیرخطی و با استفاده از روش اختلال مرتبه اول شرودینگر-ریلی به دست می‌آوریم. همچنین ساختار حالت‌های همدوس مربوط به فرمول‌بندی گازیو-کلادر را بررسی می‌کنیم [۳۸ و ۳۹]. ساختار حالت‌های همدوس گازیو-کلادر در زمینه‌های متفاوت و برای تعداد زیادی از سامانه‌های کوانتومی مورد استفاده قرار گرفته است [۴۰-۴۸].

همچنین ویژگی‌های آماری حالت‌های همدوس را با استفاده از پارامتر مندل و تابع همبستگی مرتبه دوم تجزیه و تحلیل می‌کنیم. در نهایت، ما خط مرزی را برای اعتبار نتایج خود مشخص می‌کنیم و مرزهای پارامترهای مختلف تحمیل شده به سامانه توسط نظریه اختلال را محاسبه می‌کنیم.

ساختار این مقاله به این صورت است: در بخش دوم، به طور خلاصه در مورد نوسانگر هارمونیک غیرخطی یک بعدی و کوانتش آن بحث می‌کنیم. در بخش سوم با استفاده از روش اختلال ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی یک نوسانگر غیرخطی تغییرشکل یافته و غیرتغییرشکل یافته را تا تقریب مرتبه اول اختلال به دست می‌آوریم. در بخش چهارم ساختار حالت همدوس گازیو-کلادر را برای نوسانگر غیرخطی تعریف می‌کنیم. در بخش‌های پنجم و ششم به ترتیب خواص آماری و خواص دینامیکی حالت‌های معرفی شده را مورد بررسی

$$\omega = \left(\frac{\alpha^2}{1 + \lambda A^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

یک نوسانگر غیرخطی کلاسیک از این نوع می‌تواند تفسیری از یک نوسانگر با جرم مؤثر وابسته به مکان باشد [۳-۷]. ظهور فناوری‌های پیشرفته علاقه به مطالعه سامانه‌های با جرم مؤثر وابسته به موقعیت را افزایش داده است و به همین دلیل نوسانگر هارمونیک غیرخطی اخیراً توجه زیادی را به خود جلب کرده است [۸-۱۳]. از طرفی حالت‌های همدوس نوسانگر هماهنگ خطی نقش بسیار مهمی در زمینه‌های مختلف فیزیک ریاضی [۱۴-۱۷]، خصوصاً دراپتیک کوانتومی [۱۸ و ۱۹] و اطلاعات کوانتومی دارند [۲۰]. گلوبر میدان الکترومغناطیسی همدوس را برحسب این حالات توصیف کرد [۲۱-۲۳]. کارهای او در این زمینه باعث دریافت جایزه نوبل در سال ۲۰۰۵ شد.

از طرفی دیگر، بیش از دو دهه است که مطالعه جبر لی تغییرشکل یافته یا به اصطلاح جبر کوانتومی تغییرشکل یافته یا گروه‌های کوانتومی تغییرشکل یافته به شدت مورد توجه قرار گرفته است. مطالعه این ساختار باعث غنی‌سازی بسیاری از حوزه‌های فیزیک از جمله مکانیک آماری، نظریه میدان‌های کوانتومی، نظریه میدان‌های همدوس، اپتیک خطی و اپتیک کوانتومی و فیزیک هسته‌ای و فیزیک مولکولی شده است. استفاده از آنها در فیزیک با معرفی جبر هایزبرگ - ویل (نوسانگر هارمونیک کوانتومی تغییرشکل یافته) توسط بیدرن هارن [۲۴] و ماک فارن [۲۵] تشدید شد. از آن زمان تاکنون خواص نوسانگر هماهنگ تغییرشکل یافته توسط بسیاری از محققین مورد توجه قرار گرفته است [۲۶-۲۸]. تا کنون انواع مختلفی از نوسانگر تعمیم یافته معرفی شده‌اند. دلایل متعددی وجود دارد که نوسانگرهای تغییرشکل یافته ابزاری بسیار سودمند در فیزیک هستند. یکی از دلایل مهم آن، ارتباط بین نوسانگر تغییرشکل یافته و نوسانگر غیرخطی است. در مراجع [۲۹-۳۱] نشان داده شده است که نوسانگرهای تغییرشکل یافته منجر به نوسانات غیرخطی با نوع خاصی از وابستگی بسامد به دامنه می‌شود. برای مثال توزیع بوزون تغییرشکل یافته باعث اصلاحاتی در فرمول‌بندی تابع توزیع

موقعیت، ابهامی در مراتب توان‌های عملگرهای \hat{p} و $(m(\hat{x}))^{-1}$ در شکل کوانتومی انرژی جنبشی وجود خواهد شد. در واقع موضوع مراتب توان‌های عملگرها به طور گسترده توسط محققین متعدد مورد توجه قرار گرفته است [۳۷ و ۵۱-۵۴]. متداول‌ترین شکل عمومی که اولین بار توسط ون روس و ماور و ماتیس پیشنهاد شد به صورت زیر است [۳۳]:

$$T(\hat{x}, \hat{p}) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} m^a(\hat{x}) \hat{p} m^b(\hat{x}) \hat{p} m^c(\hat{x}) \\ + m^c(\hat{x}) \hat{p} m^b(\hat{x}) \hat{p} m^a(\hat{x}) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

در اینجا پارامترهای a ، b و c شرط $a+b+c=-1$ را برآورده می‌سازند. توجه می‌کنیم که انتخاب پارامترهای متفاوت برای a ، b و c منجر به هامیلتونی‌های کوانتومی غیریکسانی خواهد شد [۳۷ و ۵۱-۵۴]. در این تحقیق، در معادله (۶) فرض می‌کنیم که $a=c=0$ و $b=-1$ باشد و این موجب یک عملگر انرژی جنبشی متقارن به صورت رابطه زیر:

$$T(\hat{x}, \hat{p}) = \frac{1}{2} \hat{p} \frac{1}{m(\hat{x})} \hat{p}. \quad (10)$$

خواهد شد. این مراتب توان‌های متقارن از عملگرهای \hat{p} و $(m(\hat{x}))^{-1}$ اولین بار توسط لوی-بلوند پیشنهاد شد [۳۷]. با استفاده از عملگر انرژی معادله (۱۰)، نمایش کوانتومی هامیلتونی (۷) به صورت رابطه زیر:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left[(1 + \lambda \hat{x}^2) \hat{p}^2 - 2i\lambda \hat{x} \hat{p} + \frac{\alpha^2 \hat{x}^2}{1 + \lambda \hat{x}^2} \right], \quad (11)$$

خواهد بود که به طور آشکاری در فضای $L^2(R, dx)$ هرمیتی است. هامیلتونی معادله (۱۰) را می‌توان با متغیرهای جدید

$$X = \sqrt{\alpha} x, P = \frac{p}{\sqrt{\alpha}} = -i \frac{d}{dX},$$

به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\hat{H} = \frac{\alpha}{2} \left[(1 + \lambda \hat{X}^2) \hat{P}^2 - 2i\lambda \hat{X} \hat{P} + \frac{\hat{X}^2}{1 + \lambda \hat{X}^2} \right], \quad (12)$$

در اینجا $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\alpha}$ است. به عنوان یک نظریه کلی این نکته را ذکر می‌کنیم که هامیلتونی کوانتومی معرفی شده توسط رابطه (۱۱) توسط چندین محقق دیگر به روش‌های کاملاً متفاوت کوانتیده شده است. هامیلتونی به دست آمده توسط آنها [۳۷] در

قراری دهیم. در بخش هفتم حدود پارامترهای مختلف سامانه را چنان تعیین می‌کنیم که نتایج به دست آمده معتبر باشد. در بخش هشتم به بررسی نتایج حاصل شده می‌پردازیم.

۲. کوانتش نوسانگر غیرخطی تغییرشکل یافته

متیوز و لاکشمانان [۱ و ۲]. ثابت کردند که دینامیک نوسانگر هارمونیک غیرخطی، که در معادله (۱) تعریف شده است، تابع لاگرانژی زیر را دارد:

$$L = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 + \lambda x^2} \right] (\dot{x}^2 - \alpha^2 x^2), \quad (4)$$

معادله (۴) در برخی از مدل‌های نظریه میدان کوانتومی ظاهر می‌شود [۴۹ و ۵۰]. L همچنین نشان دهنده لاگرانژی یک نوسانگر غیرخطی با جرم مؤثر وابسته به موقعیت به صورت

$$m(x) = \frac{1}{1 + \lambda x^2}, \quad \lambda > 0, \quad (5)$$

است. در اینجا هنگامی که پارامتر غیرخطی λ به سمت صفر میل کند ($\lambda \rightarrow 0$) جرم مؤثر $m(x)$ به سمت عدد واحد میل می‌کند.

با استفاده از روابط (۴) و (۵) اندازه حرکت نوسانگر غیرخطی به صورت رابطه زیر خواهد بود:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(x) \dot{x}, \quad (6)$$

بنابراین هامیلتونی کلاسیکی به شکل زیر خواهد بود:

$$H = p\dot{x} - L = \frac{1}{2} \left[\frac{p^2}{m(x)} + m(x) \alpha^2 x^2 \right], \quad (7)$$

توجه می‌کنیم برخلاف انرژی جنبشی سامانه‌ای با جرم ثابت، جمله انرژی جنبشی در معادله هامیلتونی کلاسیکی (۷) تابع موقعیت است.

از طرفی در نظریه مکانیک کوانتومی در فضای پیکربندی انتخابی، برای کوانتش سامانه کلاسیکی باید به جای متغیرهای مکان و تکانه کانونی p ، x عملگرهای \hat{p} ، \hat{x} را جایگزین کرد که رابطه زیر را برآورده می‌کنند:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (8)$$

به دلیل برقراری رابطه (۸)، عملگرهای \hat{x} ، \hat{p} ناسازگار هستند و در کوانتش بنیادی یک سامانه با جرم وابسته به

تبدیلات بندادی عملگرها استفاده می‌کنیم

$$\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{A} + \hat{A}^+),$$

$$\hat{P} = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\hat{A} - \hat{A}^+), \quad (17)$$

در اینجا عملگرهای \hat{A}, \hat{A}^+ به ترتیب عملگرهای نابودی و خلق تغییرشکل یافته وابسته به پارامتر $\tilde{\lambda}$ هستند و داریم

$$\hat{A} = \hat{a}f(\hat{n}), \hat{A}^+ = f(\hat{n})\hat{a}^+ \quad (18)$$

$f(\hat{n})$ یک تابع حقیقی از عملگر تعداد است. همچنین \hat{a}, \hat{a}^+ به ترتیب عملگرهای نابودی و خلق غیرتغییرشکل یافته هستند که در معادلات زیر صدق می‌کنند.

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1, [\hat{n}, \hat{a}] = -\hat{a}, [\hat{n}, \hat{a}^+] = \hat{a}^+, \quad (19)$$

در اینجا \hat{I} عملگر واحد است و با تمامی عملگرهای دیگری که جبر معمولی ویل-هایزنبرگ را می‌سازند جابه‌جا می‌شود. همچنین $\hat{n} = \hat{a}^+\hat{a}$ عملگر تعداد است که در معادله ویژه مقداری زیر صدق می‌کند.

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (20)$$

در اینجا $|n\rangle$ ویژه تابعی است که در فضای فوک در شرط کامل بودن و بهنجارش صدق می‌کند.

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = \hat{I}, \langle m|n\rangle = \delta_{m,n}, m, n \in N \quad (21)$$

عملگرهای نابودی و خلق \hat{a}, \hat{a}^+ در فضای فوک به صورت زیر عمل می‌کنند.

$$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (22)$$

همچنین حالت زمینه توسط رابطه $\langle \hat{a} | 0 \rangle = 0$ تعریف می‌شود. برای مورد خاص که $f(\hat{n}) = 1$ باشد معادلات (۱۷) و (۱۸) به معادلات جبرنوسانگر غیرتغییرشکل یافته تبدیل می‌شود. با استفاده از انتقال بندادی (۱۷) و روابط جابه‌جایی (۱۹) می‌توانیم هامیلتونی (۱۳) را برحسب عملگرهای \hat{A} و \hat{A}^+ به صورت زیر بازنویسی کنیم.

$$\hat{H} = \hat{H}_0(\hat{n}) + \tilde{\lambda}\hat{H}_1(\hat{A}, \hat{A}^+), \quad (23)$$

که

$$\hat{H}_0(\hat{n}) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}[\hat{A}\hat{A}^+ + \hat{A}^+\hat{A}],$$

فضای $L^2(R, d\mu)$ هرمیتی است. در اینجا $d\mu = \sqrt{1 + \lambda x^2} dx$ است که متضاد هامیلتونی معرفی شده در رابطه (۱۱) است.

۳. نوسانگر هماهنگ غیرخطی تغییرشکل یافته کوانتومی در چارچوب نظریه اختلال

در این قسمت ویژه مقادیر و ویژه توابع انرژی را برای یک نوسانگر هماهنگ غیرخطی تغییرشکل یافته و غیرتغییرشکل یافته با استفاده از نظریه اختلال مرتبه اول به دست می‌آوریم. به منظور توسعه نظریه اختلال برای یک نوسانگر هماهنگ غیرخطی، هامیلتونی (۱۲) را بر حسب توان‌های $\tilde{\lambda}$ تجزیه می‌کنیم.

$$\hat{H} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\hat{P}^2 + \hat{X}^2) + \frac{\alpha\tilde{\lambda}}{\sqrt{2}}(\hat{X}^2\hat{P}^2 - 2i\hat{X}\hat{P} - \hat{X}^4) + O(\tilde{\lambda}^2) \quad (13)$$

$$= \hat{H}_0 + \tilde{\lambda}\hat{H}_1,$$

در اینجا

$$\hat{H}_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\hat{P}^2 + \hat{X}^2), \hat{H}_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\hat{X}^2\hat{P}^2 - 2i\hat{X}\hat{P} - \hat{X}^4),$$

و $\tilde{\lambda}$ یک پارامتر حقیقی است و فرض می‌کنیم $\tilde{\lambda} \ll 1$ باشد. بنابراین هامیلتونی (13) را می‌توان به عنوان اختلال برای یک نوسانگر هماهنگ خطی با جرم ثابت در نظر گرفت. هامیلتونی \hat{H}_0 معادله ویژه مقداری زیر را برآورده می‌سازد:

$$\hat{H}_0|n\rangle = E_n^{(0)}|n\rangle, \quad (14)$$

در اینجا $|n\rangle$ و $E_n^{(0)}$ به ترتیب ویژه مقدار انرژی و ویژه تابع انرژی هستند و فرض کرده‌ایم $\omega = \alpha$ ، $m_0 = \hbar = 1$ باشد. طبق نظریه اختلال ریلی-شرویدینگر، ویژه مقادیر و ویژه توابع انرژی نوسانگر هماهنگ غیرخطی تا اولین مرتبه اختلال از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$E_n = E_n^{(0)} + \tilde{\lambda}\langle n|\hat{H}_1|n\rangle, \quad (15)$$

$$|\phi_n\rangle = |n\rangle + \tilde{\lambda}\sum_{m \neq n} \frac{\langle m|\hat{H}_1|n\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}|m\rangle, \quad (16)$$

به منظور به دست آوردن ویژه مقادیر و ویژه توابع انرژی از

معادله (۲۳) هامیلتونی یک نوسانگر غیرخطی تغییرشکل یافته نامیده می‌شود. با استفاده از روابط (۱۵)، (۱۶) و (۲۴) ویژه مقادیر ویژه توابع به ترتیب از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\hat{H}_1 = -\frac{\alpha}{4} \left[\hat{A}^\dagger + \hat{A}^\dagger \hat{A}^{\dagger 2} + \hat{A}^{\dagger 2} \hat{A}^\dagger + \hat{A}^{\dagger 3} + \hat{A} \hat{A}^\dagger \hat{A}^\dagger + \hat{A} \hat{A}^{\dagger 2} + \hat{A} \hat{A}^{\dagger 3} + \hat{A}^2 \hat{A}^\dagger + \hat{A}^2 \hat{A}^{\dagger 2} + \hat{A}^2 \hat{A}^{\dagger 3} + \hat{A}^3 \hat{A}^\dagger + \hat{A}^3 \hat{A}^{\dagger 2} + \hat{A}^3 \hat{A}^{\dagger 3} \right] \quad (24)$$

$$E_n = \frac{\alpha}{4} \left[(n+1) f^\dagger(n+1) + n f^\dagger(n) \right] - \frac{\alpha \tilde{\lambda}}{4} \left[(n+1)(n+2) f^\dagger(n+1) f^\dagger(n+2) \right] \quad (25)$$

$$- \frac{\alpha \tilde{\lambda}}{4} \left[n(n-1) f^\dagger(n) f^\dagger(n-1) - 2(n+1) f^\dagger(n+1) + 2n f^\dagger(n) \right] + O(\tilde{\lambda}^2),$$

$$|\phi_n\rangle = |n\rangle - \frac{\tilde{\lambda}}{4} \frac{f(n)_\dagger \sqrt{(n+1)_\dagger}}{\left[(n+1) f^\dagger(n+1) + n f^\dagger(n) - (n+5) f^\dagger(n+5) - (n+4) f^\dagger(n+4) \right]}$$

$$\frac{\tilde{\lambda}}{4} \frac{f^\dagger(n+2) f(n+1) (n+2) \sqrt{(n+1)_\dagger} |n+2\rangle}{\left[(n+1) f^\dagger(n+1) + n f^\dagger(n) - (n+3) f^\dagger(n+3) - (n+2) f^\dagger(n+2) \right]}$$

$$\frac{\tilde{\lambda}}{4} \frac{f^\dagger(n+3) f(n+1) \sqrt{(n+1)_\dagger} |n+2\rangle}{\left[(n+1) f^\dagger(n+1) + n f^\dagger(n) - (n+3) f^\dagger(n+3) - (n+2) f^\dagger(n+2) \right]} \quad (26)$$

$$\frac{\tilde{\lambda}}{4} \frac{-2 f(n+1)_\dagger \sqrt{(n+1)_\dagger} |n+2\rangle}{\left[(n+1) f^\dagger(n+1) + n f^\dagger(n) - (n+3) f^\dagger(n+3) - (n+2) f^\dagger(n+2) \right]}$$

$$\frac{\tilde{\lambda}}{4} \frac{f^\dagger(n-2) f(n-1) \sqrt{(n-1)_\dagger} |n-2\rangle}{\left[(n+1) f^\dagger(n+1) + n f^\dagger(n) - n f^\dagger(n) - (n-2) f^\dagger(n-2) \right]}$$

$$\frac{\tilde{\lambda}}{4} \frac{f^\dagger(n-1) f(n) (n-1) \sqrt{(n-1)_\dagger} |n-2\rangle}{\left[(n+1) f^\dagger(n+1) + n f^\dagger(n) - (n-1) f^\dagger(n-1) - (n-2) f^\dagger(n-2) \right]}$$

$$\frac{\tilde{\lambda}}{4} \frac{f(n-1)_\dagger \sqrt{(n-1)_\dagger} |n-2\rangle}{\left[(n+1) f^\dagger(n+1) + n f^\dagger(n) - (n-1) f^\dagger(n-1) - (n-2) f^\dagger(n-2) \right]}$$

$$\frac{\tilde{\lambda}}{4} \frac{f(n-4)_\dagger \sqrt{(n-4)_\dagger}}{\left[(n+1) f^\dagger(n+1) + n f^\dagger(n) - (n-3) f^\dagger(n-3) - (n-4) f^\dagger(n-4) \right]} + O(\tilde{\lambda}^2),$$

براساس نظریه اختلال ریلی - شرودینگر، نتایج حاصل وقتی معتبر است که داشته باشیم:

$$\left| \frac{\langle m | \hat{H}_1 | n \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \right| \ll 1, m \neq n \quad (27)$$

معادله (۲۷) زمانی برقرار است که داشته باشیم:

$$\begin{aligned}
 & f(n) {}_r\sqrt{(n+1)} \\
 & + f^r(n+2) f(n+1) (n+2) {}_r\sqrt{(n+2)} \\
 & + f^r(n+3) f(n+1) {}_r\sqrt{(n+1)} \\
 & - 2 f(n+1) {}_r\sqrt{(n+1)} \\
 & + f^r(n-2) f(n-1) {}_r\sqrt{(n-1)} \\
 & + f^r(n-1) f(n) (n-1) {}_r\sqrt{(n-1)} \\
 & + f(n-2) {}_r\sqrt{(n-2)} \\
 & + f(n-1) {}_r\sqrt{(n-1)} \ll 4,
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

رابطه (۲۸) نشان می‌دهد نظریهٔ اختلال برای مقادیر بزرگ n با شکست مواجه می‌شود. به همین دلیل محاسبات وقتی معتبر است که در بیناب انرژی حد بالای n را به یک n_{\max} محدود کنیم. در به دست آوردن معادلات (۲۵) و (۲۶) از معادلات (۱۵)، (۱۶)، (۱۸)، (۲۲) و (۲۴) استفاده کرده‌ایم. در اینجا همچنین از نماد

$$(\beta)_n = (\beta)(\beta+1)\dots(\beta+n-1)$$

استفاده کرده‌ایم. برای مورد خاصی که $f(\hat{n})=1$ باشد معادلات (۲۵) و (۲۶) به صورت زیر خواهند شد:

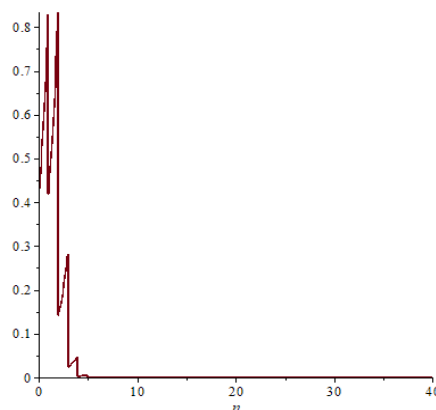
$$E_n = \alpha \left(n + \frac{1}{r} \right) - \frac{\tilde{\lambda} \alpha}{r} n(n+1) + O(\tilde{\lambda}^2), \tag{29}$$

$$|\phi_n\rangle = |n\rangle$$

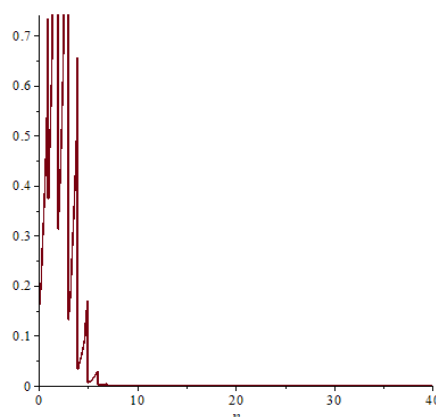
$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{aligned}
 & \sqrt{(n+1)} {}_r|(n+4)\rangle \\
 & + 2(2n+3) \sqrt{(n+1)} {}_r|(n+2)\rangle \\
 & - \sqrt{(n-3)} {}_r|(n-4)\rangle \\
 & - 2(2n-3) \sqrt{(n-1)} {}_r|(n-2)\rangle
 \end{aligned} \right] \\
 & + O(\tilde{\lambda}^2)
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

برای یک نوسانگر غیرخطی غیر تغییرشکل یافته رابطه (۲۷) وقتی برقرار است که داشته باشیم:

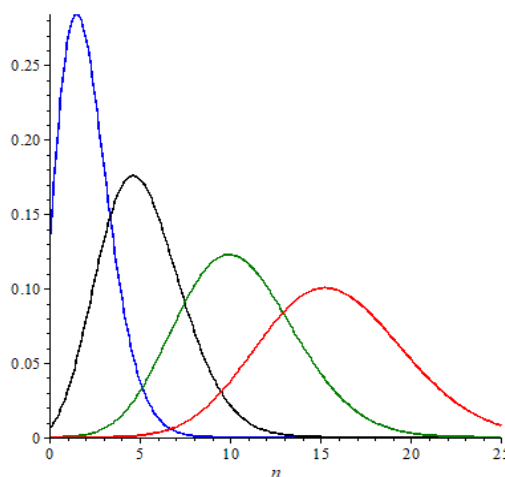
$$\begin{aligned}
 & \sqrt{(n+1)} {}_r - \sqrt{(n-3)} {}_r + 2(2n+3) \sqrt{(n+1)} {}_r \\
 & - 2(2n-1) \sqrt{(n-1)} {}_r \ll 16,
 \end{aligned}
 \tag{31}$$



شکل ۱. نمودار تابع توزیع احتمال P_n برحسب عدد کوانتومی n برای یک نوسانگر غیرخطی تغییرشکل یافته برای مورد $J=2, \lambda=0.01$.



شکل ۲. نمودار تابع توزیع احتمال P_n برحسب عدد کوانتومی n برای یک نوسانگر غیرخطی تغییرشکل یافته برای مورد $J=5, \lambda=0.01$.



شکل ۳. نمودار تابع توزیع احتمال P_n برحسب عدد کوانتومی n برای یک نوسانگر غیرخطی غیرتغییر شکل یافته برای مورد $J=2, 5, 10, 15, \lambda=0.01$ میانگین عدد برانگیختگی متناظر آن به ترتیب $\bar{n} = 1.96, 4.84, 9.46, 13.90$ است.

$$N(J) = \sum_{n=0}^{n=n_{\max}} \frac{J^n}{\rho_n}, \quad (34)$$

برای به دست آوردن حالت‌های همدوس احتمالی برای یک نوسانگر هماهنگ غیرخطی تغییرشکل یافته لازم است انرژی‌های بدون بعد e_n را از معادله (۲۵) به دست آوریم:

$$e_n = \frac{E_n - E_0}{\alpha}$$

$$= \frac{1}{\gamma} \left[(n+1) f^\gamma(n+1) + n f^\gamma(n) \right] -$$

$$\frac{\tilde{\lambda}}{\gamma} \left[(n+1)(n+2) f^\gamma(n+1) f^\gamma(n+2) \right]$$

$$- \frac{\tilde{\lambda}}{\gamma} \left[n(n-1) f^\gamma(n) f^\gamma(n-1) - \right]$$

$$\frac{1}{\gamma} \left[\gamma(n+1) f^\gamma(n+1) + \gamma n f^\gamma(n) \right]$$

$$- \frac{1}{\gamma} \left[f^\gamma(1) \right] - \frac{\tilde{\lambda} f^\gamma(1)}{\gamma} \left[f^\gamma(2) - 1 \right], \quad (35)$$

۴. حالت‌های همدوس برای نوسانگر هماهنگ تغییر

شکل یافته

گازبو و کلادر یک حالت همدوس تعمیم یافته $|J, \gamma\rangle$ (که به نام حالت همدوس گازبو-کلادر نامیده می‌شود) به صورت رابطه زیر معرفی کردند [۵۵]:

$$|J, \gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{N(J)}} \sum_{n=0}^{n=n_{\max}} \frac{J^n e^{-i\gamma e_n}}{\sqrt{\rho_n}} |\phi_n\rangle, J > 0, -\infty < \gamma < \infty, \quad (32)$$

که e_n ویژه مقدار انرژی بدون بعدی است که مقادیر گسسته و غیر تهیگن دارد و شرایط $e_{n+1} > e_n$ و $e_0 = 0$ را برآورده می‌سازد. به علاوه پارامتر وزنی ρ_n بر حسب ویژه مقادیر e_n به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho_0 = 1, \rho_n = \prod_{i=1}^n e_i, \quad (33)$$

همچنین $N(J)$ ثابت بهنجارش است که از رابطه $\langle J, \gamma | J, \gamma \rangle = 1$ تعیین می‌شود و داریم:

با استفاده از روابط (۳۳ و ۳۵) می‌توان نوشت:

$$\rho_n = e^{\sum_{i=1}^n L_n[i(i+1)]} - \frac{1}{\gamma} e^{\sum_{i=1}^n L_n[i(i+1)]} \left[\frac{-\gamma n + \psi(n+1) + \gamma}{+\sum_{i=1}^n \frac{-i^\gamma(i-1) + i^\gamma(i-1) + \gamma i^\gamma(i+2) + i^\gamma(i+2) + \gamma i(i+2)}{i(i+1)}} \right] \lambda + O(\tilde{\lambda}^\gamma), \quad (36)$$

همچنین داریم:

$$\frac{1}{\rho_n} = e^{-\sum_{i=1}^n L_n[i(i+1)]} + \frac{1}{\gamma} e^{-\sum_{i=1}^n L_n[i(i+1)]} \left[\frac{-\gamma n + \psi(n+1) + \gamma}{+\sum_{i=1}^n \frac{-i^\gamma(i-1) + i^\gamma(i-1) + \gamma i^\gamma(i+2) + i^\gamma(i+2) + \gamma i(i+2)}{i(i+1)}} \right] \lambda + O(\tilde{\lambda}^\gamma), \quad (37)$$

همچنین با استفاده از رابطه (۲۹) و (۳۳) داریم:

$$\rho_n = (-1)^n n! \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\gamma} \right)^\gamma \left(\gamma - \frac{\gamma}{\tilde{\lambda}} \right)_n, \rho_0 = 1, \quad (39)$$

با معکوس کردن دو طرف رابطه بالا به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{n!} \left[1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\gamma} n(n+2) \right] + O(\tilde{\lambda}^\gamma), \quad (40)$$

بنابراین ثابت بهنجارش از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$N^\gamma(J) = \sum_{n=0}^{n=n_{\max}} \frac{J^n}{n!} \left[1 + \tilde{\lambda} J + \frac{\tilde{\lambda}}{\gamma} J^\gamma \right] + O(\tilde{\lambda}^\gamma), \quad (41)$$

در اینجا $\psi(n) = \frac{d}{dn} \Gamma(n)$ که تابع گاما است.

همچنین فرض کرده‌ایم محیط کرمانند $(f(n) = \sqrt{n})$ باشد. برای یک نوسانگر غیرهماهنگ غیرتغییرشکل یافته $f(\hat{n}) = 1$ به دست می‌آوریم.

$$e_n = \frac{E_n - E_0}{\alpha}$$

$$= n \left[1 - \frac{\tilde{\lambda}}{\gamma} (n+1) \right], n = 0, 1, 2, \dots, n_{\max}, \quad (38)$$

برای یک نوسانگر هماهنگ غیرخطی غیرتغییرشکل یافته با استفاده از رابطه (۴۴) تا مرتبه اول $\tilde{\lambda}$ می توان نوشت:

$$P_n = \frac{J^n}{\sum_{n=0}^{n_{\max}} J^n} \left[1 - \tilde{\lambda} (4J + J^2 - n(n+3)) \right] + O(\tilde{\lambda}^2), \quad (45)$$

از رابطه بالا می توان نتیجه گرفت که در حد $\tilde{\lambda} \rightarrow 0$ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!}, \quad (46)$$

با قرار دادن α از رابطه (۴۳) در معادله (۴۶)، حالت های همدوس گلوبر را به دست می آوریم. برای حالت

$\tilde{\lambda} \neq 0$ تابع توزیع احتمال بسته به مقادیر $J, \tilde{\lambda}$ می تواند باریک تر و یا پهن تر از تابع توزیع پواسون باشد. به طور کلی مقدار چشمداشتی و واریانس دو کمیت مهم هستند که با تابع چگالی احتمال می توان آنها را محاسبه کرد. چشمداشتی مرتبه l ام عدد کوانتومی n از رابطه زیر به دست می آید:

$$\langle n^l \rangle = \sum_{n=0}^{n_{\max}} n^l P_n, \quad (47)$$

برای مورد $l=1,2$ داریم:

$$\langle n^2 \rangle = \sum_{n=0}^{n_{\max}} n^2 P_n \quad \langle n \rangle = \sum_{n=0}^{n_{\max}} n P_n, \quad (48)$$

همچنین واریانس تابع توزیع احتمال از رابطه زیر به دست می آید:

$$(\Delta n)^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2, \quad (49)$$

یکی از پارامترهای مهم برای مشخص کردن طبیعت تابع وزنی پارامتر مندل Q است که توسط رابطه زیر تعریف می شود [۱۹ و ۵۶]:

$$Q = \frac{(\Delta n)^2 - \langle n \rangle}{\langle n \rangle}, \quad (50)$$

اگر $Q=0$ باشد تابع توزیع پواسونی خواهد بود و برای $Q>0$ تابع توزیع فراپواسونی و برای $Q<0$ تابع توزیع زیرپواسونی خواهد بود. در شکل ۴ نمودار Q را بر حسب پارامتر J برای یک نوسانگر هماهنگ غیرخطی تغییرشکل یافته رسم کرده ایم. همانطور که شکل ۴ نشان می دهد پارامتر مندل در تمامی نواحی منفی است و توزیع آماری زیرپواسونی خواهد بود.

از روابط (۳۲) مشخص می شود که در حد $\tilde{\lambda} \rightarrow 0$ حالت همدوس برای یک نوسانگر غیرخطی به صورت رابطه زیر:

$$|J, \gamma\rangle = e^{\frac{J}{2} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{J^n}{\sqrt{n!}} e^{-in\gamma}} |n\rangle, \quad (42)$$

خواهد بود. در اینجا $|n\rangle$ ویژه حالت یک نوسانگر هماهنگ خطی است و در این مورد $n_{\max} \rightarrow \infty$. اگر فرض کنیم:

$$\sqrt{J} e^{-i\gamma} = \alpha, \quad (43)$$

حالت های همدوس در (۴۲) تبدیل به حالت های همدوس گلوبر خواهد شد [۲۱-۲۳].

۵. خواص آماری

در این قسمت برای بررسی ویژگی های آماری حالت های همدوس به محاسبه تابع توزیع احتمال یا تابع وزنی که نشان دهنده احتمال اشغال ویژه حالت n ام سامانه توسط حالت همدوس است می پردازیم. برای حالت همدوس اختلالی داده شده توسط رابطه (۳۲)، تابع توزیع احتمال را می توان به شکل زیر نوشت:

$$P_n = |c_n|^2 = \frac{J^n}{N^2(J) \rho_n}, \quad (44)$$

برای مورد نوسانگر غیرخطی تغییرشکل یافته، با استفاده از روابط (۳۴) و (۳۷) نمودار تابع توزیع احتمال را بر حسب عدد کوانتومی n برای مقادیر دو مورد متفاوت $J=2,5$ در شکل های ۱ و ۲ رسم کرده ایم.

همان طور که مشاهده می شود تابع توزیع احتمال برای حالت نوسانگر غیرخطی تغییرشکل یافته، نوسانات غیرمنظم دارد و با افزایش پارامتر J ، تعداد نوسانات افزایش می یابد و نمودار آن از توزیع پواسونی یا شبه پواسونی پیروی نمی کند. برای مورد نوسانگر غیرتغییرشکل یافته، نمودار تابع توزیع احتمال بر حسب n برای چهار مورد متفاوت $J=2,5,10,15$ در شکل ۳ رسم شده است. همانطور که مشاهده می شود با افزایش J ، دامنه منحنی توزیع احتمال کاهش می یابد و در عوض پهنای منحنی افزایش می یابد و شکل نمودارها شبه پواسونی خواهند بود.

از روابط (۵۳) مشخص می‌شود که به ازای $\tilde{\lambda} = 0$ می‌توان نوشت:

$$\langle n \rangle = (\Delta n)^2 = J, \quad (54)$$

که مشخصه توزیع پواسونی است. همچنین برای حالت $\tilde{\lambda} \neq 0$ داریم $\langle n \rangle \neq (\Delta n)^2$. با استفاده از روابط (۵۰) - (۵۲) می‌توان نوشت:

$$Q = \frac{\tilde{\lambda}}{2} J + O(\tilde{\lambda}^2), \quad (55)$$

که نشان می‌دهد برای یک نوسانگر غیرخطی غیرتغییرشکل یافته، تابع توزیع فرابواسونی خواهد بود. در بخش قبل مشاهده کردیم که برای یک نوسانگر غیرخطی تغییرشکل یافته تابع توزیع زیرپواسونی است. توزیع آماری برای یک نوسانگر خطی نیز زیرپواسونی است.

کمیت مهم دیگری که مشخص کننده اثرات گروه و پادگروه است تابع همبستگی مرتبه دوم است که توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

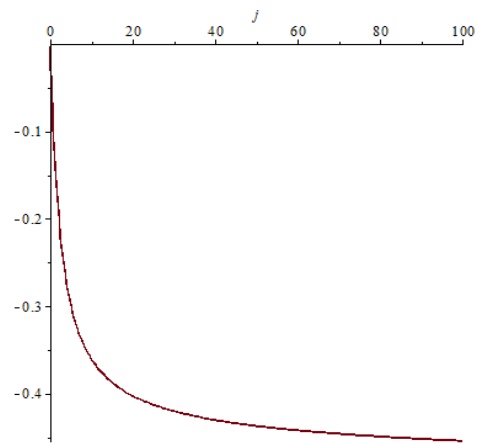
$$g^2(0) = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle^2} = \frac{Q}{\langle n \rangle} + 1, \quad (56)$$

برای مورد $g^2(0) < 1$ اثرات پادگروه (گروه) ظاهر می‌شود. در شکل ۵ نمودار تابع همبستگی مرتبه دوم را بر حسب پارامتر J برای یک نوسانگر غیرخطی تغییرشکل یافته رسم کرده‌ایم. همانطور که مشاهده می‌شود تابع همبستگی مرتبه دوم همواره کوچک‌تر از یک است $g^2(0) < 1$ و اثرات پادگروه شدن دیده می‌شود.

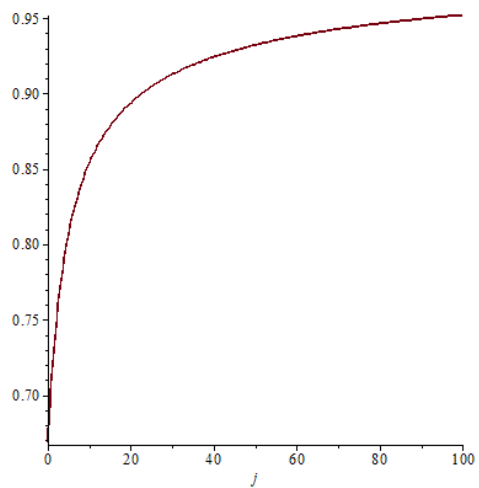
برای مورد یک نوسانگر غیرخطی غیرتغییرشکل یافته با استفاده از روابط (۵۵) و (۵۶) داریم:

$$g^2(0) = 1 + \frac{\tilde{\lambda}}{2} + O(\tilde{\lambda}^2) \quad (57)$$

که مبین آن است که حالت‌های همدوس یک نوسانگر غیرخطی غیرتغییرشکل یافته اثرات گروه ($g^2(0) > 1$) را نشان می‌دهد.



شکل ۴. نمودار پارامتر مندل Q بر حسب J برای یک نوسانگر هماهنگ غیرخطی تغییرشکل یافته.



شکل ۵. نمودار تابع همبستگی مرتبه دوم $(g^2(0))$ بر حسب J برای یک نوسانگر هماهنگ غیرخطی تغییرشکل یافته.

برای مورد نوسانگر غیرهماهنگ غیرتغییرشکل یافته داریم:

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{n J^n}{N^2(J) \rho_n} \quad (51)$$

$$= J \left(1 + \frac{\tilde{\lambda}}{2} (2 + J) \right) + O(\tilde{\lambda}^2),$$

$$\langle n^2 \rangle = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{n^2 J^n}{N^2(J) \rho_n} \quad (52)$$

$$= J + J^2 + \tilde{\lambda} J (1 + 3J + J^2) + O(\tilde{\lambda}^2),$$

با استفاده از روابط (۵۱) و (۵۲) واریانس تابع توزیع احتمال از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} (\Delta n)^2 &= \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 \\ &= J + \tilde{\lambda} J (1 + J) + O(\tilde{\lambda}^2), \end{aligned} \quad (53)$$

$E_{\bar{n}}$ متمرکز است. در اینجا $n = \langle n \rangle = \bar{n}$ میانگین عدد برانگیختگی است. همچنین نوسانگر هماهنگ غیر خطی غیر تغییرشکل یافته از یک احیای کوانتومی با زمان احیای $T_{rev} = \frac{4\pi}{|E_n''|}$ و از یک احیای کسری با زمان احیای $T_{fi} = \frac{P}{q(T_{rev})}$ پیروی می کند (در اینجا p و q اعداد صحیح هستند). تحول زمانی حالت همدوس که در رابطه (۳۲) تعریف شد به صورت رابطه زیر خواهد بود:

$$|J, \gamma, t\rangle = \sum_{n=0}^{n=n_{\max}} c_n e^{-iE_n t} |\phi_n\rangle, \quad (58)$$

که $c_n = \frac{J^{\frac{n}{2}}}{N(J)\sqrt{\rho_n}}$ به منظور بررسی ساختار احیای کسری، تابع پادهمبستگی [۵۸] را به شکل زیر معرفی می کنیم:

$$A(t) \equiv \langle J, \gamma | J, \gamma, t \rangle = \sum_{n=0}^{n=n_{\max}} P_n e^{-iE_n t}, \quad (59)$$

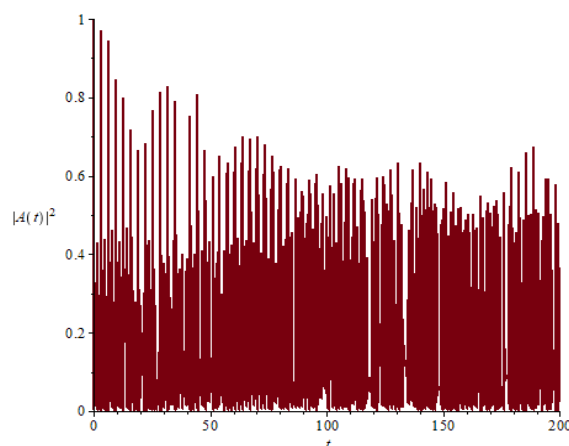
در اینجا P_n تابع وزنی است. در شکل ۶ مجذور دامنه تابع پادهمبستگی را برحسب زمان برای مورد تغییرشکل یافته رسم کرده ایم.

همانطور که مشاهده می شود تابع پاد همبستگی نوسانات شدید غیرخطی از خود نشان می دهد و با افزایش J این نوسانات شدیدتر می شود. همچنین در طی تحول زمانی تابع پادهمبستگی پدیده های نابودی و احیا مشاهده نمی شود.

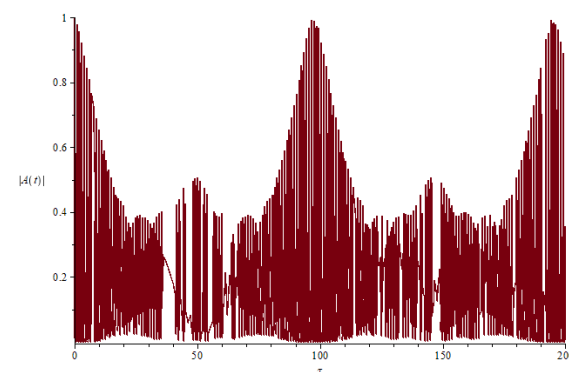
برای مورد غیرتغییرشکل یافته پیروید کلاسیکی و زمان احیای کوانتومی از رابطه زیر داده می شود:

$$T_{cl} = \frac{2\pi}{\alpha} \left[1 + \frac{\tilde{\lambda}}{2} (1 + 2J) \right] + O(\tilde{\lambda}^2), T_{rev} = \frac{4\pi}{\alpha \tilde{\lambda}}, \quad (60)$$

در به دست آوردن معادلات فوق از رابطه (۲۹) استفاده کرده ایم. در شکل ۷ مجذور دامنه احتمال تابع پادهمبستگی را برحسب زمان برای مورد غیرتغییرشکل یافته رسم کرده ایم. از این شکل مشخص می شود که پدیده های نابودی و احیا و احیای کسری دیده می شود. به علاوه با افزایش J ، چنانچه پارامترهای دیگر حالت همدوس را تغییر ندهیم احیای کسری در بسته موج حالت همدوس بیشتر نمایان می شود.



شکل ۶. نمودار تابع پادهمبستگی برحسب زمان برای یک نوسانگر غیرخطی تغییرشکل یافته برای مورد $J = 2$.



شکل ۷. نمودار تابع پادهمبستگی برای یک نوسانگر غیرخطی غیرشکل یافته برحسب پارامتر بدون بعد $\tau = \frac{t}{T_{cl}}$ برای مورد $J = 2$ (احیای کسری در زمان $\frac{1}{2} T_{rev} = 100$ صورت می گیرد).

۶. تحول زمانی و ساختار احیای کسری

یکی از حالت های بسیار مهم در فیزیک حالت همدوس، یک نوسانگر خطی [۴۱ و ۵۷] است که در واقع نمایشی از یک رفتار دینامیکی کلاسیکی است. این سؤال که آیا این رفتار می تواند به حالت های همدوس برای سامانه های به غیر از نوسانگر هماهنگ کوانتومی تعمیم داده شود، از لحاظ تاریخی توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است. نشان داده شده است [۴۱] که تا زمانی که طیف انرژی سامانه خطی باشد، حالت های همدوس تعمیم یافته، تحول زمانی شبه کلاسیک خواهند داشت. به طور کلی بیشترین انرژی یک بسته موج حالت همدوس به صورت $|\psi\rangle = \sum_n c_n |\phi_n\rangle$ در اطراف

۷. حدود اعتبار پارامترهای سامانه

۸. نتایج

برای این که نتایج به دست آمده معتبر باشد باید حدود پارامترهای مرزی مختلف سامانه را تعیین کنیم. همانطور که در بخش ۳ اشاره کردیم نظریه اختلال زمانی قابل استفاده است که $\lambda \ll 1$ باشد و جمله اختلالی $(\lambda \hat{H}_1)$ در مقایسه با جمله غیر اختلالی (\hat{H}_0) کوچک باشد. این بدین معنی است که برای مقادیر بزرگ n ، نظریه اختلال استفاده شده در بخش ۳ با شکست مواجه می‌شود و باید برای n یک مقدار حدی $(n = n_{\max})$ در نظر گرفت. حد بالای n برای مورد نوسانگر غیرخطی تغییرشکل یافته توسط معادله (۲۸) و برای غیرتغییر شکل یافته توسط معادله (۳۱) تعیین می‌شود. به طور کلی حالت همدوس گازیو- کلاذر [۳۹] برحسب دو پارامتر حقیقی J, γ تعریف می‌شود به طوری که $-\infty < \gamma < \infty$ و $0 < J < R$ و شعاع واگرایی است. برای حالت‌های همدوس سامانه‌های با طیف انرژی نامحدود، مقادیر مجاز J توسط شعاع واگرایی تعیین می‌شود که توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\rho_n}, \quad (61)$$

با این وجود، برای حالت‌های همدوس بر اساس طیف انرژی محدود، همانطور که در معادله (۳۲) آمده است J علاوه بر این توسط یک کران بالایی که توسط عدد کوانتومی $n = n_{\max}$ تحمیل شده است محدود می‌شود. دلیل آن این واقعیت است که $\langle n \rangle \propto J$ ، که در اینجا $\langle n \rangle$ میانگین عدد کوانتومی n با تابع توزیع احتمال $|c_n|^2$ برای یک بسته موج حالت همدوس به صورت $|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{n_{\max}} c_n |\phi_n\rangle$ است. به طور کلی، یک کران بر روی مقادیر مجاز J می‌تواند اعمال شود به طوری که $n_{\max} < \langle n \rangle + 3\sigma$ باشد، که در اینجا σ انحراف از تابع توزیع وزنی استاندارد را نشان می‌دهد. مهم است که توجه کنیم نتایج حاصل شده در بخش‌های ۳ تا ۶ در چارچوب محدودیت‌های اعمال شده برای پارامترهای به کار رفته معتبر است.

مراجع

1. P M Mathews and M Lakshmanan, *Q. Appl. Math.* **32** (1974) 215.

در این تحقیق حالت‌های همدوس تعمیم یافته یک نوسانگر هماهنگ غیرخطی تغییرشکل یافته مورد مطالعه قرار گرفت. یک تعبیر فیزیکی از مدل ارائه شده می‌تواند به این صورت باشد که فرض کنیم یک نوسانگر هماهنگ غیرخطی غیرتغییرشکل یافته در یک محیط کرمانند قرار گرفته است. ما ویژه مقایر و ویژه توابع انرژی سامانه را با استفاده از نظریه اختلال ریلی - شرودینگر و تا مرتبه اول اختلال برحسب پارامتر غیرخطی λ به دست آوردیم. سپس با استفاده از ویژه حالت‌ها و ویژه مقادیر انرژی به دست آمده حالت‌های همدوس گازیو- کلاذر را تعریف کردیم و سپس ویژگی آماری و کوانتومی آنها را مورد بررسی قرار دادیم. سپس برای بررسی تجزیه و تحلیل خواص آماری پارامتر مندل و تابع همبستگی مرتبه دوم را محاسبه کردیم. تجزیه و تحلیل نتایج معلوم کرد که حالت‌های همدوس نوسانگر هماهنگ غیرخطی تغییرشکل یافته برای محیط کرمانند می‌دهد. همچنین حالت‌های همدوس نوسانگر هماهنگ غیرخطی تغییرشکل یافته آمار فراپواسونی و اثرگروه شدن را نشان می‌دهد. در واقع مشاهده کردیم که اثرات غیر خطی محیط باعث تغییر آمار توزیع احتمال یا تابع وزنی از زیرپواسونی به فراپواسونی می‌شود. علاوه بر این، تابع پادهمبستگی را برای بررسی ویژگی‌های دینامیکی محاسبه کردیم. معلوم کردیم که تحول زمانی تابع همبستگی حالت همدوس یک نوسانگر هماهنگ غیرخطی تغییرشکل یافته نوسانات شدید و بی‌نظم دارد و پدیده‌های نابودی و احیا را نشان نمی‌دهد؛ که به دلیل غیر خطی بودن محیط قابل انتظار است. همچنین معلوم شد حالت‌های همدوس نوسانگر هماهنگ غیرتغییرشکل یافته در طول تحول زمانی خود پدیده‌های احیای کوانتومی و احیای کسری و میرایی کوانتومی را نشان می‌دهند.

2. M Lakshmanan and S Rajasekar, “*Nonlinear dynamics: Integrability, Chaos, and Patterns*”, (Springer-Verlag, Berlin) (2003).
3. N Amir and S Iqbal, *Commun. Theor. Phys.* **62** (2014) 790.
4. J F Cariñena, M F Rañada, M Santander, and M Senthilvelan, *Nonlinearity* **17** (2004) 1941.
5. J F Cariñena, M F Rañada, and M Santander, *Rep. Math. Phys.* **54** (2004) 285.
6. J F Cariñena, M F Rañada, and M Santander, *Ann. Phys.* **322** (2007) 2249.
7. B Midya and B Roy, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** (2009) 285301.
8. X H Wang and Y B Liu, *Int. J. Theor. Phys.* **50** (2011) 2697.
9. R Roknizadeh and H Heydari, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **10** (2013) 1350056.
10. R Roknizadeh and H Heydari, *Found. Phys.* **45**, 7 (2015) 827.
11. B Bagchi, S Das, S Ghosh, and S Poria, *J. Phys. A: Math. Theor.* **46** (2013) 032001.
12. A Schulze-Halberg and J Wang, *Few-Body Syst.* **55** (2014) 1223.
13. D Ghosh and B Roy, *Ann. Phys.* **353** (2015) 222.
14. J R Klauder and B S Skagerstam, “*Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics*”, WorldScientific, Singapore, (1985).
15. W M Zhang, D H Feng, and R Gilmore, *Rev. Mod. Phys.* **62** (1990) 867.
16. A M Perelomov, “*Generalized Coherent States and Their Applications*” Springer-Verlag, Berlin, (1986).
17. T Ali, J P Antoine, and J P Gazeau, “*Coherent States, Wavelets and Their Generalizations*”, Springer, Berlin, (2000).
18. D F Walls and G J Milburn, “*Quantum Optics*”, 2nd ed. Springer, Berlin, (2008).
19. R J Glauber, “*Quantum Theory of Optical Coherences*”, Wiley-VCH, (2007).
20. B C Sanders, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** (2012) 244002 and references therein.
21. R J Glauber, *Phys. Rev. Lett.* **10** (1963) 277.
22. R J Glauber, *Phys. Rev.* **130** (1963) 2529.
23. R J Glauber, *Phys. Rev.* **131** (1963) 2766.
24. L C Biedenharn, *J. Phys: Math. Gen.* **22** (1989) L873.
25. MacFarlane, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22** (1989) 4581.
26. M Daeimohammad, F Kheirandish, and M R Abolhasany, *Int. J. Theor. Phys.* **48** (2009) 693.
27. M Daeimohammad, F Kheirandish, and K Saeedi, *Int. J. Theor. Phys.* **50** (2011) 171.
28. M Daeimohammad, *Int. J. Mod. Phys. B*, **13** (2019) 1950126.
29. V I Manko, G Marmo, S Solimeno and F Zaccaria, *Int. J. Mod. Phys. A* **8** (1993) 3577.
30. V I Man’ko, G Marmo, S Solimeno and F Zaccaria, *Phys. Lett. A* **176** (1993) 173.
31. P Aniello, V I Man’ko, G Marmo, S Solimeno and F Zaccaria, *J. Opt. B: Quant. Semiclass. Opt.* **2** (2000) 718.
32. G Su and M Ge, *Phys. Lett. A* **173** (1993) 17.
33. S Ghosh, *J. Math. Phys.* **53** (2012) 062104.
34. N Amir and S Iqbal, *J. Math. Phys.* **55** (2014) 0114101.
35. N Amir and S Iqbal, *J. Math. Phys.* **56** (2015) 062108.
36. O Von Roos and H Mavromatis, *Phys. Rev. B*. **31** (1985) 2294.
37. J M Lévy-Leblond, *Phys. Rev. A*. **52** (1995) 1845.
38. J R Klauder, *J. Phys. A: Math. Gen.* **29** (1996) 293.
39. J P Gazeau and J R Klauder, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** (1999) 123.
40. S Iqbal and F Saif, *J. Math. Phys.* **52** (2011) 082105.
41. S Iqbal, P Rivière, and F Saif, *Int. J. Theor. Phys.* **49** (2010) 2340.
42. S Iqbal and F Saif, *Phys. Lett. A*. **376** (2012) 1531.

43. S Iqbal and F Saif, *J. Russ. Laser Res.* **34** (2013) 77.
44. D Popov, V Sajfert, and I Zaharie, *Physica A* **387** (2008) 4459.
45. A Chenaghlou and O Faizy, *J. Math. Phys.* **49** (2008) 022104.
46. M Angelova and V Hussin, *J. Phys. A: Math. Gen.* **41** (2008) 304016.
47. J P Antoine, J P G. Gazeau, P Monceau, J R Klauder, and K A Penson, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 2349.
48. J M Hollingworth, A Konstadopoulou, S Chountasis, A Vourdas, and N B Backhouse, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001) 9463.
49. R Delbourgo, A Salam, and J Strathdee, *Phys. Rev.* **187** (1969) 1999.
50. K Nishijima and T Watanabe, *Prog. Theor. Phys.* **47** (1972) 996.
51. D J B Danial and C B Duke, *Phys. Rev.* **152** (1966) 683.
52. T Gora and F Williams, *Phys. Rev.* **177** (1969) 1179.
53. Q G Zhu and H Kroemer, *Phys. Rev. B* **27** (1983) 3519.
54. T Li and K J Kuhn, *Phys. Rev. B* **47** (1993) 12760.
55. R Roknizadeh and M K Tavassoly, *J. Math. Phys.* **46** (2005) 042110.
56. L Mandel, *Opt. Lett.* **4** (1979) 205; L Mandel and E Wolf, “*Optical Coherence and Quantum Optics*”, Cambridge University Press, Cambridge, (1995).
57. E Schrödinger, *Naturwissenschaften* **14** (1926) 664.
58. R W Robinett, *Phys. Rep.* **392** (2004) 1.