برهم‌کنش هیدرودینامیکی دو کره در حضور گرادیان دما، اثر هَم‌بستگی میانِ حرکت دو ذره بر ضریبِ سره

گلناز نجفی گُل‌وَندانی[1]، فرشته سالاری[1]، سیّد نادر رسولی[2]

۱. گروه فیزیک، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه گیلان، رشت

۲. پژوهشکدهٔ فیزیک، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی(IPM)، تهران

پست الکترونیکی: blume.sein@gmail.com

چکیده:
برای بررسی تاثیر ساختار داخلی ملکول‌ها در اثر سُرِه، ما به بررسی اعمال گرادیان دما به یک تَک ذرهٔ شناور در سیال می‌پردازیم. تک ذرهٔ مورد بررسی با دو ریز کره که با فنر نرمی به یک‌دیگر متصل شده‌اند، یا به‌صورت جداگانه در دام دو انبرک نوری قرار گرفته‌اند، مدل شده است. ما نیرویی که این مجموعهٔ دوکره‌ای در حضور گرادیان دما، به سیال پیرامون خود وارد می‌کند را محاسبه کرده؛ و با استفاده از آن ضریب سُرهٔ مربوط به این مدل دو ذره‌ای را بدست می‌آوریم. در گام بعدی، وابستگی گرانرَوی سیال به دما را در محاسبات وارد کرده، و اثر این تصحیح را بر نتایج خود بررسی می‌نماییم.

واژه‌های کلیدی: گرادیان دما، اثر سُرِه ، محلول کلوئیدی، وابستگی دمایی گرانروی، برهم‌کنش هیدرودینامیکی، معادلهٔ لانژون

۱. مقدمه

اعمال گرادیان دما به یک محلول چندتایی موجب خروج آن از شرایط تعادل ترمودینامیکی می‌شود. یکی از ساده‌ترین نتایج خروج از تعادل ترمودینامیکی، برهم‌خوردن چگالی اولیهٔ ذرات در محلول است. در غیاب یک برهم‌کنش بلندبردِ داخلی یا میدان خارجی، تعادل ترمودینامیک به معنای چگالی یک‌نواخت برای مواد تشکیل دهندهٔ محلول می‌باشد. می‌توان این یک‌نواختی را با بیشینه‌کردن آنتروپی مجموعه، به سادگی فهمید [۱] . اما وقتی دمای محلول از یک‌سوی آن به دیگر سو تغییر می‌کند، تعریف تعادلیِ آنتروپی دیگر قابل استفاده نیست، در واقع معادلات پایه‌ای که بیشینه‌شدن آنتروپی از آن‌ها نتیجه شده بود، به دلیل دمای غیریکنواخت تغییر می‌کنند. در نتیجه، نتایج ترمودینامیکِ تعادلی از جمله یک‌نواختیِ چگالیِ متوسط، نیز لزوما مشاهده نمی‌شوند [۲] .

پاسخ چگالیِ یک محلول به اعمال گرادیان دما – به‌احترام دانش‌مند سوئیسی شارل سُره[1] – اثر سُرِه یا دماپخش[2] نامیده می‌شود [۳] . دلیل این نام‌گذاری مطالعات وسیعی است که شارل سُرِه در نیمهٔ دومِ قرنِ نوزدهم درموردِ چگالی محلول آب+نمک‌طعام در حضور گرادیان دما انجام داده است [۴ و ۵]. هرچند سابقهٔ کار دقیق روی این پدیده حداقل به ۲۵ سال پیش‌تر از سُرِه و مطالعات کارل لودیگ، فیزیولوژیست آلمانی بازمی‌گردد [۶]، و به همین دلیل این اثر گاهی اثر لودیگ–سُرِه نیز گفته‌می‌شود. اما متغیری که برای بررسی کَمّی[3] چگالیِ

[1] Charles Soret
[2] Thermodiffusion
[3] Quantitative

غیریک‌نواخت محلول/حلال در حضور گرادیان دما اندازه‌گیری/محاسبه می‌شود، به ضریبِ سُرِه مشهور است [۲]. پس از لودیگ و سُرِه، این اثر در طیفِ وسیعی از محلول‌ها، مانند محلول‌های دوتایی [۷]، محلول‌های پلیمری [۸–۱۰]، کلوئیدی [۱۱–۱۴] و ... مورد مطالعه قرار گرفت. اما جالب است که علی‌رغم گذشت حدودِ ۱۶۵ سال از بررسی کمیِ و دقیقِ این اثر، هنوز سازوکارِ آن محلِ بحث و حتی مناقشهٔ علمی است [۱۴ و ۱۵].

یکی از ساده‌ترین مثال‌های مورد بررسی در اثر سُرِه محلول‌های دوتایی، مانند آب + الکل، بنزن +سایکلوهگزان[1]، و ... می‌باشد [۷]. در چنین مثال‌هایی دو ماده به‌خوبی در یک‌دیگر حل می‌شوند، و در شرایط هم‌دما ترکیبی یک‌نواخت و همگن را ایجاد می‌کنند. اما زمانی که دمای محلول از یک‌سو به دیگرسویِ آن تغییر می‌کند، چگالی دو ماده دیگر یک‌نواخت نمی‌ماند؛ یک ماده بیش‌تر در ناحیهٔ گرم‌تر و دیگری در ناحیهٔ سردتر جمع می‌شوند [۶ و ۱۷]. یک سئوال پایه‌ای برای پژوهش‌گران، حالت حدیِ بسیار رقیق در چنین محلول‌هایی است [۷]. یعنی اگر برای مثال چگالی الکل بسیار کمتر از آب باشد، طوری که بتوان مطمئن بود احتمال برهم‌کنش ملکولیِ مستقیمِ الکل–الکل بسیار ناچیز است، مسئله به حرکت یک تَک ملکول الکل، در آب پیرامونِ آن فرومی‌کاهد. طبیعی است که اگر در یک آزمایش ذهنی، تک ملکول الکل را برداشته و با یک (یا چند) ملکول آب جای‌گزین نماییم، اثر سره عملا ناپدید می‌شود. یعنی ما با ظرفی که در آن تنها ملکول‌های آب قرار دارند مواجه خواهیم بود. اگر چنین ظرفی در معرض گرادیان دما قرار بگیرد، به دلیل تعادل مکانیکی، فشار در سرتاسر آن یک‌سان خواهدبود [۱۷]. در عین حال، به دلیل تراکم‌ناپذیری آب، چگالی آب نیز در تمامِ ظرف ثابت خواهد بود [۱۷]. یعنی، آن‌دسته از ملکول‌های آب که جایگزین ملکولِ الکل شده‌اند، با احتمال یک‌سان در هریک از دو ناحیهٔ گرم یا سرد قرار خواهند گرفت. اما زمانی که یک تک ملکولِ الکل در ظرفِ آب قرار دارد، احتمال قرار داشتنِ آن در دوناحیهٔ سرد و گرم متفاوت می‌شود. یعنی در حد محلولِ رقیق، ریشهٔ اثر سره مستقیما به تفاوت در ساختار ملکولِ الکل در مقایسه با ملکول‌های آب برمی‌گردد. به‌همین دلیل بخشی از پژوهش در این مورد به‌صورت مشخص به‌بررسی اثر ساختار یا درجات آزادیِ داخلی ملکول‌های حل‌شده بر اثر سُرِه اختصاص دارند [۱۸ و ۱۹]. برای مثال در مورد محلول بنزن +سایکلوهگزان، هردو ملکول بنزن و سایکلوهگزان به لحاظ هندسی تقارن دارند، و در داخل این ملکول‌ها شکست تقارن راست‌چپ، یا بالا–پایین رخ نداده‌است، که بتوان حرکت یک‌سویهٔ ملکول‌های مربوطه در حضور گرادیان دما را به شکست تقارن در داخل ملکول‌ها نسبت داد. در نتیجه ریشهٔ پدیده جایی میان تفاوت در درجات آزادی و ساختار داخلی دو ملکول می‌باشد.

سئوال چالش برانگیزی که بلافاصله طرح می‌شود، این است که آیا می‌توان برای بررسی این پدیده از معادلات مربوط به مادهٔ پیوسته– در این‌جا نَویِر–استوکس[2] و نیز لانژون[3] – استفاده کرد. دو معادلهٔ مذکور با فرضِ ساختار بسیار ریزِ سیال، در مقایسهٔ با ذراتی که در آن غوطه‌ور می‌باشند، نگاشته‌شده‌اند. حال اگر ریشهٔ مسئلهٔ سُرِه مربوط به تفاوت در ساختار ملکولی مادهٔ حل‌شده، با ملکول‌های حلال باشد، آیا این انتظار معقولی است که با استفاده از این معادله‌ها به بررسی اثر سُرِه بپردازیم؟ یا آن‌که باید از ابتدا و مستقیما با استفاده از شبیه‌سازی دینامیک ملکولی به بررسی این پدیده بپردازیم؟ این چالش آشنایی است که در بسیاری از مسئله‌هایی که با ریزسیال، و مواد حل شده‌ای در ابعاد چند نانومتر ($\sim 1\text{nm}$) یا کمتر سروکار دارند، وجود دارد [۲۰]. یک راه ساده برای روبروشدن با این چالش اعتماد به معادلات مربوط به مادهٔ پیوسته، و محاسبهٔ نتایج مربوطه و سپس مقایسهٔ آن‌ها با داده‌های تجربی موجود است. به تجربه دیده شده‌است که در موارد متعددی این مدل‌ها به‌خوبی کار می‌کنند، و می‌توانند بخشی از مشاهدات تجربی را توضیح بدهند [۱۲ و ۱۳]، اما در عین‌حال مواردی هم وجود دارند که برای این‌که بتوان اثر سُرِه را توصیف کرد، باید یک تصحیح مفهومی یا پدیده‌شناختی را در این معادلات در نظر گرفت

[1] Benzene + Cyclohexane
[2] Navier Stokes
[3] Langevin

[۲۱]، تصحیحی که بتواند اثر تقریب میدان میانگین[۱] را – که در هنگام استخراج معادلات مادهٔ پیوسته از ساختار گسسته به کار رفته‌است – جبران نماید.

اگر بخواهیم با استفاده از معادلات محیطِ پیوسته، اثر سره را در یک محلول دوتایی رقیقِ بررسی کنیم، یک روی‌کرد ساده استفاده از مدل جرم و فنرِ غوطه‌ور در سیال است. یعنی ملکول‌های غوطه‌ور را به صورت کره‌های صلبی که به‌واسطهٔ تعدادی فنر به یکدیگر متصل شده‌اند، در نظر بگیریم. سابقهٔ چنین شکلی از مدل‌سازی – حداقل – به بررسی رفتار ملکول‌های پلیمری در سیال برمی‌گردد. برای مثال، مدلِ زیم[۲] مدلی است که عناصر تشکیل دهندهٔ یک ملکولِ پلیمری به‌صورت کره‌های سختی که به‌واسطهٔ فنر به یک‌دیگر متصل شده و یک زنجیره را تشکیل داده‌اند، مدل می‌شوند. این مدل می‌تواند بخشی از رفتار تعادلی و ویسکوالاستیک[۳] محلول‌های پلیمری را توصیف نماید [۲۲] ، هرچند، این توصیف محدودیت‌هایی دارد و در شرایط غیرتعادلی استفاده از این مدل با محدودیت‌هایی مواجه می‌شود [۲۳] .

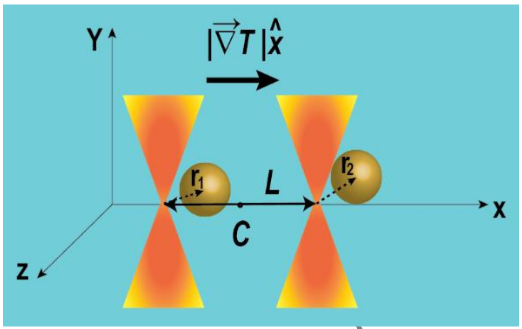
به عنوان ساده‌ترین مدل برای یک ملکولِ تنها، که در دریایی از سیال غوطه‌ور است، می‌توان دو کره را که با یک فنر به هم‌دیگر متصل شده‌اند، در نظر گرفت. برهم‌کنش فنری ساده‌ترین شکل از یک برهم‌کنشِ کلی است که می‌توان میانِ دو ذره تصور کرد. در غیاب گرادیان دما، این مجموعه، یعنی دو کرهٔ متصل با فنر، هیچ حرکت خالصی در جهت موازی یا مخالف گرادیان دما ندارد. دلیل این مطلب تقارن جهت است که هنوز به‌واسطهٔ یک میدان خارجی شکسته‌نشده‌است. اما وجود گرادیان دمایِ $\vec{\nabla}T = (\partial T / \partial x)\hat{x}$ تقارنِ $x \leftrightarrow -x$ را می‌شکند و می تواند موجب حرکت خالصِ این مجموعه در سیال شود. در این صورت انتظار این است که با بررسی حرکت تصادفی دو کره، که حال به‌واسطهٔ برهم‌کنش مستقیم فنری، و نیز برهم‌کنش‌های هیدرودینامیکی جفت شده‌اند، بتوان حرکت خالص این مجموعه را در جهت موازی یا مخالف گرادیان دما مشاهده کرد.

یکی از مزیت‌های غیربدیهیِ این مدل‌سازی ساده آن است که علاوه بر مطالعهٔ نظری، می‌تواند به صورت تجربی نیز موردِ مطالعهٔ مستقیم قرار بگیرد. یعنی اگر دو کره به ابعاد میکرومتر را با یک فنر نازک و انعطاف‌پذیر به یک‌دیگر متصل نماییم و درون سیال قرار بدهیم، معادلات حاکم بر حرکت آن‌ها همان معادله‌هایی خواهند بود که اگر دو کره با ابعاد چند نانومتر را با یک برهم‌کنش هم‌آهنگ[۴] به یکدیگر مقیدکرده و در سیال غوطه‌ور می‌ساختیم. حال آن‌که می‌توان دو کرهٔ میکرومتری را در زیر میکروسکوپ دید، و حرکت آن‌ها را ثبت‌کرد. درنتیجه می‌توان پیش‌بینی‌های نظری چنین مدل‌سازی ساده‌ای را در آزمایش‌گاه بررسی کرد. و سپس نتایج آن در ابعاد میکرومتر را تا ابعاد چند نانومتر تعمیم داد [۲۴] .

اما، برای آن‌که بتوان رفتار چنین مدل ساده‌ای را به شکل کامل ثبت‌کرد، لازم است که دو کره از محدودهٔ دید میکروسکوپ نیز خارج نشوند، این یک محدودیت آزمایش‌گاهی است. و برای‌همین چه در این مسئله، و چه در خانواده‌ای از مسائل مشابه، پژوهش‌گران ترجیح می‌دهند با استفاده از چند انبرکِ نوری[۵] کره‌ها را در آب مقید سازند، تا کره‌ها در ناحیهٔ کانونی میکروسکوپ باقی بمانند، و مکان آن‌ها با دقت قابل ثبت باشد. این قید تجربی، برای طیفی از آزمایش‌هایی که با ریزکره‌های غوطه‌ور در آب انجام شده‌است، مطرح می‌باشد؛ و البته محدودیت جدی هم ایجاد نمی‌کند. برای مثال، نخستین آزمایش مربوط به ریزشناگر سه‌کره‌ای که یکی از مشهورترین مدل‌ها برای ساختن ریزشناگر در ابعاد میکرومتر و پایین‌تر می‌باشد، با سه ریزکره انجام شد که هرکدام به‌وسیلهٔ یک انبرک نوری به دام افتاده بودند [۲۵] .

---

[1] Mean field
[2] Zimm
[3] viscoelastic
[4] harmonic
[5] Optical tweezer



شکل ۱. دو کره به شعاع a که هریک در یکی تلهٔ نوری به دام افتاده‌است. فاصلهٔ مرکز دو تله از هم L است و گرادیان دما موازی با خط واصل فرضی دو تله در جهت محور xها می‌باشد، $\vec{\nabla}T = (\partial T / \partial x)\hat{x}$.

حال آن‌که مدل اولیهٔ این شناگر شامل سه‌کره‌ای بود که در امتداد یک خط قرار گرفته و به‌جای تله‌های نوری با دو میلهٔ انعطاف‌پذیر به هم‌دیگر متصل شده بودند [۲۶] .

براین مبنا مدل مورد بررسی ما دو کرهٔ صلب به شعاع a می‌باشد که هرکدام با یک تله‌نوری با ضریبِ سختیِ یک‌سانِ K_S در دو نقطه از فضا مقید شده‌اند. ما این مجموعه را در معرض گرادیان دمای $\vec{\nabla}T = (\partial T / \partial x)\hat{x}$ قرار می‌دهیم، و سئوال این است که آیا جفت‌شدگی در حرکت دو کره در حضورِ گرادیانِ دما می‌تواند موجب اعمال یک نیرویِ خالص به سیال و ایجاد یک جریان دائمی در آن بشود؟

سابقهٔ بررسی دو کره که هریک به‌وسیلهٔ یک انبرک نوری مقیده شده‌اند، نخست به آزمایش مِینرز و کوئیک[1] در سال ۱۹۹۹ برمی‌گردد [۲۷] . هرچند در آن آزمایش میدان خارجی وجود ندارد، و حرکت تعادلی دوکره بررسی می‌شود، اما اثر برهم‌کنش هیدرودینامیکی به صورت یک هم‌بستگی غیربدیهی میان حرکت دو ذره خود را نشان داده‌است. بعد از آن چند آزمایشِ مشابه برای زمانی که حرکت دو کره از یک الگوی خاصِ تعیینی[2] [۲۸] ، یا تصادفی[3] [۲۹] تبعیت کند، ویا این‌که این مجموعه در معرض جریان سیال قرار داشته‌باشد [۲۴] ، انجام شده‌است.

در سال ۲۰۱۹ و در همکاری با آزمایش‌گاه چیکوتا، دو نفر از ما اثر جریان خارجیِ سیال را بر دو کره مقید شده – به وسیلهٔ انبرک نوری – بررسی کردیم [۲۴] . یکی از سئوال‌های مطرح شده در آن پژوهش این بود که آیا میدان خارجیِ جریانِ سیال می‌تواند اثر نابدیهی بر نیروی خالصی که دو کره به سیال وارد می‌کنند داشته‌باشد. حال در این پژوهش ما همین پرسش را وقتی میدان خارجی اعمال شده از جنسِ گرادیان دما باشد، تکرار می‌کنیم. مشخصا اگر اعمال گرادیان دما به مدل سادهٔ دوکره‌ای ما موجب این شود که نیروی خالصی به سیال وارد شود، می‌توان این محاسبه را به‌صورت مستقیم به اثر سُرِه، یعنی وقتی دو کرهٔ مقید با فنر می‌توانستند آزادانه در سیال حرکت کنند، مرتبط ساخت.

پیشینهٔ تحقیق در مورد کره‌های به دام افتاده در دو دمای مختلف به پژوهشِ س. چیلیبرتو[4] و هم‌کارانش سال ۲۰۱۴ بر می‌گردد. آن‌ها به مطالعهٔ هم‌بستگی دو کره که توسط دو انبرک نوری – در دو دمای موثرِ متفاوت – به دام افتاده‌بودند، پرداختند [۲۹]. آنها با اعمال یک نیروی تصادفی به یکی از کره‌ها به آن دمای موثر بالاتری نسب دادند [۳۰] . سپس با درنظر گرفتن برهم‌کنش هیدرودینامیکی کره‌ها و حل معادلات لانژون نتایج مربوط به خود هم‌بستگی[5] هر کره، و نیز هم‌بستگی متقابل[6] آنها در شرایط تعادل ترمودینامیکی را اصلاح کردند. در نهایت، آن‌ها به محاسبهٔ جریان انرژی منتقل شده از کرهٔ گرم‌تر به سردتر پرداختند. اما نیرویِ خالصِ واردشده به سیال، جریان سیال ناشی از گرادیان دما، و نیز ضریب سُرِه متغیرهایی هستند، که اساسا مورد بررسی چیلیبرتو و هم‌کارانش قرار نگرفتند.

ما به‌طور مشخص سه‌متغیر ذکرشده را بررسی می‌کنیم. در عین‌حال، از آن‌جایی که وابستگی مکانی دما، موجب وابستگی مکانی گرانروی[7] سیال می‌باشد، ما اثر وابستگی دمایی/مکانی گرانروی سیال را نیز بر محاسبات خود لحاظ می‌کنیم. بررسی

[1] Meiners & Quake
[2] deterministic
[3] stochastic
[4] S.Ciliberto
[5] Autocorrelation
[6] Cross-correlation
[7] Viscosity

گرانروی وابسته به مکان، یکی از مسائل پرتکرار در حوزهٔ مواد نرم و زیستی می‌باشد. به‌عنوان مثال میکروشناگرها در طبیعت (سلول‌ها وانواع باکتری‌ها) حین عبور از محیطی با گرانروی متفاوت تحت تاثیر قرار گرفته و جهت حرکت خود را تغییر می‌دهند [۳۱] . درست مانند انواع گرادیان نوری، شیمیایی، مغناطیسی، دمایی، گرانشی که منجر به حرکت خاص شناگر با عناوین مختلف مانند فوتوتاکسی[1]، کموتاکسی[2] و غیره می‌شوند، وجود گرادیان گرانروی نیز می‌تواند منجر به حرکت ویسکوتاکسی[3] برای سلول/شناگر زیستی شود. به همین منظور مقالات متعددی به بررسی حرکت تک شناگر غیرفعال[4] به شکل ریزکره و یا پیکربندی ترکیبی از ریزکره‌ها در گرانروی وابسته به دما/مکان پرداخته‌اند [۳۲-۳۴] . بررسی اثر گرادیان گرانروی روی تانسور اوسین در برهم‌کنش هیدرودینامیکی نیز توسط هلموت لون[5] و همکارانش حین بررسی اثر ویسکوتاکسی روی شناگرها در سال ۲۰۱۷ انجام شده‌است [۳۲]. همینطور در سال ۲۰۲۲ داس[6] به حل معادلهٔ استوکس در حضور نقاطی با وشکسانی متفاوت پرداخت و اختلال ناشی از این گسستگی گرانروی را روی میدان سیال بررسی کرده‌است [۳۵] . ما نیز با نظر گرفتن گرادیان گرانروی تلاش می‌کنیم، نیروی خالصی که دو کرهٔ مقید شده در مسئلهٔ ما به سیال‌وارد می‌کنند، و نیز ضریب سرهٔ مربوط به آن‌ها را اصلاح بنماییم.

۲. ساختار مسئله

چندان که گفته‌شد، ما دو ریزکره به شعاعِ a ($a \sim 1\mu m$) را که در سیال غوطه‌ور می‌باشند، و با دو تلهٔ نوری با سختی برابر K_S به‌دام افتاده‌اند، در نظر می‌گیریم. دو تله روی محور *x*ها قرار گرفته‌اند؛ و به‌اندازهٔ L از یک‌دیگر فاصله دارند. دمای متوسط این مجموعه حدودِ دمای اتاق ($T \sim 298^{\circ}\,\mathrm{Kelvin}$) می‌باشد، و با توجه به گرانروی آب که حدودِ $\eta \approx 10^{-3} kg/ms$ می‌باشد، مسئله در حد عدد رینولدز[7] پایین رخ می‌دهد [۳۶] . این یعنی می‌توانیم از جملات اینرسی در معادلات حرکت صرف‌نظر کنیم. در نتیجه معادلهٔ حرکت دو کره در جهت *x*ها به صورتِ دو معادلهٔ لانژون [۳۷] جفت‌شده در می‌آیند:

$$
\begin{aligned}
-K_S x_R + F_{R,x} + \zeta_R &= 0, \\
-K_S x_L + F_{L,x} + \zeta_L &= 0
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

در این معادله x_R (یا x_L) جابه‌جایی ریزکرهٔ سمتِ راست (یا چپ) از محل تلهٔ نوری مربوطه، $F_{R,x}$ (یا $F_{L,x}$) نیروی هیدرودینامیکی وارد شده به ریزکرهٔ سمتِ راست (یا چپ)، و نیز ζ_R (یا ζ_L) نوفهٔ افت‌وخیز کنندهٔ وارد شده به ریزکرهٔ راست (یا چپ) می‌باشند.

مجموعه دو کرهٔ و سیال پیرامون آن‌ها، در معرض گرادیان دمای $\vec{\nabla}T = (\partial T/\partial x)\hat{x}$ قرار گرفته‌اند، که $(\partial T/\partial x) > 0$. یعنی اگر دمای نقطهٔ *C* در وسط دو تله‌را T_0 بنامیم، دما در محل تلهٔ سمت راست $T_R = T_0 + (\partial T/\partial x) \times L/2$ و در محل تلهٔ سمتِ چپ $T_L = T_0 - (\partial T/\partial x) \times L/2$ خواهد بود. این اختلاف دما به معنای تفاوت در شدت افت و خیز گرمایی برای دو کره، و نیز تغییر در گرانروی سیال می‌باشد. با توجه به رفتار کاهشی گرانروی برحسب دما در اغلب سیالات [۳۸ و ۳۹]، گرانروی سیال در محل کرهٔ سمت راست کمتر از مقدار آن در محل کرهٔ سمت چپ می‌باشد. تغییر در شدت افت‌وخیز و گرانروی سیال، به طورِ مستقیم در نیروی هیدرودینامیکی که به دو کره وارد می‌شود، تاثیر می‌گذارد، و تقارن مسئله را می‌شکند.

در عین‌حال، تغییر دما به معنای تغییر در ضریب شکست سیال نیز می‌باشد. این یعنی سختی فنری تله‌های نوری – که اساسا به دلیل تفاوت در ضریب شکستِ‌نوری ریزکره‌ها با سیال پیرامون آن‌ها رخ می‌دهد – در میان دو تله متفاوت خواهد بود، $K_{S,R} \neq K_{S,L}$. اما به دلیل این‌که این مسئله مدلی ساده برای مسئلهٔ دو کره است که با یک فنر با ضریب سختی مشخص به

---

[1] Phototaxis
[2] Chemotaxis
[3] Viscotaxis
[4] Passive swimmer
[5] Hartmut Löwen
[6] Das
[7] Reynolds number

همدیگر متصل شده‌اند، و در آن‌حالت به‌دلیلِ جنس نیروی میان دو کره – که از قانون سوم نیوتن پیروی می‌کند – وابستگی نیرو برحسب جابه‌جایی برای هر دو کره یک‌سان می‌باشد. در نتیجه ما در این مسئله ضریب سختی دو تله را برابر فرض می‌کنیم، $K_{S,R} = K_{S,L}$.

در نهایت، تنها برای سادگی و بدون از دست دادن کلیت مسئله، ما خود را به حرکت دو ریزکره در جهت افقی محدودکرده، و از حرکت سه‌بعدی آن‌ها صرف‌نظر کرده‌ایم. محاسبات ما که در مورد حرکت دو ریزکره در حضور جریان سیال (یعنی میدانِ خارجی، جریان سیال است) انجام شده‌است، این انتظار را تایید می‌کنند که محدودکردن مسئله به یک بعد، کلیت نتیجهٔ اصلیِ آن را تغییر نمی‌دهد [۲۴ و ۴۰]. مشخصا حل مسئله در سه‌بعد نتیجه‌ای مشابه با حل یک‌بعدی آن دارد، که تنها روی تعداد بیش‌تری از درجات آزادی جمع خورده‌است. در نتیجه اندازهٔ متغیرهای مربوطه‌افزایش یافته‌است، بی‌آنکه تغییر علامتی مشاهده‌شود، یا به‌لحاظ مفهومی تغییری رخ‌دهد.

۳. نیروهای هیدرودینامیکی و افت‌وخیزگرمایی: تانسور اوسین[1]

برای حل دو معادلهٔ لانژون جفت‌شده، معادلهٔ (۱)، لازم است وابستگی نیروهای هیدرودینامیکی و نیز نوفه را بشناسیم. به‌دلیل عدد رینولدز پایین، معادلهٔ حاکم بر سیال شکل خطی‌شدهٔ معادلهٔ نویِ‌استوکس می‌باشد[۱۷].

$$-\vec{\nabla}\ P + \vec{\nabla}.\left(\eta\ [\vec{\nabla}\ \vec{V} + (\vec{\nabla}\ \vec{V})^{T}]\right) = -\vec{f} \qquad (۲)$$

در این‌جا، P فشار سیال، η گرانروی آن، $\vec{V}$ میدان سرعت سیال، و $\vec{f}$ چگالیِ نیرویی است که به واسطهٔ میدان نیروی خارجی، یا ذرات خارجی معلق در سیال به‌آن‌وارد می‌شود. اگر η وابستگی فضایی نداشته‌باشد، با عمل‌گر $\vec{\nabla}$ جابه‌جا می‌شود، و پس از کمی محاسبه [۱۷]، معادلهٔ (۱) ساده‌شده و آن‌چه به معادلهٔ استوکس مشهور است [۴۱]، به دست می‌آید:

$$-\vec{\nabla}\ P(\vec{r}) + \eta\nabla^2\vec{V}(\vec{r}) = -\vec{f}(\vec{r}) \qquad (۳)$$

برای مسئلهٔ N ریز ذرهٔ معلق در سیال، می‌توان نیروی ناشی از هر ذره را به صورت یک تابع دلتای دیراک در نظر گرفت،و در این‌صورت چگالی نیروی شکل عمومیِ:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \sum_{i=1,\dots,N} \vec{f}_i\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_i) \qquad (۴)$$

را خواهد داشت، که $\vec{f}_i\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_i)$ نشان دهندهٔ چگالی نیرویی است که ذرهٔ iام در نقطهٔ $\vec{r}_i$ به سیال وارد می‌کند. در مسئلهٔ ما سیال تا بی‌نهایت امتداد دارد، و سرعت سیال نیز در بی‌نهایت صفر می‌باشد. در این‌صورت برای بررسی اثر ذرهٔ iام بر میدان سرعت سیال، باید معادلهٔ:

$$-\vec{\nabla}P(\vec{r}) + \eta\nabla^2\vec{V}(\vec{r}) = -\vec{f}_i\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_i) \qquad (۵)$$

را با شرط مرزی فشار و سرعت صفر در بی‌نهایت حل کرد. که جواب شناخته شدهٔ استوکس‌لت، برای فشار:

$$P(\vec{r}) = \vec{f}_i.\vec{r}\,/\,(4\pi\,|\,r\,|^3), \qquad (۶\text{-الف})$$

و سرعت سیال:

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{\vec{f}_i}{8\pi\eta}.\left(\frac{\hat{I}}{|\vec{r}\,|} + \frac{\overleftrightarrow{rr}}{|\vec{r}\,|^3}\right) \qquad (۶\text{-ب})$$

به‌دست می‌آید [۳۶ و ۴۲]، در این رابطه $\hat{I}$ تانسور همانی است. این حل ریشهٔ شکل عمومی تانسور اوسین است که نیروی وارد شده از سوی هر ذره را به سرعت سیال در هر نقطهٔ دل‌خواه از فضا، و از این طریق به سرعت سیال در مکان ذرات دیگر مربوط می‌سازد. مشخصا اگر شرط مرزی بدون لغزش روی سطح ریزذرات برقرار باشد، سرعت سیال در محل هریک از ذرات برابر با سرعت همان ذره خواهد بود، و درنتیجه با معادلات جفت شدهٔ:

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^{N} M_{ij}\vec{f}_j \qquad (۷)$$

روبرو خواهیم بود که $\dot{\vec{r}}_i$ سرعت ذرهٔ دل‌خواه *i*ام ، و $\overrightarrow{f_j}$ نیروی هیدرودینامیکی وارد شده از سوی ذرهٔ *j*ام به سیال می‌باشند. به‌طور مشخص عناصر تانسور اوسین را می‌توان به شکل زیر تعریف کرد:

[1] Oseen tensor

$$
M_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{6\pi\eta a} & i = j \\ \dfrac{1}{8\pi\eta}\left(\dfrac{1+e_{ij}e_{ij}}{r_{ij}}\right) & i \neq j \end{cases} \qquad (۸)
$$

که r_{ij} اندازهٔ برداری است که هر جفت ذره را به هم وصل می‌کند و e_{ij} بردار یکه در این راستاست.

تصویر ذهنی که به معادلهٔ (۷) می‌انجامد، شامل این تقریب است که اولا ابعاد ریز ذرات از هر طول فیزیکی دیگر در مسئله به‌اندازهٔ کافی کوچک‌تر است، در نتیجه می‌توان ذرات را به صورت نقاط مادی، و نیروی واردشده از سوی آن‌ها به سیال را به صورت نیروی نقطه‌ای در نظر گرفت. هم‌چنین گرانروی ذرات وابستگی مکانی نداشته، و در تمام سیال مقدار مشخصی دارد.

همانطور که از رابطهٔ (۷) می‌توان مشاهده کرد، سرعت هر ذره ترکیب خطی است از نیرویی که همان کره به سیال وارد می‌کند به اضافهٔ تصحیح میدان سرعت سیال به واسطهٔ نیروهایی که بقیهٔ ذرات به سیال وارد می‌کنند. یعنی اگر تنها یک ذره به سیال نیروی $\vec{f}$ وارد می‌کرد سرعت آن ذره برابر بود با $\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{f}}{6\pi\eta a}$ ، اما حضورذرات دیگر این سرعت را به صورت خطی تصحیح می‌کند.

ما ابتدا مسئله حرکت جفت‌شده دو ذره در حضور گرادیان دما را با همین شکل از تانسور اوسین حل کرده و در مورد نتایج فیزیکی آن بحث می‌کنیم. سپس اثرات ناشی از وابستگی گرانروی به مکان را به صورت یک تصحیحِ مرتبهٔ اول روی نتایج خود بررسی می‌نماییم.

۳.۱ محاسبهٔ نیروی هیدرودینامیکی وارد شده به هریک از دو کره، برای حالت دل‌خواه حرکتی

همانطور که قبلا بیان شد، در مسئلهٔ مورد بررسی ما مرکز تله‌های نوری روی محور $\hat{x}$ ها واقع شده‌است و کره‌ها محدود به حرکت در راستای $\hat{x}$ هستند. یعنی نیرویی که هر کره به سیال پیرامون خود وارد می‌کند در راستای خط واصل آنها (محور $\hat{x}$) می‌باشد، در نتیجه می‌توان تانسور اوسین را برای این مسئله بصورت یک ماتریس 2×2 نوشت:

$$
\begin{pmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{x}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_R \\ F_L \end{pmatrix} \qquad (۹)
$$

که عناصر تانسور فوق عبارت‌اند از:

$$
M_{11} = M_{22} = \frac{1}{6\pi\eta a}, \qquad M_{12} = M_{21} = \frac{2}{8\pi\eta r} \qquad (۱۰)
$$

می‌توان رابطهٔ (۹) را بصورت:

$$
\begin{pmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{x}_L \end{pmatrix} = \left\{ \frac{I}{6\pi\eta a} + \frac{1}{8\pi\eta r} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} F_R \\ F_L \end{pmatrix} \qquad (۱۱)
$$

بازنویسی کرد که در آن I تانسور همانی 2×2است. ما در این مسئله فاصلهٔ بین دو کره را بصورت $r = L + x_R - x_L$ تعریف می‌کنیم و خود را به افت و خیزهای کوچک یعنی $x_R, x_L \ll L$ محدود می‌کنیم، از طرفی فرض می‌کنیم شعاع دوکره از فاصلهٔ بین آن دو خیلی کوچکتر باشد، ($a \ll r$) . در نهایت می‌توانیم با معکوس کردن تانسور اوسین (پیوست) و بسط دادن روابط تا مرتبهٔ اول نسبت به ε ، نیروی هیدرودینامیکی که هر کره به سیال وارد می‌کند را محاسبه کنیم:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} F_R \\ F_L \end{pmatrix} &= M^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{x}_L \end{pmatrix} = \\
& 6\pi\eta a \begin{pmatrix} \dot{x}_R - 2\,\varepsilon\,\dot{x}_L \\ \dot{x}_L - 2\,\varepsilon\,\dot{x}_R \end{pmatrix} \\
& + 6\pi\eta a \begin{pmatrix} 2\,\varepsilon\,\dfrac{x_R - x_L}{L}\dot{x}_L \\ 2\,\varepsilon\,\dfrac{x_R - x_L}{L}\dot{x}_R \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2)
\end{aligned} \qquad (۱۲)
$$

در رابطهٔ بالا $\varepsilon = 3a/4L$ ، معیاری از قدرت برهم‌کنش هیدرودینامیکی بین کره‌ها می‌باشد. نیرویی که به هرکره از سمت سیال وارد می‌شود قرینهٔ نیرویی است که هر کره مطابق با رابطهٔ (۱۲) به سیال وارد می‌کند.

۳.۲ محاسبهٔ هم‌بستگی میان نوفهٔ کرهٔ راست با نوفهٔ کرهٔ چپ (دو خود هم‌بستگی، و یک هم‌بستگی متقابل)

در شرایط تعادل ترمودینامیکی و در غیاب هر گونه عامل اختلالی خارجی می‌توانیم به کمک قضیهٔ همپاری انرژی به

بررسی رفتار آماری نیروی نوفهٔ سیال در محل هر کره، بپردازیم. در این شرایط هر کدام از کره‌ها که مقید به فنری با ضریب سختی K_S شده‌اند مستقل از یکدیگر به افت و خیز حول نقطهٔ تعادل می‌پردازند:

$$\begin{cases} \langle x_R{}^2(t)\rangle = \langle x_L{}^2(t)\rangle = k_B T / K_S, \\ \langle x_R(t) x_L(t)\rangle = \langle x_R(t)\rangle \langle x_L(t)\rangle = 0 \end{cases} \qquad (۱۳)$$

در حضور گرادیان دمایی $\vec{\nabla} T = (\partial T / \partial x)\hat{x}$ فرض می‌کنیم که هریک از کره‌ها در دمای مکان خود یعنی T_R و T_L تعادل موضعی حرارتی دارند، یعنی:

$$\begin{cases} \langle x_R{}^2(t)\rangle = k_B T_R / K_S, \\ \langle x_L{}^2(t)\rangle = k_B T_L / K_S \end{cases} \qquad (۱۴)$$

در نتیجه کافی است با حل معادلات جفت شدهٔ لانژون به محاسبهٔ متوسط مربع جابجایی هر کره بپردازیم و نتیجه را با رابطهٔ (۱۴) تطبیق دهیم، در این صورت می‌توانیم همبستگی متقابل بین نوفهٔ سیال در مکان دو کره را بدست آوریم:

$$\langle \zeta_R(t)\zeta_L(t')\rangle = 2k_B T_0(-6\pi\eta a \times 2\varepsilon)\delta(t-t') \qquad (۱۵)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود جملهٔ داخل پرانتز همان عنصر قطر فرعی تانسور اوسین است. یعنی:

$$\langle \zeta_R(t)\zeta_L(t')\rangle = 2k_B T_0 \hat{M}_{ij}^{-1}\delta(t-t') \qquad (۱۶)$$

در واقع از آنجایی که نیروی نوفه در بستر سیال شکل گرفته‌است، اثر آن نیز با همان تانسور اوسین منتقل می‌شود. به همین ترتیب همبستگی نیروی نوفه در مکان هر کره عبارت است از:

$$\begin{cases} \langle \zeta_R(t)\zeta_R(t')\rangle = 2k_B T_R(6\pi\eta a)\delta(t-t'), \\ \langle \zeta_L(t)\zeta_L(t')\rangle = 2k_B T_L(6\pi\eta a)\delta(t-t') \end{cases} \qquad (۱۷)$$

۴. حل معادلات لانژون، بدونِ وابستگی دمایی گرانروی،

در گام نخست از وابستگی دمایی در گرانروی سیال صرف‌نظر می‌کنیم، در این‌صورت تنها اثر گرادیان دمایِ غیر صفر به‌صورت تفاوت میان شدت افت‌وخیز گرمایی در محل دو کره خواهد بود. به منظور نشان دادن این تفاوت به کمک روابط (۱۲) نیروی هیدرودینامیکی که به هر کره وارد می‌شود را در معادلات رابطهٔ (۱) جایگذاری می‌کنیم. در نتیجه معادلات جفت‌شدهٔ لانژون به شکل زیر در می‌آیند:

$$\begin{aligned} 0 &= -K_S x_R - 6\pi\eta a\{(\dot{x}_R - 2\varepsilon\dot{x}_L) \\ &\quad + 2\varepsilon \frac{x_R - x_L}{L}\dot{x}_L\} + \zeta_R(t), \\ 0 &= -K_S x_L - 6\pi\eta a\{(\dot{x}_L - 2\varepsilon\dot{x}_R) \\ &\quad + 2\varepsilon \frac{x_R - x_L}{L}\dot{x}_R\} + \zeta_L(t) \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

در حالت همدما، $T_R = T_L$ ، می‌توان دستگاه معادلات (۱۸) را قطری کرد. به این منظور به پایهٔ:

$$\begin{cases} \Delta x = x_R - x_L, \bar{x} = (x_R + x_L)/2 \\ \Delta\zeta = \zeta_R - \zeta_L, \bar{\zeta} = (\zeta_R + \zeta_L)/2 \end{cases} \qquad (۱۹)$$

می‌رویم. در حضور گرادیان دما نیز این پایه‌ها بسیار در حل مسئله کمک کننده هستند:

$$\begin{aligned} 0 &= -K_S\bar{x} - 6\pi\eta a\{\dot{\bar{x}}(1 - 2\varepsilon) \\ &\quad + 2\varepsilon \frac{\Delta x}{L}\dot{\bar{x}}\} + \bar{\zeta}(t), \\ 0 &= -K_S\Delta x - 6\pi\eta a\{\Delta\dot{x}(1 + 2\varepsilon) \\ &\quad + 2\varepsilon \frac{\Delta x}{L}(\Delta\dot{x})\} + \Delta\zeta(t) \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

دو معادلهٔ بالا این اجازه را به ما می‌دهند که دستگاه معادلات را بصورت اختلالی تا مرتبهٔ دلخواه ε حل کنیم.

با حفظ تنها جملات خطی بر حسب جابجایی کره‌ها و تعریف $\gamma = 6\pi\eta a$ و $\tau = \gamma / K_S$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= \Delta x(0) e^{-\frac{t}{\tau(1+2\varepsilon)}} \\ &\quad + \int_0^t \left(\frac{\Delta\zeta(s)}{\gamma(1+2\varepsilon)} e^{-\frac{t-s}{\tau(1+2\varepsilon)}}\right) ds \end{aligned} \qquad (\text{۲۱–الف})$$

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \bar{x}(0) e^{-\frac{t}{\tau(1-2\varepsilon)}} \\ &\quad + \int_0^t \left(\frac{\bar{\zeta}(s)}{\gamma(1-2\varepsilon)} e^{-\frac{t-s}{\tau(1-2\varepsilon)}}\right) ds \end{aligned} \qquad (\text{۲۱–ب})$$

زمانی‌که $t \gg \tau$ ، جملات مربوط به شرایط اولیه در جواب‌ها به سمت صفر میل می‌کند، و آن بخش از جواب‌ها باقی می‌مانند که به هم‌بستگی‌ها، و متوسط‌های پایای سیستم (steady correlations, and averages) مربوط می‌شوند. ما ابتدا به محاسبهٔ هم‌بستگی‌ها در غیاب شرایط اولیه می‌پردازیم؛ سپس برمبنای آن‌ها رفتارهای پایایِ مجموعه را محاسبه می‌کنیم.

برای حل عمومی مجموعه معادلات (۲۰) ، می‌توان با استفاده از بسط اختلالی بر حسب توان‌های ε به حل مراتب بالاتر نزدیک شد:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x}_0 + \varepsilon \bar{x}_1 + O(\varepsilon^2), \\ \Delta x &= \Delta x_0 + \varepsilon \Delta x_1 + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

باید توجه داشت که ما در حین نوشتن معادلات (۲۰) از تانسور اوسینی استفاده کردیم که بسط آن تنها تا مرتبهٔ اول نسبت به ε نگه داشته شده بود، بنابراین در بسط جابجایی‌ها نیز توجه می‌کنیم که به این قرارداد پایبند بمانیم. با برگرداندن روابط (۲۲) در معادلات پایه و مساوی قرار دادن ضرایب توان‌های برابر ε معادلهٔ متناسب با هر مرتبه از اختلال به دست می‌آید. به‌عنوان مثال پاسخ معادلهٔ مربوط به جملات مرتبهٔ صفر مربوط به $\bar{x}$ برابر است با ($t \gg \tau$):

$$\bar{x}_0(t) = \int_0^t \frac{\bar{\zeta}(s)}{\gamma} e^{-\frac{t-s}{\tau}} ds \qquad (۲۳)$$

با جایگذاری مجدد نتایج مرتبهٔ صفر به روش بازگشتی می‌توان معادلهٔ مربوط به $\bar{x}_1$ را بصورت زیر نوشت:

$$\dot{\bar{x}}_1 + \frac{1}{\tau}\bar{x}_1 = 2\left(1 - \frac{\Delta x_0(t)}{L}\right)\left(-\frac{\bar{x}_0(t)}{\tau} + \frac{\bar{\zeta}(t)}{\gamma}\right) \qquad (۲۴)$$

می‌توان نشان داد اگر در رابطهٔ بالا از جملهٔ $\Delta x_0(t)$ صرف‌نظر کنیم، و معادله را برای $\bar{x}_1$ حل کنیم، حاصل همان چیزی می‌شود که اگر رابطهٔ (۲۱-ب) را بر حسب ε بسط دهیم و نتیجه را تا مرتبهٔ اول نگه داریم. این کار معادل این است که در اعلام نتیجهٔ $\bar{x}$ تنها خود را به محدود به افت و خیز مربوط به همان متغیر کنیم و از اثر جملات ضربی $\bar{\zeta}(t)\Delta\zeta(t)$ صرف نظر کنیم. تمام این استدلال در مورد متغیر Δx نیز صادق است.

۴.۱ محاسبهٔ هم‌بستگی‌ها،

با توجه به تعریف جابجایی نسبی و متوسط کره‌ها می‌توانیم جابجایی هر کره را در فضای حقیقی بصورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned} x_L &= \bar{x} - \Delta x / 2, \\ x_R &= \bar{x} + \Delta x / 2 \end{aligned} \qquad (۲۵)$$

اکنون می‌توانیم خود همبستگی هر کره را بر حسب همبستگی‌های مربوط به Δx و $\bar{x}$ بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned} &< x_L(t) x_L(t') > = \\ &< \bar{x}(t)\bar{x}(t') > + \frac{1}{4} < \Delta x(t)\Delta x(t') > \\ &- \frac{1}{2} < \bar{x}(t)\Delta x(t') + \bar{x}(t')\Delta x(t) > \end{aligned} \qquad (۲۶)$$

خودهمبستگی کرهٔ راست نیز مانند رابطهٔ(۲۶) است با این تفاوت که علامت جملهٔ سوم مثبت است. به کمک روابط (۲۱) می‌توانیم همبستگی‌های مورد نیاز در رابطهٔ (۲۶) را بدست آوردیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &< x_L(t) x_L(t+\Delta t) >= \\ &\frac{K_B}{2K_S}\left(T_0 - \frac{T_R - T_L}{2}\right)\left(e^{-\frac{\Delta t}{\tau(1-2\varepsilon)}} + e^{-\frac{\Delta t}{\tau(1+2\varepsilon)}}\right) \\ &= \frac{K_B T_L}{2K_S}\left(e^{-\frac{\Delta t}{\tau(1-2\varepsilon)}} + e^{-\frac{\Delta t}{\tau(1+2\varepsilon)}}\right) \end{aligned} \qquad (۲۷)$$

همانطور که واضح است در حالت همدما، یعنی $T_R = T_L$ ، به نتیجهٔ آشنای مینرز و کوئیک [۳۵]. می‌رسیم. می‌توان ملاحظه کرد در حد $\Delta t \to 0$ هر دو تابع نمایی به یک میل می‌کنند، و متوسط افت و خیز کرهٔ چپ برابر با همان مقداری است که از قضیهٔ همپاری انرژی سراغ داریم:

$$< x_L^2(t)) > = \frac{K_B T_L}{K_S} \qquad (۲۸)$$

اکنون برای محاسبهٔ خود همبستگی کرهٔ راست کافی است در رابطهٔ (۲۶) جای اندیس L و R را عوض کنیم، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &< x_R(t) x_R(t+\Delta t) >= \\ &\frac{K_B}{2K_S}\left(T_0 - \frac{T_L - T_R}{2}\right)\left(e^{-\frac{\Delta t}{\tau(1-2\varepsilon)}} + e^{-\frac{\Delta t}{\tau(1+2\varepsilon)}}\right) \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

همانطور که انتظار داریم کرهٔ راست که در دمای بالاتری نسبت به کرهٔ چپ قرار گرفته‌است با دامنهٔ بیشتری نسبت به آن افت و خیز می‌کند (پرانتز اول در رابطهٔ بالا برابر است با T_R).

در گام آخر می‌توانیم همبستگی متقابل بین کره‌ها را بدست آوریم:

$$< x_L(t)x_R(t') > = < \bar{x}(t)\bar{x}(t') > - \frac{1}{4} < \Delta x(t)\Delta x(t') > + \frac{1}{2} < \bar{x}(t)\Delta x(t') - \bar{x}(t')\Delta x(t) > \qquad (۳۰)$$

با جایگذاری هم‌بستگی‌های مورد نیاز در رابطهٔ بالا می‌توان نوشت:

$$< x_L(t)x_R(t+\Delta t) > = \frac{K_B T_L}{2K_S} \times (e^{-\frac{\Delta t}{\tau(1-2\varepsilon)}} - e^{-\frac{\Delta t}{\tau(1+2\varepsilon)}}) \qquad (۳۱)$$

دوباره با تبدیل L و R به یکدیگر آخرین وابستگی متقابل بصورت زیر بدست می آید:

$$< x_R(t)x_L(t+\Delta t) > = \frac{K_B T_R}{2K_S} \times (e^{-\frac{\Delta t}{\tau(1-2\varepsilon)}} - e^{-\frac{\Delta t}{\tau(1+2\varepsilon)}}) \qquad (۳۲)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود تنها اختلاف در دو همبستگی متقابل محاسبه شده در بالا تفاوت در دمای دو کره است، بطورکلی در حالت هم دما این دو رابطه هیچ تفاوتی با هم ندارند و نمودارهای آنها کاملا روی هم قرار می‌گیرند.

۴.۲ محاسبهٔ نیروی خالص که در جهت افقی به سیال وارد می‌شود،

برای محاسبهٔ نیروی خالصی که به سیال وارد می شود، با توجه به تقارن موجود در راستای y و z می‌توان استدلال کرد که نیازی به محاسبهٔ نیرو در این دو راستا نیست، چون متوسط آنها صفر خواهد بود. اما برای محاسبهٔ نیروی افقی کافی است اولین جملات غالب در نتایج نیروی هیدرودینامیکی دو کره را در رابطهٔ (۱۲) نظر بگیریم:

$$F_{NQ} = F_R + F_L = \gamma \times \frac{4\varepsilon}{L} (\frac{x_R\dot{x}_L - x_L\dot{x}_R}{2}) \qquad (۳۳)$$

که NQ، *نمایندهٔ* Non-Equilibrium *می‌باشد.* عبارت داخل پرانتز در رابطهٔ بالا نرخ سطح جاروب شده در فضای فاز دو بعدی $x_R - x_L$ جابجایی کره‌ها می‌باشد. ما متوسط آنسامبلی آن‌را متغیر روبش نامیده‌ایم [۲۴]:

$$S_G = \left\langle \frac{x_R\dot{x}_L - x_L\dot{x}_R}{2} \right\rangle \qquad (۳۴)$$

در شرایطی که هیچ عامل بیرونی تقارن مسئله را به هم نزند، $S_G = 0$ می‌باشد. این یعنی F_{NQ} حول صفر نوسان می‌کند، و متوسط آن صفر می‌باشد. اما در شرایط مسئلهٔ ما که گرادیان دما، تقارن راست–چپ را شکسته‌است، می‌توانیم به محاسبهٔ مقدار آن بپردازیم.

با استفاده از جفت معادلات (۲۰) (البته بصورت خطی شده) و معادلات (۲۴) می‌توان متغیر روبش را برحسب جابجایی نسبی و متوسط بازنویسی کنیم:

$$2\times S_G = < x_R\dot{x}_L - x_L\dot{x}_R > = < \dot{\bar{x}}\,\Delta x - \bar{x}\,\dot{\Delta x} > = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta x(t)\bar{x}(t+\Delta t) - \bar{x}(t)\Delta x(t+\Delta t)}{\Delta t} \qquad (۳۵)$$

و با استفاده از روابط (۲۱) می‌توان حاصل را بصورت زیر محاسبه کرد:

$$S_G = -\varepsilon(D_R - D_L) \qquad (۳۶)$$

که $D_i = K_B T_i / \gamma$ ضریب پخش کرهٔ iام است. در نتیجه متوسط نیروی افقی خالص برابر خواهدبود با:

$$\left\langle \vec{F}_{NQ} \right\rangle = -4\varepsilon^2 K_B \vec{\nabla} T \qquad (۳۷)$$

مشخص است که در عدم حضور گرادیان دما متوسط نیرویی که به سیال وارد می‌شود صفر است اما در حضور گرادیان دما جریانی از ناحیهٔ گرم سیال به ناحیهٔ سرد برقرار می‌شود.

اما آیا نیروی بدست آمده در رابطهٔ (۳۷) منطقی به نظر می‌رسد؟ ما انتظار داریم که نیروی کل متناسب با قرینهٔ گرادیان افت و خیز حرارتی دو کره باشد، از آنجایی که دامنهٔ افت و خیز گرمایی در مکان کرهٔ راست بیشتر از کرهٔ چپ است انتظار می‌رود که نیرویی سیال را از ناحیهٔ گرمتر به ناحیهٔ سردتر هل دهد. از طرفی از آنجایی که برهم‌کنش هیدرودینامیکی عامل ایجاد این نیرو است پس حاصل باید با a^2 یعنی حاصل‌ضرب شعاع دو کره متناسب باشد. عامل بدون بعدی که بر حسب شعاع کره‌ها و فاصلهٔ بین آنهاست و همچنین شدت برهمکنش را نشان می‌دهد ε است، در نتیجه انتظار داریم حاصل متوسط نیروی خالص با ε^2 متناسب باشد.

اگر به محاسبهٔ فشار و میدان سرعت سیال در فواصل دور علاقه‌مند باشیم، $\left\langle \vec{F}_{NQ} \right\rangle$ به عنوان چشمه‌ای برای جملهٔ غالب در نتایج مربوط به نیروی نقطه‌ای اثر خواهد کرد:

$$\left\langle P(\vec{r})\right\rangle = \frac{1}{4\pi}\vec{r}.\frac{\left\langle \vec{F}_{NQ}\right\rangle}{|\vec{r}|^3} \qquad \text{(۳۸–الف)}$$

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi\eta}\left(\frac{\left\langle \vec{F}_{NQ}\right\rangle}{|\vec{r}|} + \frac{\left\langle \vec{F}_{NQ}\right\rangle.\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\vec{r}\right) \qquad \text{(۳۸–ب)}$$

۴.۳ محاسبهٔ سرعت سیال در مرکز دو تله

علاوه بر فواصل دور، محاسبهٔ سرعت سیال در مرکز دو تله نیز از اهمیت برخوردار است. زیرا در حالتی که دمای سیال برای هر دو کره یکسان است و شرایط کاملا متقارن است انتظار داریم که سرعت در مرکز خط واصل دو کره حول صفر نوسان داشته باشد. اما در حضور گرادیان دمایی چه اتفاقی می‌افتد؟ با در نظر گرفتن تقریب استوکس–لت برای کره‌ها می‌توانیم سرعت را در نقطهٔ *C* محاسبه کنیم:

$$\vec{V}_R = \frac{1}{8\pi\eta}\left\{\frac{F_R\hat{x}}{(\frac{L}{2}+x_R)} + \frac{F_R\hat{x}.\hat{x}}{(\frac{L}{2}+x_R)}\right\},$$
$$\vec{V}_L = \frac{1}{8\pi\eta}\left\{\frac{F_L\hat{x}}{(\frac{L}{2}-x_L)} + \frac{F_L\hat{x}.\hat{x}}{(\frac{L}{2}-x_L)}\right\} \qquad (۴۰)$$

در نتیجه مجموع سرعت ناشی از حرکت کرهٔ راست و چپ در نقطهٔC برابر است با:

$$\left\langle \vec{V}_C\right\rangle = \frac{24\varepsilon^2}{L}\left\langle x_R\dot{x}_L - x_L\dot{x}_R\right\rangle = -2\times\frac{24\varepsilon^3K_B}{\gamma}\vec{\nabla}\,T \qquad (۴۱)$$

نتیجهٔ بدست آمده دوباره متناسب با متغیر روبش شده‌است، بنابراین انتظار داریم زمانی سرعت غیر صفر داشته‌باشیم که عاملی تقارن مسئله را شکسته‌باشد.

۵. ارتباط با ضریب سره،

درحالت کلی، ضریب سُرِه تنها تابع سرعتِ رانِش ذرات در حضور گرادیان دما نمی‌باشد، و محاسبهٔ آن می‌تواند پیچدگی‌های بیشتر داشته‌باشد [۴۳]. اما این پیچدگی‌ها ریشه در محاسبات ترمودینامیک غیر تعادلی دارند، در بسیاری از موارد، می‌توان از این پیچیدگی‌ها صرف‌نظر کرد، و به سادگی ضریب سُرِه را به سرعت سوق[1] مربوط ساخت. در این‌صورت اگر سرعت رانش یک ذره، ملکول، یا ... در حضور گرادیان دما به صورت $V_{drift} = cte\ \vec{\nabla}T$ بیان شود، این سرعت به‌طور مستقیم به ضریب سُره مربوط می‌شود [۱۲]:

$$V_{drift} = -S_T D\vec{\nabla}T \qquad (۴۲)$$

درنتیجه ضریب سره به سادگی:

$$S_T = -cte/D \qquad (۴۳)$$

به دست می‌آید.

تا این‌جا در مسئلهٔ ما چیزی به نام سرعت سوق وجود ندارد، و برعکس هردو کره به دام افتاده‌اند. اما می‌توان نیروی متوسطی که دو کره به سیال وارد می‌کنند، $\left\langle \vec{F}_{NQ}\right\rangle$، را برای محاسبهٔ سرعت سوق آن‌ها، در حالتی که در دام تله‌های نیافتاده بودند، اما با یک فنر نرم به‌ک‌دیگر متصل بودند، به کار برد. فرض می‌کنیم، میدان سرعت خارجی سیال، $V_0\hat{x}$ ، نیز در مسئلهٔ ما وجود می‌داشت. سئوال می کنیم مقدار و جهت سرعت سیال چقدر باید می‌بود، تا نیروی خالص وارده‌به‌دوکره صفر بشود؟ نیروی خالص وارده به دو کره از رابطهٔ:

$$\left\langle \vec{F}_{drag}\right\rangle = 2\times(6\pi\eta a)(1-2\varepsilon)V_0\hat{x} + O(\varepsilon^2) \qquad (۴۴)$$

پیروی می‌کند [۴۰]. به همین شکل، اگر به‌جای میدان سرعت خارجیِ $V_0\hat{x}$، دو کره با سرعت سوق متوسط $V_{drift}\hat{x}$ حرکت کنند، نیروی متوسط وارده به آن‌ها:

$$\left\langle \vec{F}_{drag}\right\rangle = -2\times(6\pi\eta a)(1-2\varepsilon)V_{drift}\hat{x} \qquad (۴۵)$$

خواهد بود. در حالت پایا کل نیروی وارده به دو کره – ناشی از گرادیان دما + رانش آن‌ها – صفر خواهد بود، $\left\langle \vec{F}_{drag}\right\rangle + \left\langle \vec{F}_{drag}\right\rangle = 0$ و در نتیجه سرعت سوق از:

$$V_{drift} = +\frac{\left\langle \vec{F}_{NQ}\right\rangle}{2\times(6\pi\eta a)} + O(\varepsilon^2) = -4\varepsilon^2\frac{K_B\vec{\nabla}\,T}{2\times(6\pi\eta a)} \qquad (۴۳)$$

به دست می‌آید [۲۴]. حال اگر ، ضریب پخش دو کره را از رابطهٔ $D = \frac{K_BT}{2\times(6\pi\eta a)}$ جایگذاری کنیم، برای ضریب سُرِه مقدار:

---

[1] drift velocity

$$S_T = +\frac{4\varepsilon^2}{T} = +\frac{9}{16}\frac{a^2}{L^2}\times\frac{1}{T} \qquad (۴۶)$$

به دست می‌آید. جالب است که در این سطح از تقریب، ضریب سره مستقل از سختی فنر، در این‌جا سختی تله‌ها، به‌دست آمده‌است. این مطلب احتمالا ناشی از تقریب عدد رینولدز پایین است! مشخصا تنهامتغیرهایی که بخشی از ابعاد آن‌ها از جنس جرم می‌باشد، سختی فنری، چگالی سیال، و نیز جرم دو کره می‌باشند. حال اگر ما به دلیل عدد رینولدز پایین از دو متغیر از این سه متغیر صرف‌نظر کرده‌باشیم، طبیعی است که متغیر سوم هم نمی‌تواند ظاهر شود، چون در ضریب سره نیز ردپایی از بعد جرم وجود ندارد. در نتیجه حذف شدن سختی فنری نتیجهٔ دور از پیش‌بینی‌نمی‌باشد.

هم‌چنین ضریب سره برحسب ابعاد شناگر/ذرهٔ معلق در سیال، *L*، به صورت یک‌نوا نزولی است. این مطلب به وضوح با دادهٔ تجربی که اغلب صعودی بودن ضریب سره با ابعاد ذره را نشان می‌دهند، در تناقض است. این ممکن است به دلیل محدود بودن محاسبات به اولین جملهٔ غیر صفر ($\sim \varepsilon^2$)باشد. یعنی، اگر مراتب بالاتر ε را در محاسبات لحاظ کنیم، این مشاهده تغییر کند.

و دست آخر این مشاهده با نتیجهٔ مشابه پوسانه–نجفی [۴۴] در تناقض است. ما هنوز نمی‌دانیم ریشهٔ این تناقض در کجا است. اما امیدواریم در کارهای بعد، که مسئله را در حالت کلی‌تر حل خواهیم کرد، این تناقض نیز حل شود، یا ریشهٔ آن کاملا شفاف شود.

۶. اثر وابستگی فضای گرانروی بر تانسور اوسین، و نیروهای موثر در مسئله،

وابستگی مکانی گرانروی، یعنی $\vec{\nabla}\eta \neq 0$، ساختار مسئلهٔ ما را تغییر می‌دهد. هرچند گرانروی تابعیت دمایی آرِنیوسی دارد $\eta(T) = \eta(T_0)\exp(-\kappa(T - T_0))$ ، اما برای بازهٔ کوچک، $T_L \langle\, T \,\rangle\, T_R$ ، ما تنها به وابستگی خطی آن بسنده می‌کنیم، و ثابت β را به صورت

$$\beta = -\frac{\partial Ln(\eta)}{\partial T} \qquad (۴۷)$$

تعریف می‌نماییم. دلیل علامت منفی در تعریف فعلی این است که می‌خواهیم β مثبت باشد، و می‌دانیم که گرانروی آب و بسیاری از سیال‌های نیوتنی با افزایش دما کاهش می‌یابد. با این تعریف β در تمام بازهٔ میان نقطهٔ ذوب تا جوش آب،در فشار اتاق مثبت خواهد بود.

با این تعریف ، گرانروی سیال در نقطهٔ دل‌خواه فضا از رابطهٔ:

$$\eta \approx \eta_0(1 - \beta|\nabla T|x) = \eta_0(1 - \beta|\nabla T|x) \qquad (۴۸)$$

به‌دست خواهد آمد، که $|\nabla T|$ گرادیان میدان دما در مبدا می‌باشد.

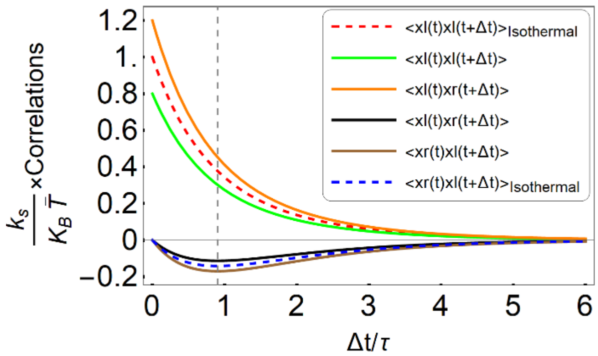
در نتیجه می‌توان گرانروی را در هر x دلخواه از رابطهٔ $\eta = \eta_0(1 - \beta|\nabla T|x)$ بدست آورد. در مرحلهٔ بعد سعی می‌کنیم تابع گرین مربوط به معادلهٔ استوکس را در این شرایط حل کنیم(پیوست)، در نتیجه می‌توانیم به تانسور اوسین اصلاح شده دست پیدا کنیم.

به این منظور مرکز مختصات را در نقطهٔ C وسط خط واصل دو کره در نظر می‌گیریم، با توجه به اینکه کرهٔ راست در دمای بالاتری قرار گرفته است گرانروی آن کاهش یافته و برابر خواهد بود با $\eta_R = \eta_0(1 - \beta|\nabla T|(\frac{L}{2} + x_R))$ و گرانروی در مکان کرهٔ چپ برابر است با $\eta_L = \eta_0(1 - \beta|\nabla T|(-\frac{L}{2} + x_L))$. از طرفی استفاده از نتیجهٔ پیوست در جملهٔ اصلاحیه تابع گرین در این مسئله معادل این است که در نتایج قبلی خود از تابع گرین یعنی رابطهٔ (۹) بجای η، گرانروی در مکان کرهٔ مورد نظر را قرار دهیم. در نتیجه تانسور اوسین ($\hat{M}$) تا مرتبهٔ اول نسبت به $\beta|\nabla T|$ بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{x}_L \end{pmatrix} = \hat{M}\begin{pmatrix} F_R \\ F_L \end{pmatrix},$$

$$\hat{M} = \frac{1}{\gamma}\times\begin{pmatrix} 1+\beta|\nabla T|(\frac{L}{2}+x_R) & \frac{3a}{4|r|}(1+\beta|\nabla T||r|) \\ \frac{3a}{4|r|}(1-\beta|\nabla T||r|) & 1+\beta|\nabla T|(-\frac{L}{2}+x_L) \end{pmatrix} \qquad (۴۹)$$

که $r = L + x_R - x_L$ و $\gamma = 6\pi\,\eta_0\,a$.



شکل ۲. خود همبستگی و هم‌بستگی متقابل برای جابه‌جایی دو کره، برحسب زمان بهنجار شده. زمان برحسبِ یکایِ زمانی $\tau=6\pi\eta a/K_S$ بهنجار گشته،و تمامِ مقادیر هم‌بستگی نیز بر مقدار تعادلیِ خود هم‌بستگی $\langle x^2\rangle = K_B T/K_S$ تقسیم شده‌اند. برای این‌که دو تفاوت نمودارها در حضورِ گرادیان دما با حالت همدما (نمودارهای خطچین) به‌سادگی دیده شود، اختلاف دمای دو کره ۴.۰ دمای متوسط آن‌ها اختیار شده‌است. مقدار کمینهٔ نمودارهای هم‌بستگی متقابل در $t=\tau\times(1-\frac{2}{3}\varepsilon^2)$ رخ می‌دهد که در شکل با خطچین مشخص شده‌است.

به‌عنوان مثال تنها تفاوت در عناصر قطر اصلی تانسور بالا استفاده از η_R و η_L بجای η در رابطهٔ (۹) است. همین‌طور ضریب تغییر کرده در عناصر قطر فرعی مثل M_{12} (M_{21}) نیز اصلاح ناشی از تغییر گرانروی در مکان کرهٔ راست(چپ) است که نسبت به کرهٔ دیگر سنجیده شده‌است.

همانطور که ملاحظه می‌شود جملهٔ اصلاحی در تانسور اوسین از مرتبهٔ $\beta|\nabla T|\times a$ می‌باشند، یعنی اگر شیب تغییرات وشکسانی نسبت به شعاع کره‌ها خیلی کوچک‌تر باشد ($\beta|\nabla T|\times a \ll 1$) می‌توان از تصحیح ایجاد شده برای برهمکنش هیدرودینامیکی در بلند برد صرف نظر کرد.

۶.۱ تصحیح ایجاد شده در معادلات لانژون و همبستگی‌ها،

با معکوس کردن رابطهٔ (۵۲) می‌توانیم نیروهای هیدرودینامیکی اصلاح شده را بدست آوریم ،با جایگذاری در معادلات لانژون و رفتن به پایه‌های جابجایی متوسط و نسبی خواهیم دید که معادلات همچنان جفت‌شده باقی می‌مانند. در نتیجه استفاده از مسیر قبلی حل مسئله در این حالت چندان کمک کننده نخواهد بود.

$$\begin{aligned}&-k_s\bar{x}-\gamma(1-2\varepsilon)\dot{\bar{x}}\\&\qquad+4\gamma L\beta|\nabla T|(1-2\varepsilon)\Delta\dot{x}+\bar{\zeta}=0\\&-k_s\Delta x-\gamma(1+2\varepsilon)\Delta\dot{x}\\&\qquad+\gamma L\beta|\nabla T|(1+2\varepsilon)\dot{\bar{x}}+\Delta\zeta=0\end{aligned} \tag{۵۰}$$

یک راه حل مسئله این است که دستگاه معادلات را در حالت کلی قطری کنیم و با استفاده از پایه‌های بدست آمدهٔ جدید جفت‌شدگی معادلات را رفع کنیم، باید توجه داشت که در این شرایط باید با استفاده از قضیهٔ افت و خیز تلف همبستگی نوفهٔ سیال را در پایه‌های جدید بدست آوریم. اما با توجه به‌اینکه از حل مسئله در شرایط $\beta=0$ همبستگی نوفه در پایه‌های $\Delta\zeta$ و $\bar{\zeta}$ را می‌شناسیم، سعی می‌کنیم مسیر حلی را انتخاب کنیم که بتوانیم از اطلاعات قبلی مسئله استفاده کنیم.

به این منظور می‌توانیم دستگاه معادلات (۱) را بصورت ماتریسی زیر بنویسیم:

$$\begin{pmatrix}F_R\\F_L\end{pmatrix}=-K_S\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_R\\x_L\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\zeta_R\\\zeta_L\end{pmatrix} \tag{۵۱}$$

با جایگذاری رابطهٔ بالا در رابطهٔ (۴۹) برای حالتی که $x_R=x_L=0$ (زیرا در این مرحله تنها به جملات خطی نسبت به جابجایی نیاز داریم تا دستگاه معادلات را بصورت خطی حل کنیم) یعنی:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_R\\\dot{x}_L\end{pmatrix}=\frac{1}{\gamma}\begin{pmatrix}1+\frac{\beta|\nabla T|L}{2}&2\varepsilon(1+\frac{\beta|\nabla T|L}{2})\\2\varepsilon(1-\frac{\beta|\nabla T|L}{2})&1-\frac{\beta|\nabla T|L}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_R\\F_L\end{pmatrix} \tag{۵۲}$$

خواهیم داشت:

$$|\dot{x}_i\rangle+\frac{1}{\tau}\hat{Q}|x_i\rangle=\frac{1}{\gamma}\hat{Q}|\zeta_i\rangle \tag{۵۳}$$

که در رابطهٔ بالا $\tau=\gamma/K_S$، $\hat{Q}=\gamma\hat{M}$ و $|x_i\rangle=\begin{pmatrix}x_R\\x_L\end{pmatrix}$ می‌باشند. در نتیجه با استفاده از رابطهٔ عملگری (۵۳) می‌توان نتایج کلی دینامیک هر کره را در حالتی که مدت به اندازهٔ کافی طولانی از شرایط اولیهٔ مسئله گذشته باشد بدست آورد:

$$|x_i\rangle=\frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{t}ds\,e^{-\frac{(t-s)\hat{Q}}{\tau}}\hat{Q}|\zeta_i\rangle \tag{۵۴}$$

در این مرحله می‌کوشیم ماتریس $\hat{Q}$ را بر اساس ماتریس $\hat{I}+2\varepsilon\hat{N}$ بازنویسی کنیم، که در آن $\hat{N}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ و $\hat{I}$ ماتریس همانی 2×2 می باشند:

$$\hat{Q}=\hat{I}+2\varepsilon\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\frac{\beta|\nabla T|L}{2}\begin{pmatrix}1&2\varepsilon\\-2\varepsilon&-1\end{pmatrix}=\hat{I}+2\varepsilon\hat{N}+\frac{\beta|\nabla T|L}{2}\hat{A} \qquad (۵۵)$$

حال با توجه به پیوست۵ می‌توان نوشت:

$$e^{-\frac{(t-s)\hat{Q}}{\tau}}=e^{-\frac{(t-s)}{\tau}}(\hat{I}+\frac{s-t}{\tau}(2\varepsilon\hat{N}+\frac{\beta|\nabla T|L}{2}\hat{A})) \qquad (۵۶)$$

به کمک رابطهٔ بالا می‌توانیم عبارت عملگری در رابطهٔ (۵۴) را تا مرتبهٔ اول نسبت به ε و $\beta|\nabla T|$ بسط تیلور دهیم:

$$|x_i\rangle=\frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{t}ds\ e^{-\frac{(t-s)}{\tau}}\{\hat{I}+(1+\frac{s-t}{\tau})(2\varepsilon\hat{N}+\frac{\beta|\nabla T|L}{2}\hat{A})\}|\zeta_i\rangle \qquad (۵۷)$$

از طرفی می‌دانیم که ویژه بردارها و ویژه مقدارهای متناظر برای ماتریس $\hat{I}+2\varepsilon\hat{N}$ برابراند با:

$$|e_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \lambda_1=1+2\varepsilon, \qquad |e_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ \lambda_2=1-2\varepsilon \qquad (۵۸)$$

با این حساب می‌توانیم با رفتن به پایه‌های ویژه برداری تعریف شده در بالا رابطهٔ (۵۷) را برای متغیرهای آشنای $\bar{x}=(x_R+x_L)/2$ و $\Delta x=x_R-x_L$ حل کنیم، با استفاده از ضرب طرفین رابطهٔ (۵۷) در بردارهای سطری $\langle e_1|$ و $\langle e_2|$ می‌توانیم به تحول زمانی $\bar{x}$ و Δx دست پیدا کنیم:

$$\bar{x}(t)=\int_{-\infty}^{t}ds\ \frac{e^{-\frac{(t-s)}{\tau}}}{\gamma}\{\bar{\zeta}(s)+(1+\frac{s-t}{\tau})\times(2\varepsilon\,\bar{\zeta}(s)+\frac{\beta|\nabla T|L}{4}(1-2\varepsilon)\Delta\zeta(s))\} \qquad (۵۸\text{–الف})$$

$$\Delta x(t)=\int_{-\infty}^{t}ds\ \frac{e^{-\frac{(t-s)}{\tau}}}{\gamma}\{\Delta\zeta(s)+(1+\frac{s-t}{\tau})\times(-2\varepsilon\,\Delta\zeta(s)+\beta|\nabla T|L(1+2\varepsilon)\bar{\zeta}(s))\} \qquad (۵۸\text{–ب})$$

حال، می‌توانیم خود همبستگی و همبستگی متقابل متغیرهای جابجایی متوسط و جابجایی نسبی را بدست آوریم و نرخ متوسط سطح جاروب شده را محاسبه کنیم. بعلاوه در یک گام جلوتر می‌توانیم از این متغیرها به متغیرهای حقیقی مسئله یعنی جابجایی کرهٔ چپ و راست برگردیم.

۶.۲ تصحیح ایجاد شده در جواب نهایی مسئله

اکنون که اطلاعات ما از اصلاحات تانسور اوسین تکمیل شده‌است می‌توانیم با معکوس کردن آن نیروی کلی که به سیال وارد می شود را محاسبه کنیم.

$$\begin{pmatrix}F_R\\F_L\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}M^{-1}{}_{11}&M^{-1}{}_{12}\\M^{-1}{}_{21}&M^{-1}{}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}_R\\\dot{x}_L\end{pmatrix} \qquad (۵۹)$$

عناصر این ماتریس عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}
M^{-1}{}_{11}&=1-\beta|\nabla T|(\frac{L}{2}+x_R)\\
M^{-1}{}_{22}&=1+\beta|\nabla T|(\frac{L}{2}-x_L)\\
M^{-1}{}_{12}&=2\varepsilon(\frac{x_R-x_L}{L}-1)+\varepsilon\,\beta|\nabla T|L(\frac{2\ (x_R+x_L)}{L}-1)\\
M^{-1}{}_{21}&=2\varepsilon(\frac{x_R+x_L}{L}-1)+\varepsilon\,\beta|\nabla T|L(\frac{2\ (x_R+x_L)}{L}+1)
\end{aligned} \qquad (۶۰)$$

شاید مقایسهٔ جملات اضافه شده به عناصر معکوس تانسور اوسین خالی از فایده نباشد، معکوس ماتریس تعریف شده در رابطهٔ (۱۲) برابر است با:

$$\hat{M}^{-1}=\gamma\begin{pmatrix}1&2\varepsilon(\frac{x_R-x_L}{L}-1)\\2\varepsilon(\frac{x_R-x_L}{L}-1)&1\end{pmatrix} \qquad (۶۱)$$

اکنون می‌توانیم به محاسبهٔ نیروی خالص وارد شده به سیال بپردازیم:

$$F_{NQ}=F_R+F_L=\gamma\times\frac{4\varepsilon}{L}(\frac{x_R\dot{x}_L-x_L\dot{x}_R}{2}) \qquad (۶۲)$$

محاسبهٔ مجدد متغیر روبش:

با بهره‌گیری از روابط (۵۸) می‌توانیم اختلاف همبستگی متقابل موجود در رابطهٔ (۶۲) را محاسبه کنیم، طبق محاسبات به عمل آمده متغیر روبش تا توان دوم نسبت به β هیچ وابستگی از خود نشان نمی‌دهد و می‌توان این کمیت را بصورت زیر نوشت:

$$S_G = -\frac{\varepsilon}{\gamma} K_B \Delta T \qquad (۶۳)$$

محاسبهٔ سرعت در مرکز تله‌ها:

با استفاده از رابطهٔ سرعت می‌توانیم سرعت ناشی از هر کره را در مرکز خط واصل محاسبه کنیم، در نتیجه با توجه به محاسبات ارائه شده در پیوست خواهیم داشت:

$$V_C = \frac{F_R + F_L}{2\pi\eta_0 L}\left(1 - \frac{x_R - x_L}{L}\right) - \frac{F_R - F_L}{2\pi\eta_0 L}\left(\frac{x_R + x_L}{L} + \frac{\beta|\nabla T|L}{4}\right) \qquad (۶۴)$$

همانطور که مشخص است برای محاسبهٔ سرعت سیال در نقطهٔ C به مجموع و تفاضل نیروهایی که هر کره به سیال وارد می‌کند نیاز داریم. با استفاده از روابط ارائه شده در معادلهٔ (۶۰) می‌توانیم مقدار متوسط سرعت را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}\langle V_C \rangle &= -\left(24\frac{\varepsilon^2}{L} - \frac{9}{8}\frac{a^2\beta^2|\nabla T|^2}{L}\right) < \dot{x}_R x_L - \dot{x}_L x_R > \\ &= -\left(24\frac{\varepsilon^2}{L} - \frac{9}{8}\frac{a^2\beta^2|\nabla T|^2}{L}\right)\left(\frac{\varepsilon}{\gamma} L K_B \vec{\nabla} T\right)\end{aligned} \qquad (۶۵)$$

با توجه به نتیجهٔ بدست‌آمده می‌توان اظهار کرد این اثر تا مرتبهٔ خطی نسبت به عامل اختلالی تغییری در نتیجهٔ قبلی مسئله ایجاد نمی‌کند. اولین تصحیح غیر صفر مربوط به توان سه $\vec{\nabla} T$ است، یعنی نتیجهٔ به دست آمده تحت تبدیل $x \leftrightarrow -x$ که معادل با قرینه کردن گرادیان دمایی است کلا تغییر علامت می‌دهد.

۷. نتیجه‌گیری

ما در این مقاله می‌کوشیم با پیش‌نهادِ یک مدل ساده و قابل بررسی در آزمایشگاه به درک اثر سره نزدیک شویم. در نگاه اول، ما مستقیما به مسئلهٔ سره نمی‌پردازیم: دو ریز ذرهٔ مورد بررسی در دام انبرک نوری گرفتار هستند و جز نوسانات گرمایی – که بواسطهٔ برهم کنش هیدرودینامیکی جفت شده‌اند – امکانِ حرکت یکسویه‌ای درمقیاس طولانی را ندارند. به منظور بررسی اثر گرادیان دما بر روی این مدل ما به نیروی خالصی که به سیال وارد می‌شود نگاه می‌کنیم. نخستین نتیجهٔ این مدل‌سازی آن است که شکست تقارن ناشی از حضور گرادیان دما منجر به اعمال نیروی خالص به سیال می‌شود. مشخصا اعمال گرادیان دما به‌طور مستقیم هیچ نیروی خالصی به هیچ‌کدام از دو ذره وارد نمی‌کند، اما تقارن حرکت‌های کاتوره‌ای هر ذره در جهت موازی یا مخالف با گرادیان دما را برهم می‌زند. وقتی این شکست تقارن، با یک متغیر افت و خیز کنندهٔ دیگر جفت می‌شود، موجب اعمال نیروی خالص به سیال می‌شود.

در مرحلهٔ بعدی با استفاده از محاسبهٔ نیروی خالص وارد شده بر سیال، به محاسبهٔ ضریب سره می‌پردازیم ($S_T = +\frac{4\varepsilon^2}{T}$). این نتیجه وابستگی به جرم را که در برخی از محلول‌های دوتایی مشاهده شده بود [۷]، نشان نمی‌دهد. این البته انتظاری بود که از ابتدا می‌داشتیم. چون حل مسئله در عدد رینولدز پایین مستلزم صرف‌نظر کردن از جملات اینرسی بود، و طبیعی است که در نتیجهٔ نهایی اثری از جرم دیده نشود. این بدان معنا است، که برای مشاهدهٔ اثر مزبور، باید یک مرتبه جلوتر برویم، و اثر جملات اینرسی در معادلهٔ نوی‌استوکس را – حداقل تا جملهٔ مرتبهٔ اول – در نظر بگیریم.

در عین‌حال نتیجهٔ ما با نتیجهٔ محاسبهٔ نجفی-پوسانه [۴۴] در تناقض است. اما برمبنای استدلالی که در متن مقاله آوردیم، انتظار داریم وابستگی سرعت سوق، و نیز ضریب سره به شعاع ذرات از جنسِ a^2 باشد، و به همین دلیل جواب خود را صحیح تلقی می‌کنیم.

در مرحلهٔ نهایی وابستگی دمایی گرانروی سیال به دما را وارد محاسبات تانسور اوسین و برهم کنش هیدرودینامیکی کره‌ها می‌کنیم. جالب است که اصلاح معادلات بر اساس این تصحیح‌ها، نتایج اولیهٔ مارا تا توان اول نسبت به ∇T دچار تغییر نمی‌کند.

پیوست ۱: حل تابع گرین برای گرانروی وابسته به مکان

در حد عدد رینولدز پایین معادلهٔ کلی استوکس بصورت زیر نوشته می‌شود، که در آن گرانروی سیال ثابت فرض نشده‌است:

$$-\vec{\nabla} P + \vec{\nabla}.\left(\eta[\vec{\nabla}\,\vec{V} + (\vec{\nabla}\,\vec{V})^T]\right) = -\vec{f} \qquad (۶۶)$$

در رابطهٔ فوق، $\vec{\nabla}\,\vec{V} + (\vec{\nabla}\,\vec{V})^T$ طبق تعریف [17] برابر است

با دو برابر نرخ تانسور کرنش ۱ که در سه بعد یک تانسور مرتبهٔ۲ با ۹ آرایه است، به عنوان مثال عناصر ماتریسی آن عبارت‌اند از $\frac{1}{2}(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i})$ ، که در آن اندیس‌ها می‌توانند بین سه راستای مختلف دستگاه دکارتی تغییر داشته‌باشند($i,j=1,2,3$). برای شرایطی که η ثابت و سیال تراکم‌ناپذیر فرض می‌شود یعنی $\vec{\nabla}.\vec{V}=0$، معادلهٔ (۶۶) به معادلهٔ آشنای استوکس تبدیل می‌شود. با در نظر گرفتن تابعیت خطی برای گرانروی سیال مطابق با $\eta=\eta_0(1-\beta|\nabla T|x)$ می‌توانیم رابطهٔ (۶۶) را بصورت زیر بازنویسی کنیم:

$$-\vec{\nabla}P+\vec{\nabla}\eta.(\vec{\nabla}\ \vec{V}+(\vec{\nabla}\ \vec{V})^T)+\eta\nabla^2\vec{V}=-\vec{f}(\vec{r}) \quad (۶۷)$$

با استفاده از خاصیت ضرب بردار در تانسور می‌توانیم عبارت دوم از سمت چپ را در معادلهٔ فوق به‌دست آوریم:

$$\begin{aligned}&-\vec{\nabla}P-\beta|\nabla T|\eta_0(\frac{\partial}{\partial x}\vec{V}+\vec{\nabla}\ V_x)\\&\quad+\eta_0(1-\beta|\nabla T|x)\nabla^2\ \vec{V}=-\vec{f}(\vec{r})\end{aligned} \quad (۶۸)$$

در این رابطه عبارت $\frac{\partial}{\partial x}\vec{V}+\vec{\nabla}\ V_x$ را می‌توان بصورت سه عنصر نرخ تانسور کرنش در صفحهٔ عمود بر گرادیان گرانروی در نظر گرفت.

به منظور به دست آوردن تابع گرین، در قدم اول اثر هر ذره در سیال را بصورت نیروی نقطه‌ای در نظر می‌گیریم. سپس فشار و سرعت سیال را بر حسب پارامتر اختلالی $\beta|\nabla T|$بسط می‌دهیم و توجهٔ خود را تنها معطوف به اولین جمله در بسط می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\vec{V}&=\vec{V}_0+\beta|\nabla T|\vec{v}_1\\P&=P_0+\beta|\nabla T|p_1\end{aligned} \quad (۶۹)$$

با جایگذاری مقادیر اختلالی سرعت و فشار در معادله استوکس پاسخ جملات مرتبهٔ صفر نسبت به عامل اختلالی همان تابع گرین معروف است:

$$-\vec{\nabla}\ P_0+\eta_0\nabla^2\ \vec{V}_0=-F_0\ \hat{i}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \quad (۷۰)$$

جملات مرتبهٔ یک نسبت به عامل اختلالی برابر است با:

$$\begin{aligned}&-\vec{\nabla}p_1+\eta_0\nabla^2\ \vec{v}_1\\&\quad-\eta_0\ (\frac{\partial}{\partial x}\ \vec{V}_0+\vec{\nabla}V_{x0}+x\nabla^2\ \vec{V}_0)=0\end{aligned} \quad (۷۱)$$

اکنون با درنظر گرفتن شرط تراکم ناپذیری سیال($\vec{\nabla}.\vec{v}=0$) می‌توانیم رابطهٔ بالا را به معادله‌ای مستقل از $\vec{v}$ تبدیل کنیم:

$$\nabla^2\ p_1=-2\eta_0\ \nabla^2\ V_{x0} \quad (۷۲)$$

سپس با در نظر گرفتن بسط فوریه برای فشار و سرعت خواهیم داشت:

$$p_1(r)=\int p_1(k)\frac{e^{i\vec{k}.\vec{r}}}{\sqrt{2\pi^3}}\ d^3k \quad (۷۳\text{–الف})$$

$$V_{0x}(r)=\int V_{0x}(k)\frac{e^{i\vec{k}.\vec{r}}}{\sqrt{2\pi^3}}\ d^3k \quad (۷۳\text{–ب})$$

با جایگذاری انتگرال‌های تبدیل فوریه در رابطهٔ (۷۲) خواهیم داشت:

$$p_1(k)=-2\ \eta_0\ V_{x0}(k) \quad (۷۴)$$

در نتیجه می‌توان جملهٔ اصلاحی مرتبهٔ اول فشار را برابر با $p_1(r)=-2\ \eta_0\ V_{x0}(r)$ بدست.

۱.۲.محاسبهٔ جملهٔ اصلاحی سرعت:

با برگرداندن نتیجهٔ فشار در رابطهٔ (۷۱) خواهیم داشت:

$$\nabla^2\ \vec{v}_1=\frac{\partial}{\partial x}\ \vec{V}_0-\vec{\nabla}\ V_{x0}+x\nabla^2\ \vec{V}_0 \quad (۷۵)$$

با توجه به اینکه ما فعلاً خود را به حرکت در راستای x محدود کرده‌ایم، بنابراین راحت‌تر است که در مرحلهٔ اول به حل مولفهٔ x معادلهٔ (۷۵) بپردازیم، در نتیجه معادلهٔ مذکور به فرم زیر ساده می‌شود:

$$\nabla^2\ v_{1x}=x\nabla^2\ V_{x0} \quad (۷۶)$$

می‌دانیم [۴۵] که پاسخ گرین معادلهٔ لاپلاس برابر است با $-\frac{1}{4\pi\ r}$، بنابراین پاسخ معادلهٔ (۷۶) برابر خواهد بود با:

$$v_{1x}(r)=\iiint G(r-r_0)\left(x_0\ \nabla^2\ V_{x0}\big|_{r=r_0}\right)d\ x_0\ d\ y_0\ d\ z_0 \quad (۷۷)$$

با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌توانیم انتگرال را ساده‌تر کنیم:

$$\begin{aligned}&G(r,r_0)\ \ x_0\nabla^2{}_0\ V_{x0}(r_0)\\&\quad=\vec{\nabla}_0.(G(r,r_0)\ \ x_0\vec{\nabla}_0\ V_{x0}(r_0))\\&\qquad-\vec{\nabla}_0.(V_{x0}(r_0)\vec{\nabla}_0(x_0\ G(r,r_0)))\\&\qquad+\ V_{x0}(r_0)\nabla^2{}_0(x_0\ G(r,r_0))\end{aligned} \quad (۷۸)$$

---

1 Strain tensor

با استفاده از قضیهٔ دیورژانس و در نظر گرفتن شرط مرزی دیریکله [45] برای تابع گرین و سرعت ناشی از نیروی نقطه‌ای روی سطح مرزی محصور در بی‌نهایت می‌توان دو جملهٔ اول در رابطهٔ بالا را صفر در نظر گرفت، در نتیجه تنها جملهٔ سوم از رابطهٔ (۷۸) باقی می‌ماند که با استفاده از تعریف لاپلاسین دو تابع می‌توان آن‌را ساده‌تر کرد [۴۶]:

$$\nabla^2{}_0 (G(r,r_0)x_0) = 2\frac{\partial\, G(r-r_0)}{\partial\, x_0} + x_0\nabla^2{}_0\, G(r,r_0) \qquad (۷۹)$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} v_{1x}(r) &= x\ V_{x0}(r) \\ &+ 2\int\int\int_{-\infty}^{\infty} V_{x0}(r_0)\frac{\partial\, G(r-r_0)}{\partial\, x_0}\ dx_0\ dy_0\ dz_0 \end{aligned} \qquad (۸۰)$$

با اعمال رابطهٔ:

$$\begin{aligned} V_{x0}(r_0)\frac{\partial G(r-r_0)}{\partial x_0} &= \\ &\frac{\partial\ (G(r-r_0)V_{x0}(r_0))}{\partial x_0} \\ &- G(r-r_0)\frac{\partial V_{x0}(r_0)}{\partial x_0} \end{aligned} \qquad (۸۱)$$

در انتگرال رابطهٔ(۸۰) به فرم نهایی زیر می‌رسیم:

$$-2\int\int\int_{-\infty}^{\infty} G(r-r_0)\frac{\partial V_{x0}(r_0)}{\partial x_0}\ dx_0\ dy_0\ dz_0 \qquad (۸۲)$$

در این مرحله می‌توانیم با استفاده از بسط تابع گرین بر اساس توابع هماهنگ‌های کروی [۲۸] و همچنین پاسخ سرعت نیروی نقطه‌ای مطابق با روابط زیر انتگرال را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} V_{x0}(r_0) &= \frac{f_0}{8\pi\eta_0}\Big(\frac{1}{\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2}} \\ &+ \frac{{x_0}^2}{\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2}^3}\Big) \end{aligned} \qquad (۸۳)$$

$$\begin{aligned} G(r-r_0) &= -\frac{1}{4\pi}\times 4\pi \\ &\sum_l\sum_m \frac{1}{2l+1}\frac{r^l_<}{r^{l+1}_>}\ y^*{}_{l,m}(\theta',\phi')y_{l,m}(\theta,\phi) \end{aligned} \qquad (۸۴)$$

نتیجهٔ بدست آمده برای تصحیح مرتبهٔ اول سرعت عبارت است از:

$$\begin{aligned} v_{x1}(r) &= \frac{f_0}{8\pi\ \eta_0}\Big(\frac{x}{2r}+\frac{x^3}{2r^3}\Big) \\ v_{y1}(r) &= \frac{f_0}{8\pi\ \eta_0}\Big(\frac{y(x^2-y^2)}{2r^3}\Big) \\ v_{z1}(r) &= \frac{f_0}{8\pi\ \eta_0}\Big(\frac{z(x^2-y^2)}{2r^3}\Big) \end{aligned} \qquad (۸۵)$$

پیوست۲. استخراج رابطهٔ اصلاحیه مرتبهٔ اول سرعت

در مسیر بدست آوردن جملهٔ خطی سرعت نسبت به β به انتگرال زیر رسیدیم:

$$-2\int\int\int_{-\infty}^{\infty} G(r-r_0)\frac{\partial V_{x0}(r_0)}{\partial x_0}\ dx_0\ dy_0\ dz_0 \qquad (۸۶)$$

به منظور حل رابطهٔ انتگرالی بالا از بسط تابع گرین بر اساس هماهنگ‌های کروی استفاده می‌کنیم، یعنی:

$$\begin{aligned} G(r-r_0) &= -\frac{1}{4\pi}\times 4\pi \\ &\sum_l\sum_m \frac{1}{2l+1}\frac{r^l_<}{r^{l+1}_>}\ y^*{}_{l,m}(\theta',\phi')y_{l,m}(\theta,\phi) \end{aligned} \qquad (۸۷)$$

از طرفی از پاسخ سرعت نیروی نقطه‌ای در جهت x می‌دانیم که:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V_{x0}(r_0)}{\partial x_0} = \\ &\frac{f_0}{8\pi\ \eta_0}\Big(\frac{x_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} - \frac{3x_0^3}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{5/2}}\Big) \end{aligned} \qquad (۸۸)$$

در نتیجه برای محاسبهٔ انتگرال مربوط به جملهٔ اول در رابطهٔ (۸۸) می‌توانیم از مختصات کروی استفاده کنیم، یعنی $x_0 = r_0\,\mathrm{Sin}(\theta)\,\mathrm{Cos}(\varphi)$ و در نهایت صورت کسر را برحسب هارمونیک‌های کروی بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Sin}(\theta_0)\,\mathrm{Cos}(\varphi_0) = \\ &\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(y_{1,-1}(\theta_0,\varphi_0) - y_{1,1}(\theta_0,\varphi_0)) \end{aligned} \qquad (۸۹)$$

با جایگذاری رابطهٔ بالا در انتگرال (۴۵) و با تبدیل المان حجم دکارتی به المان حجم کروی یعنی $r_0^2 dr_0\,\mathrm{Sin}(\theta_0)d\theta_0 d\varphi_0$ و همچنین با استفاده از شرط تعامد توابع هارمونیک‌های کروی برای جملهٔ اول انتگرال خواهیم داشت:

$$= -\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,\frac{1}{3}\,\frac{f_0}{8\pi\ \eta_0}\,(y_{1,-1}(\theta,\varphi)-y_{1,1}(\theta,\varphi)) \times \left(\int_0^r \frac{r_0}{r^2}\ dr_0 + \int_r^\infty \frac{r}{r_0^2}\ dr_0\right) \qquad (۹۰)$$

حاصل انتگرال شعاعی در رابطهٔ (۹۰) برابر خواهد بود با $\frac{3}{2}$.

اکنون برای محاسبهٔ جملهٔ دوم سرعت باید x_0^3 را برحسب هماهنگ‌های کروی بازنویسی کنیم، باید توجه داشت که می‌توانیم از اتحاد $\cos^3\phi=(\cos 3\phi+3\cos\phi)/4$ برای پیدا کردن تابع مورد نظر استفاده کنیم:

$$\begin{aligned}
x_0^3 &= r_0^3\,\mathrm{Sin}^3(\theta)\,\mathrm{Cos}^3(\varphi)\\
&= \frac{r_0^3}{2}\sqrt{\frac{4\pi}{35}}(y_{3,-3}(\theta,\varphi)-y_{3,3}(\theta,\varphi))\\
&+ \frac{3}{4}\frac{r_0^3}{2}\Big\{-\frac{2}{5}\sqrt{\frac{4\pi}{21}}(y_{3,-1}(\theta,\varphi)-y_{3,1}(\theta,\varphi))\\
&+ \frac{4}{5}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(y_{1,-1}(\theta,\varphi)-y_{1,1}(\theta,\varphi))\Big\}
\end{aligned} \qquad (۹۱)$$

از طرفی حاصل انتگرال شعاعی مورد نیاز نیز برابر خواهد بود با:

$$\int_0^\infty \frac{r_<^3}{r_>^4}\ dr_0 = \int_0^r \frac{r_0^3}{r^4}\ dr_0 + \int_r^\infty \frac{r^3}{r_0^4}\ dr_0 = \frac{7}{12} \qquad (۹۲)$$

و در نهایت برای نتیجهٔ نهایی جملهٔ اصلاحی سرعت بر حسب هماهنگ‌های کروی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&v_{x1}(r) = x v_{x0}(r)\\
&-2\frac{f_0}{8\pi\ \eta_0}\Big\{-\sqrt{\frac{\pi}{6}}(y_{1,-1}(\theta,\varphi)-y_{1,1}(\theta,\varphi))\\
&+3\Big[\frac{1}{24}\sqrt{\frac{4\pi}{35}}(y_{3,-3}(\theta,\varphi)-y_{3,3}(\theta,\varphi))\\
&-\frac{3}{120}\sqrt{\frac{4\pi}{21}}(y_{3,-1}(\theta,\varphi)-y_{3,1}(\theta,\varphi))\\
&+\frac{3}{10}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(y_{1,-1}(\theta,\varphi)-y_{1,1}(\theta,\varphi))\Big]\Big\}
\end{aligned} \qquad (۹۳)$$

که می‌توانیم با بازنویسی روابط برحسب *r* نتیجه را در مختصات دکارتی بدست آوریم:

$$\begin{aligned}
v_{x1}(r) &= \frac{f_0}{8\pi\ \eta_0}\left(\frac{x}{2r}+\frac{x^3}{2r^3}\right)\\
v_{y1}(r) &= \frac{f_0}{8\pi\ \eta_0}\left(\frac{y(x^2-y^2)}{2r^3}\right)\\
v_{z1}(r) &= \frac{f_0}{8\pi\ \eta_0}\left(\frac{z(x^2-y^2)}{2r^3}\right)
\end{aligned} \qquad (۹۴)$$

پیوست۳. محاسبهٔ سرعت در نقطهٔ C

برای محاسبهٔ سرعت سیال در مرکز خط واصل دو کره، از پاسخ استوکس-لت برای نیروی نقطه‌ای در راستای *x* بعلاوه اصلاحیهٔ مرتبهٔ اول ارائه شده در بخش ۲ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
V_{CR} &= \frac{f_R}{8\pi\eta_0}\left(\frac{2}{\frac{1}{2}+x_R}-\beta|\nabla T|\right)\hat{x}\\
V_{CL} &= \frac{f_L}{8\pi\eta_0}\left(\frac{2}{\frac{1}{2}-x_L}+\beta|\nabla T|\right)\hat{x}
\end{aligned} \qquad (۹۵)$$

که رابطهٔ اول سرعت ناشی از حرکت کرهٔ راست و رابطهٔ دوم سرعت ناشی از کرهٔ چپ در مکان موردنظر است. با بسط دادن روابط بالا به ازای $x_R, x_L \ll L$ تا مرتبهٔ اول خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
V_C &= \frac{F_R+F_L}{2\pi\eta_0 L}\left(1-\frac{x_R-x_L}{L}\right)\\
&-\frac{F_R-F_L}{2\pi\eta_0 L}\left(\frac{x_R+x_L}{L}\right)+\frac{\beta|\nabla T|}{8\pi\eta_0}(F_L-F_R)
\end{aligned} \qquad (۹۶)$$

با جایگذاری نیروهایی که کره‌های چپ و راست به سیال وارد می‌کنند با استفاده از رابطهٔ (۲۲) به نتیجهٔ نهایی خواهیم رسید:

$$\langle V_C\rangle = -\left(24\frac{\varepsilon^2}{L}-\frac{9}{8}\frac{a^2\beta^2|\nabla T|^2}{L}\right) \times <\dot{x}_R x_L-\dot{x}_L x_R> \qquad (۹۷)$$

پیوست۴. قضیهٔ افت و خیز تلف:

در عدم حضور هرگونه میدان خارجی فرض بر این است که هر کدام از کره‌هایی که در دام پتانسیل فنری گیر افتاده‌اند حرکت میرای مستقل از هم دارند ($\langle x_R(t)x_L(t)\rangle = 0$).
از طرفی با استفاده از قضیهٔ همپاری انرژی می‌دانیم متوسط دامنهٔ افت و خیز کره‌ها بصورت زیر خواهند بود:

$$< x_R(t)^2 > = \frac{K_B T_R}{k_S}$$
$$< x_L(t)^2 > = \frac{K_B T_L}{k_S} \qquad (۹۸)$$

در نتیجه می‌توان بلافاصله افت و خیز مربوط به متغیرهای جابجایی نسبی و متوسط را بدست آورد:

$$< \bar{x}(t)^2 > = \frac{K_B \bar{T}}{2k_s}$$
$$< \Delta x(t)^2 > = \frac{2K_B \bar{T}}{k_s} \qquad (۹۹)$$
$$< \bar{x}(t)\Delta x(t) > = \frac{K_B \,\Delta T}{2k_s}$$

ازطرفی، در شرایط $\beta = 0$، یعنی با استفاده از روابط (۲۱) :

$$\Delta x(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\Delta\zeta(s)}{\gamma(1+2\varepsilon)} e^{-\frac{t-s}{\tau(1+2\varepsilon)}} ds$$
$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\bar{\zeta}(s)}{\gamma(1-2\varepsilon)} e^{-\frac{t-s}{\tau(1-2\varepsilon)}} ds \qquad (۱۰۰)$$

می‌توان به محاسبهٔ $\langle \bar{x}(t)^2 \rangle$، $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ و $\langle \bar{x}(t)\Delta x(t) \rangle$ پرداخت و با برابر قرار دادن با نتایج مورد انتظار از قضیهٔ همپاری انرژی، می‌توانیم همبستگی نیروی نوفه را در پایه‌های نسبی و متوسط بدست آوریم:

$$< \bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}(t') > = \gamma\,(1-2\varepsilon)K_B \bar{T}\delta(t-t')$$
$$< \Delta\zeta(t)\Delta\zeta(t') > = 4\gamma\,(1+2\varepsilon)K_B \bar{T}\delta(t-t') \qquad (۱۰۱)$$
$$< \Delta\zeta(t)\bar{\zeta}(t') > = \gamma\, K_B \,\Delta T\delta(t-t')$$

پیوست ۵. استخراج رابطهٔ ۵۶

با توجه به تعریف سری مکلوران تابع نمایی می‌دانیم که می‌توانیم آن را بصورت $e^x = (1+\frac{x}{N})^N$ تعریف کنیم. حال اگر نمای تابع یک عملگر بصورت $A+\varepsilon B$ باشد، می‌توانیم تابع را برحسب ضریب کوچک ε تامرتبه ی اول بسط تیلور دهیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$e^{A+\varepsilon B} = (I+\frac{A+\varepsilon B}{N})^N = e^A + \sum_{m=0}^{N-1}(I+\frac{A}{N})^m (\frac{\varepsilon B}{N})(I+\frac{A}{N})^{N-m-1} \qquad (۱۰۲)$$

با توجه به اینکه تعداد جملات سری بالا یعنی N به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، می‌توانیم جمع گسستهٔ بالا را به انتگرال زیر با اعمال تغییر متغیر $\lambda = \frac{m}{N}$ تبدیل کنیم:

$$e^{A+\varepsilon B} = e^A + \varepsilon\int_0^1 e^{\lambda A} B e^{(1-\lambda)A} d\lambda = \int_0^1 e^{\lambda A}(I+\varepsilon B)e^{(1-\lambda)A} d\lambda \qquad (۱۰۳)$$

اکنون با اعمال رابطهٔ بیکر-هاسدوروف[1] [46] در رابطهٔ (۱۰۳)و با توجه به تعریف $\hat{Q} = \hat{I} + 2\varepsilon\hat{N} + \frac{\beta|\nabla T|L}{2}\hat{A}$ می‌توانیم رابطهٔ ۳۱ را باتوجه به بسط بالا بازنویسی کنیم:

$$e^{-\frac{(t-s)\hat{Q}}{\tau}} = e^{-\frac{(t-s)}{\tau}}(\hat{I} + \frac{s-t}{\tau}(2\varepsilon\hat{N} + \frac{\beta|\nabla T|L}{2}\hat{A})) \qquad (۱۰۴)$$

مراجع

1. M Kardar, Statistical physics of particles, Cambridge University Press, (2007).
2. S R De Groot, P Mazur, Non-equilibrium thermodynamics, Courier Corporation, (2013).
3. J K Platten, P Costesèque, "Charles Soret. A short biographya ",The European Physical Journal 15(2004) 235.
4. C Soret, "Sur letat dequilibre que prend au point de vue de sa concentration une dissolution saline primitivement homogene dont deux parties sont portees a des temperatures diffentes ",Arch Sci Phys Nat ,2 (1879) 48.
5. C Soret, "Influence de la temp´ erature sur la distribution ",Acad. Sci. Paris C. R ,91 (1880) 289.
6. C Ludwig, "Difusion awischen ungleich erwärmten Orten gleich zusammengesetzter Lösungen ",.Sitz Math Naturwiss Classe Kaiserichen Akad Wiss, 20 (1856) 539.
7. C Debuschewitz , W Köhler, "Molecular Origin of Thermal Diffusion in Benzene+Cyclohexane Mixtures ",Physical review letters ,87 (2001) 055901.
8. M E Hovingh, G H Thompson, J C Giddings, "Column parameters in thermal field-flow fractionation ",Analytical Chemistry , 42 (1970) 195.

[1] Baker–Campbell–Hausdorff formula

9. a J C G Martin Schimpf, “Characterization of thermal diffusion in polymer solutions by thermal field-flow fractionation: dependence on polymer and solvent parameters ”,Journal of Polymer Science Part B: Polymer Physics, 27 (1989) 1317.
10. W Köhler, A Krekhov, W Zimmermann, “Thermal diffusion in polymer blends: Criticality and pattern formation ”, درComplex Macromolecular Systems I ,Springer Science & Business Media, (2010) 145.
11. R Piazza, A Guarino, “Soret effect in interacting micellar solutions ”,Physical review letters, 88 (2002) 208302.
12. S N Rasuli ,R Golestanian, “Soret motion of a charged spherical colloid ”,Physical review letters, 101 (2008) 108301.
13. D B Mayer, D Braun ,T Franosch, “Thermophoretic motion of a charged single colloidal particle ”,Physical Review E, 107 (2023) 044602.
14. D B Mayer, T Franosch, D Braun, “Thermophoresis beyond local thermodynamic equilibrium ”,Physical Review Letters, 130 (2023) 168202.
15. K I Morozov, W Köhler, “Can the thermophoretic mobility of uncharged colloids be predicted ”,Langmuir, 38 (2022) 2478.
16. S Semenov, M Schimpf, “Theory of Soret coefficients in binary organic solvents ”,The Journal of Physical Chemistry B, 118 (2014) 3115.
17. L D Landau, E M Lifshitz, Fluid Mechanics: Landau and Lifshitz: Course of Theoretical Physics, , Elsevier, (2013).
18. T Araki, N Chikakiyo, “Contribution of internal degree of freedom of soft molecules to Soret effect ”,Physical Review E, 103 (2021) 042611.
19. O R Gittus, J D Olarte-Plata, F Bresme, “Thermal orientation and thermophoresis of anisotropic colloids: The role of the internal composition ”,The European Physical Journal E , 42 (2019) 1.
20. L Bocquet, E Charlaix, “Nanofluidics, from bulk to interfaces ”,Chemical Society Reviews, 39 (2010) 1073.
21. A Wurger, “Molecular-weight dependent thermal diffusion in dilute polymer solutions ”,Physical review letters, 102 (2009) 078302.
22. B H Zimm, “Dynamics of polymer molecules in dilute solution: viscoelasticity, flow birefringence and dielectric loss ”,The journal of chemical physics, 24 (1956) 269.
23. G Najaf, P Cicuta, S N Rasuli, “Dance of a Polymer Chain Against an External Fluid ”,Under preparation .
24. G Najafi Gol-Vandani, S Di Leo, J Kotar, P Cicuta, S N Rasuli, “Two Microspheres in an External Flow: a Dance of Cause and Effect ”,arXiv:1906.07621 ,(2019).
25. M Leoni, J Kotar, B Bassetti, P Cicuta, M C Lagomarsino, “A basic swimmer at low Reynolds number ”,Soft Matter, 5 (2009) 472.
26. A Najafi, R Golestanian, “Simple swimmer at low Reynolds number: Three linked spheres ”,Physical Review E, 69 (2004) 062901.
27. J C Meiners, S R Quake, “Direct measurement of hydrodynamic cross correlations between two particles in an external potential ”,Physical Review Letters, 82 (1999) 2211.
28. M Leoni, B Bassetti, J Kotar, P Cicuta, M C Lagomarsino, “Minimal two-sphere model of the generation of fluid flow at low Reynolds numbers ”,Physical Review E , 81(2010) 036304.
29. A Bérut, A Petrosyan, S Ciliberto, “Energy flow between two hydrodynamically coupled particles kept at different effective temperatures ”,Europhysics Letters, 107 (2014) 60004.
30. I A Martinez, E Roldan, J M R Parrondo and D Peetrov, “Effective heating to several thousand kelvins of an optically trapped sphere in a liquid ”,PRE ,87 (2013)
31. A Swidsinski, “Viscosity gradient within the mucus layer determines the mucosal barrier function and the spatial organization of the intestinal microbiota ”,INFLAMMATORY BOWEL DISEASES ,13 (2007), 963.
32. B Liebchen, P Monderkamp, B T Hagen and H Löwen, “Microswimmer Navigation in Viscosity Gradients ”,Phys. Rev. Lett , 120 (2018).
33. K Shoele, P S Eastham, “Effects of nonuniform viscosity on ciliary locomotion ”,PHYSICAL REVIEW FLUIDS , 3 (2018).
34. C Datt, G J Elfring, “Active Particles in Viscosity Gradients ”,Phys. Rev. Lett, 123 (2019).
35. D Das, “Flow field disturbance due to point viscosity variations in a heterogeneous fluid ”,Phys. Rev. Fluids, 8 (2023).
36. W B Russel, D A Saville, W R Schowalter, Colloidal dispersions, Cambridge university press, (1991).
37. P Langevin, “Sur la theorie du mouvement brownien ”,Compt. Rendus, 146 (1908) 530.

38. A K Doolittle, “Studies in Newtonian flow. I. The dependence of the viscosity of liquids on temperature ”,Journal of Applied Physics, 22 (1951) 1031.
39. J Hallett, “The temperature dependence of the viscosity of supercooled water ”,Proceedings of the Physical Society, 82 (1963) 1046.
40. S N Rasuli, G Najafi Gol-Vandani, P Cicuta, “Reverse Dance of Two Trapped Beads in External Flow I: A Far Field Approach ”,under preparation , (2023).
41. G G Stokes, “On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums ”,Transactions of the Cambridge Philosophical Society ,4 (1851) 8.
42. C W Oseen, Neuere methoden und ergebnisse in der hydrodynamik ,۱ ,Akademische Verlagsgesellschaft, (1927).
43. E Bringuier, “On the notion of thermophoretic velocity ”,Philosophical Magazine, 87 (2007) 873.
44. A Najafi و F Pousaneh, “Thermophoresis and the Effect of Hydrodynamic Interactions in a Linear Model for Colloids ”,International Journal of Modern Physics B, 25 (2011) 4379.
45. J D Jackson, “Classical Electrodynamics”, Wiley, (1998).
46. G B Arfcan, H J Weber, F Harris, “Mathematical Methods for Physicists ,”Academic Press, (2005).
47. C Van den Broeck, R Kawai, P Meurs, “Microscopic analysis of a thermal Brownian motor ”,Physical Review Letters ,۹۳ (2004) 090601