

درهم‌تنیدگی سامانه‌های سه‌بخشی بوزونی فراتر از تقریب تک مد در چارچوب شتاب‌دار

مرتضی سلطانی، امین جواهری و محمد هادی

گروه فیزیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

پست الکترونیکی: m.soltani@sci.ui.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۰۳/۱۲؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۴/۰۳/۱۷)

چکیده

در این کار ما به تعمیم درهم‌تنیدگی سه‌بخشی میدان بوزونی در حضور یک ناظر نالخت به فراتر از تقریب تک مد پرداخته‌ایم. برای این منظور ابتدا مروری به اثر شتاب بر روی مدهای میدان و اثر آن بر روی حالت‌های کوانتومی کرده و تقریب تک مد و فراتر از تقریب تک مد را نیز معرفی می‌کنیم. پس از این مرور اجمالی به سراغ مسئله اصلی این مقاله که بررسی درهم‌تنیدگی سه‌بخشی میدان بوزونی در فراتر از تقریب تک مد است می‌پردازیم. حالت‌های درهم‌تنیده سه‌بخشی دارای کلاس‌های مختلفی هستند که مهم‌ترین آنها حالت GHZ و حالت W می‌باشد. ما در این کار اثر شتاب یکی از ناظرها را بر روی درهم‌تنیدگی این دو حالت در فراتر از تقریب تک مد بررسی می‌کنیم. همچنین تفاوت نتایج به دست آمده را با کارهای قبلی که برای سامانه سه‌بخشی در تقریب تک مد صورت گرفته است بیان می‌کنیم. برای حالت GHZ، تنیدگی پی به عنوان معیار درهم‌تنیدگی، برای بعضی مدهای آنرو با افزایش شتاب، افزایش می‌یابد؛ این افزایش درهم‌تنیدگی اتفاقی است که در تقریب تک‌مد مشاهده نمی‌شود. وجه تمایز دیگری که در مطالعه درهم‌تنیدگی حالت GHZ در ورای تقریب تک‌مد نسبت به تقریب تک‌مد مشاهده می‌شود، بیشینه شدن درهم‌تنیدگی برای بعضی دیگر از مدهای آنرو است؛ یعنی با افزایش شتاب، درهم‌تنیدگی رفتاری یکنوا ندارد. به ازای مدهای مختلف آنرو در حد شتاب بی‌نهایت، تنیدگی پی به مقادیر حدی غیر صفر متفاوتی میل می‌کند. برخلاف حالت GHZ، درهم‌تنیدگی حالت W تنها رفتارهای یکنوا افزایشی و کاهش از خود نشان می‌دهد؛ همچنین در حد شتاب بی‌نهایت، تنیدگی پی برای همه انتخاب‌های ممکن از مدهای آنرو فقط به $0/176$ میل می‌کند؛ از این رو در این حد، از جهت درهم‌تنیدگی کوانتومی، تفاوتی بین روش‌های تقریب تک مد و ورای تقریب تک مد وجود نخواهد داشت.

واژه‌های کلیدی: میدان بوزونی، ضرایب بگولیوبوف، درهم‌تنیدگی، فراتر از تقریب تک مد، تنیدگی پی

۱. مقدمه

کوانتومی^۲ و محاسبات کوانتومی^۳ نه تنها فیزیکدانان بلکه محققین دیگر شاخه‌های علوم خصوصاً علوم کامپیوتر،

این روزها، پیشرفت‌های جدید تکنولوژی در شاخه‌هایی از علم اطلاع‌رسانی کوانتومی مانند رمزنگاری کوانتومی^۱، ترابرد

۲. The quantum teleportation

۳. The quantum computation

۱. The quantum cryptography

سامانه‌های سه‌کیوبیتی روی میدان فرمیونی مشخص شده است که برحسب اینکه یک یا دو ناظر شتاب بگیرند، تنیدگی پی رفتار متفاوتی از خود نشان می‌دهد؛ درهم‌تنیدگی زمانی که دو ناظر شتاب‌دار باشند نسبت به حالتی که یک ناظر شتاب‌دار باشد، با سرعت بیشتری کاهش می‌یابد و در شتاب بالا به مقادیر متفاوتی میل می‌کند [۱۴].

در همه کارهای فوق نتایج حاصل با این فرض به دست آمده‌اند که آشکارساز همه ناظرها تنها به یک تک مد مینکوفسکی حساس باشند؛ این فرض مذکور را تقریب تک مد^۴ می‌گویند [۵]. اما در مرجع [۱۱] نشان داده شده‌است که این تقریب تنها برای نوع خاصی از حالت‌ها که دارای بسته موج‌های به اندازه کافی تیز حول فرکانس مینکوفسکی می‌باشند، برقرار است. میزان درهم‌تنیدگی سامانه‌ها به نوع این بسته موج‌ها وابسته‌است، بنابراین انتخاب بسته موج‌های دیگر می‌تواند منجر به نتایج جدیدی شود؛ از این رو بررسی مسائل در ورای تقریب تک‌مد ضروری به نظر می‌رسد. بعضی از نتایج جدید حاصل از کنار گذاشتن این تقریب را می‌توان در مراجع [۱۱ و ۱۲] مشاهده نمود.

در مراجع [۱۲، ۱۱، ۹ و ۱۵] مسئله فراتر از تقریب تک مد برای سامانه‌های دوبخشی مورد بررسی قرار گرفته‌اند ولی تغییرات درهم‌تنیدگی سه‌بخشی GHZ و W در ورای تقریب تک مد بررسی نشده است و ما در این مقاله درهم‌تنیدگی این سامانه‌ها را در حضور یک ناظر شتاب‌دار در فراتر از تقریب تک مد برای میدان بوزونی بررسی کرده‌ایم. به عبارتی این مقاله تعمیم مقاله [۱۳] به فراتر از تقریب تک مد است. ساختار مقاله به صورت زیر است: در بخش ۲ مدهای مینکوفسکی و ریندلری را معرفی می‌کنیم و سپس ضرایب بگولیوبوف را با بیان جزئیات آن استخراج می‌کنیم، در ادامه به معرفی مدهای آنرو می‌پردازیم و در انتهای این بخش حالت‌های خلا و ذره آنرو را به دست می‌آوریم. در بخش‌های ۳ و ۴ تنیدگی پی حالت‌های GHZ و W را در ورای تقریب تک مد محاسبه می‌کنیم و رفتار آن را نسبت به شتاب یکی از ناظرها مورد

ریاضیات گسسته و مهندسی برق را به خود جذب کرده است. پیشرفت‌های اخیر مبین آن است که استفاده از پدیده‌های کوانتومی به جای روش‌های شناخته شده امروزی که مبتنی بر فیزیک کلاسیک هستند، می‌تواند مثرتر باشد [۱]. در سال‌های اخیر عده‌ای از محققین به بررسی اطلاع‌رسانی کوانتومی در حوزه نسیت پرداخته‌اند [۲-۱۸]. درهم‌تنیدگی از مهمترین موضوعاتی است که در حوزه اطلاع‌رسانی کوانتومی نسیتی مورد مطالعه قرار گرفته است. شتاب‌دار کردن ناظرها می‌تواند اثرات نسیتی جالبی داشته باشد. می‌توان ناظر شتاب‌دار را معادل ناظری در حضور سیاهچاله یا کرمچاله با فضای خمیده در نظر گرفت [۱۹ و ۲۰]. پس می‌توان نتایج مربوط به ناظر شتاب‌دار در فضای تخت را به ناظر در حضور سیاهچاله نیز تعمیم داد [۱۲].

مطالعه درهم‌تنیدگی بین دو مد آزاد بوزونی در سامانه‌های دوبخشی نشان داده است که درهم‌تنیدگی بین ناظرهای لخت از یک مقدار بیشینه، با شتاب گرفتن یکی از ناظرها کاهش یافته و به مقدار کمینه صفر در شتاب بی‌نهایت می‌رسد [۶]، این رویداد در واقع نتیجه اثر آنرو^۱ می‌باشد [۲۱]. همانند میدان بوزونی درهم‌تنیدگی دو مد آزاد فرمیونی با افزایش شتاب یکی از ناظرها کاهش می‌یابد، اما برخلاف آن در حد شتاب‌های بالا به مقداری غیر صفر میل می‌کند، این مقدار غیر صفر برای درهم‌تنیدگی تشکیل^۲ برابر^{۱/√۲} می‌باشد [۷]. بررسی درهم‌تنیدگی بین سه ناظر که یکی از حالت‌های GHZ یا W [۲۲ و ۲۳] را در ابتدا اشتراک گذاری کرده‌اند و یک یا دوتای آن‌ها شتاب می‌گیرند، جالب است. در حالت بوزونی تنیدگی پی^۳ به عنوان سنج درهم‌تنیدگی سامانه‌های سه‌بخشی، به طور یکنواخت از یک مقدار بیشینه در شتاب صفر به یک مقدار کمینه غیر صفر در شتاب بی‌نهایت کاهش می‌یابد. این مقدار کمینه غیر صفر برای حالت‌های GHZ و W به ترتیب برابر $\frac{\pi}{6}$ و 0.176 می‌باشد [۱۳]. با تحقیق در مورد درهم‌تنیدگی

۱. Unruh effect

۲. Entanglement of formation

۳. The π -tangle

۴. The single-mode approximation

ارزیابی قرار می‌دهیم .

۲. فرمول‌بندی کلی

پاسخ‌های معادله کلاین-گوردون ضروری است. اگر ϕ و ϕ دو پاسخ از این معادله باشند، آنگاه ضرب داخلی اسکالر روی فضا-زمان دوبعدی مینکوفسکی به شکل

$$(\phi, \phi) = i \int dz \phi^* \bar{\partial}_t \phi$$

خواهد بود، که در آن $\phi^* \bar{\partial}_t \phi = \phi^* (\partial_t \phi) - (\partial_t \phi^*) \phi$ با توجه به تعریف ضرب داخلی فوق، روابط راست هنجاری حاکم بر مدهای مینکوفسکی به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} (U_k^M, U_{k'}^M) &= \delta(k-k'), \\ (U_k^{M*}, U_{k'}^{M*}) &= -\delta(k-k'), \\ (U_k^M, U_{k'}^{M*}) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

اکنون در موقعیتی هستیم که بتوانیم عملگر میدان $\hat{\phi}$ را بر حسب مدهای راست هنجار مینکوفسکی بسط دهیم. انتظار داریم ضرایب بسط، عملگر باشند؛ بنابراین چون دو مد U_k^M و U_k^{M*} متعامدند، داریم

$$\hat{\phi} = \int_{-\infty}^{\infty} dk [U_k^M a_k^M + U_k^{M*} a_k^{M\dagger}], \quad (3)$$

که در آن a_k^M و $a_k^{M\dagger}$ به ترتیب عملگرهای فنا و خلق ذره با تکانه k هستند. عملگرهای خلق و فنا رابطه جابه‌جایی زیر را برآورده می‌کنند

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta(k-k'), \quad (4)$$

و بقیه جابه‌جاگرهای ممکن برابر صفر هستند.

۲.۲. مختصات ریندلری

از مختصات ریندلری برای توصیف پدیده‌ها از دیدگاه ناظر نالخت با شتاب ثابت استفاده می‌شود. اگر مولفه‌های مختصات ریندلری را به صورت (η, ξ) تعریف کنیم، ارتباط بین مختصات مینکوفسکی و ریندلری از رابطه زیر به دست می‌آید [۲۷]

$$\begin{aligned} t &= \xi \sinh \eta, \\ z &= \xi \cosh \eta, \quad -\infty < \xi, \eta < \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

باید توجه داشت که η در حقیقت زمان بدون بعد از دیدگاه ناظر نالخت است که زمان ریندلری نامیده می‌شود. تبدیلات

فوق متضمن دو رابطه $\xi^2 - t^2 = z^2$ و $\frac{t}{z} = \tanh \eta$ هستند، که

عموما پژوهش‌هایی که پیرامون درهم‌تیدگی میدان بوزونی در حوزه چارچوب‌های شتاب‌دار انجام شده است، در فضا-زمان دوبعدی و روی میدان‌های حقیقی بدون جرم بوده است [۵، ۶، ۱۱، ۱۲، ۲۴ و ۲۵]. چون در این مقاله قرار است درهم‌تیدگی بین ناظرهای لخت و نالختی بررسی شود که ذرات بوزونی آشکارسازی می‌کنند، لذا دانستن پاسخ‌های معادله کلاین-گوردون^۱ از هر دو منظر ضروری است.

۱.۲. مختصات مینکوفسکی

برای توصیف ناظر لخت از مختصات مینکوفسکی استفاده می‌شود. معادله کلاین-گوردون بدون جرم در فضا-زمان دوبعدی مینکوفسکی (در واحد طبیعی) به شکل $\phi = 0$ است. پاسخ استاندارد معادله کلاین-گوردون در مختصات مینکوفسکی، پاسخ امواج تخت است که شکل بهنجار شده آن عبارت است از [۲۶]

$$U_k^M = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{[-i\omega t + ikz]}, \quad (1)$$

که در آن بالوند M بیانگر مینکوفسکی بودن مدها، k بردار تکانه در راستای محور z با مقادیر $-\infty < k < \infty$ و ω فرکانس مینکوفسکی است که با بردار تکانه رابطه $\omega = |k|$ را دارد. مدهای مینکوفسکی نسبت به بردار کیلینگ زمان گونه رو به آینده^۲، ∂_t ، مدهای فرکانس مثبت هستند، یعنی $\omega > 0$ و $\partial_t U_k^M = -i\omega U_k^M$ اگر $k > 0$ باشد، موج را رونده به سمت راست و اگر $k < 0$ باشد، موج را رونده به سمت چپ می‌گویند.

پاسخ‌های معادله کلاین-گوردون یک مجموعه کامل را تشکیل می‌دهند. به منظور ساختن یک مجموعه راست هنجار از پاسخ‌های فوق، تعریف یک ضرب داخلی روی فضای

۱. Kline-Gordon equation

۲. Future directed Timelike Killing vector

ویژه τ و دیگری رابطه بین شتاب ویژه a و مختصه مکانی دستگاه ریندلری است

$$\eta = a\tau, \quad \xi = \text{const} = \frac{1}{a}. \quad (6)$$

همواره ناظر شتابدار تنها به یکی از دو ناحیه ریندلری دسترسی دارد؛ چون این دو ناحیه از لحاظ علی از یکدیگر منقطع هستند، یعنی اگر ناظری که در ناحیه اول قرار دارد، پالس نوری به سمت ناظر واقع در ناحیه دوم بفرستد (این پالس به موازات یکی از افق‌های رویداد است) او آن را نمی‌تواند آشکارسازی کند، به عبارت دیگر این پالس نوری جهان خط مربوط به ناظر در ناحیه دوم را قطع نخواهد کرد. همان طور که قبلاً گفته شد زمان ویژه مربوط به ناحیه دوم در جهت مخالف با ناحیه اول جریان دارد و همچنین شتاب در ناحیه دوم قرینه شتاب در ناحیه اول است. در حقیقت جهان خط واقع در ناحیه اول، جهان خط ناظری است که شتاب و زمان ویژه آن a و τ است، چنین ناظری را راب می‌نامیم. جهان خط واقع در ناحیه دوم مربوط به ناظری است که شتاب و زمان ویژه آن $-a$ و $-\tau$ است، چنین ناظری را آنتی‌راب می‌نامیم. به عبارت بهتر زمانی که یک ناظر شتاب می‌گیرد، قسمتی از فضا-زمان را از دست می‌دهد؛ این مطلب مقدمه‌ایست برای ورود به مبحث اطلاع‌رسانی کوانتومی و محاسبه کمیت درهم‌تنیدگی که در قسمت‌های بعد به آن خواهیم پرداخت.

معادله کلاین-گوردون در مختصات ریندلری دویبعدی را می‌توان از روی متریک ریندلری و شکل کلی این معادله در یک مختصات عام به دست آورد $\phi = 0$ $(\frac{-1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}) \phi = 0$. برای به دست آوردن پاسخ‌های معادله فوق از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌شود. انتظار داریم تابع مربوط به زمان ریندلری همانند مورد مینکوفسکی باشد، بنابراین پاسخ معادله کلاین-گوردون در مختصات ریندلری دویبعدی بدون جرم به صورت زیر به دست می‌آید [۲۷]

$$U_{\Omega}^{(\sigma)} = \theta(\sigma\xi) \frac{e^{-i\sigma\Omega\eta}}{\sqrt{2\Omega}} h_{\Omega}^{(\sigma)}(\xi). \quad (7)$$

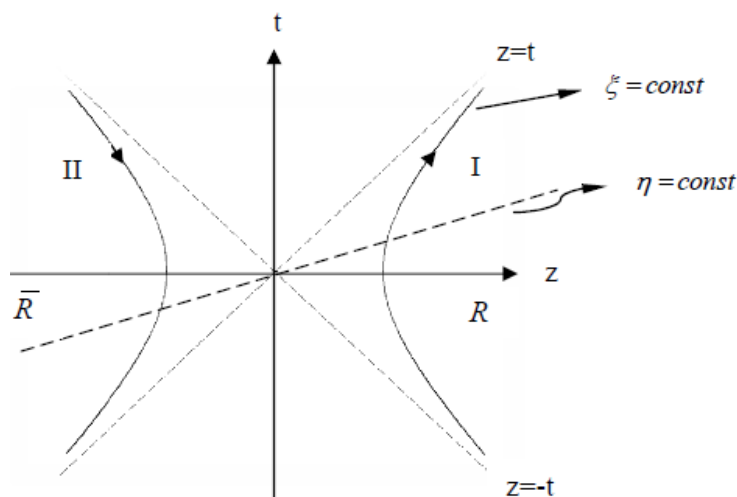
نتیجه می‌دهند: $|z| > |t|$ یا $|z| < -|t|$. از تبدیلات فوق واضح است که اگر $\xi > 0$ ، آنگاه $z > 0$ و اگر $\xi < 0$ ، آنگاه $z < 0$. همچنین باید توجه داشت که اگر فرض کنیم t از منفی بینهایت تا مثبت بینهایت تغییر کند آنگاه در ناحیه اول ($\xi > 0$)، η از منفی بینهایت تا مثبت بینهایت تغییر می‌کند، اما در ناحیه دوم ($\xi < 0$)، زمان ریندلری از مثبت بی‌نهایت تا منفی بینهایت تغییر می‌کند، یعنی در ناحیه دوم جهت زمان وارونه می‌شود.

چون متریک ریندلری مستقل از زمان است [۲۷]، ∂_{η} بردار کیلینگ زمان گونه‌رو به آینده برای ناحیه اول ریندلری است. لذا به کمک تبدیلات رابطه (۵) داریم $\partial_{\eta} = \frac{\partial t}{\partial \eta} \partial_t + \frac{\partial z}{\partial \eta} \partial_z = z\partial_t + t\partial_z$ همان طور که مشاهده می‌شود یک انتقال زمانی در فضا-زمان ریندلری معادل با یک بوست^۱ در فضا-زمان مینکوفسکی است. این مطلب بدان معناست که در هر لحظه از زمان می‌توان چارچوب لختی پیدا کرد که سرعتش با سرعت چارچوب نالخت یکسان باشد. به چنین چارچوب‌های لختی چارچوب‌های هم‌حرکت لحظه‌ای^۲ گفته می‌شود [۲۸و۷]. چون در ناحیه دوم جهت زمان عکس ناحیه اول است، بردار کیلینگ زمان گونه‌رو به آینده در ناحیه دوم به صورت $\partial_{-\eta} = -\partial_{\eta}$ خواهد بود [۲۹].

باید توجه داشت که تبدیلات رابطه (۵)، ارتباط بین جهان خط یک ذره از دیدگاه ناظر لخت را با جهان خط همان ذره از دیدگاه ناظر نالخت نشان می‌دهد. از این رو اگر فرض کنیم $\xi = \text{const}$ ، آنگاه می‌فهمیم که جهان خط ناظر نالخت از دیدگاه ناظر لخت یک هذلولی است، یعنی $z^2 - t^2 = \text{const}$. همچنین اگر $\eta = \text{const}$ را در نظر بگیریم، آنگاه خواهیم داشت $\frac{z}{t} = \text{const}$ ، که بیانگر خطی است راست که از مبدا مختصات مینکوفسکی می‌گذرد و لحظه خاصی را از دیدگاه ناظر نالخت نشان می‌دهد (شکل ۱). با بررسی ویژگی چارچوب‌های هم‌حرکت لحظه‌ای می‌توان به دو نتیجه مهم دست یافت: یکی ارتباط بین زمان بدون بعد ریندلری با زمان

۱. The Boost

۲. The instantaneous co-moving frames



شکل ۱. نمودار فضا-زمان ریندلری: منحنی‌های هذلولوی مربوط به ξ ثابت و خط‌چین مستقیم مربوط به زمان ریندلری ثابت است. در ناحیه اول (I)، زمان ریندلری در جهت t است؛ اما در ناحیه دوم (II)، زمان ریندلری در جهت $-t$ است. R و \bar{R} بیانگر دو ناظر به نام‌های راب و آنتی‌راب هستند که اولی به ناحیه اول و دومی به ناحیه دوم ریندلری دسترسی دارد. خط‌چین‌های $z = -t$ و $z = t$ افق‌های رویداد هستند و به ترتیب متناظر با زمان‌های ویژه $\tau = +\infty$ و $\tau = -\infty$ می‌باشند.

شرویدینگر ذره آزاد تبدیل می‌شود $-\frac{d^2}{d\xi'^2} h_{\Omega}^{(\sigma)}(\xi') = \Omega^2 h_{\Omega}^{(\sigma)}(\xi')$. اگر فرض کنیم $h_{\Omega}^{(\sigma)}(\xi')$ بهنجار باشد، چون پاسخ‌های معادله شرویدینگر متعامدند، داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi' h_{\Omega}^{(\sigma)}(\xi') h_{\Omega'}^{(\sigma)*}(\xi') = \delta(\Omega - \Omega'), \quad (9)$$

که $h_{\Omega}^{(\sigma)*}(\xi')$ مزدوج مختلط $h_{\Omega}^{(\sigma)}(\xi')$ می‌باشد. بنابراین به کمک تعریف ضرب داخلی ریندلری در فضا-زمان دوبعدی، یعنی $(\phi_1, \phi_2) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{|\xi|} \phi_1^* \bar{\partial}_\eta \phi_2$ ، روابط راست هنجاری مدهای ریندلری به شکل زیر به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} (U_{\Omega}^{(\sigma)}, U_{\Omega'}^{(\sigma')}) &= \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\Omega - \Omega'), \\ (U_{\Omega}^{(\sigma)*}, U_{\Omega'}^{(\sigma')*}) &= -\delta_{\sigma\sigma'} \delta(\Omega - \Omega'), \\ (U_{\Omega}^{(\sigma)}, U_{\Omega'}^{(\sigma')*}) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

از این رو می‌توان یک میدان دلخواه را برحسب این مدها بسط داد

$$\hat{\phi} = \int_0^{\infty} d\Omega \left[U_{\Omega}^I c_{\Omega}^I + U_{\Omega}^{I*} c_{\Omega}^{I\dagger} + U_{\Omega}^{II} c_{\Omega}^{II} + U_{\Omega}^{II*} c_{\Omega}^{II\dagger} \right], \quad (11)$$

که در آن c_{Ω}^I و $c_{\Omega}^{I\dagger}$ به ترتیب عملگرهای فنا و خلق ذره مربوط به ناحیه اول و c_{Ω}^{II} و $c_{\Omega}^{II\dagger}$ به ترتیب عملگرهای فنا و خلق ذره

در رابطه فوق Ω فرکانس بدون بعد ریندلری است. برای ناحیه اول ریندلری، $(\sigma) = I$ ، $\sigma = +1$ ، و برای ناحیه دوم ریندلری، $(\sigma) = II$ ، $\sigma = -1$ است. ضریب بهنجارش $\frac{1}{\sqrt{2}\Omega}$ مربوط به جمله $e^{-i(\sigma\Omega)\eta}$ است که مشابه فضای مینکوفسکی آن را انتخاب کردیم. باید پاسخ معادله موج مربوط به ناحیه اول، U_{Ω}^I ، در ناحیه دوم صفر باشد و نیز در ناحیه اول، باید U_{Ω}^{II} صفر شود؛ تابع پله‌ای $\theta(\sigma\xi)$ متضمن این شرط‌هاست، چون گفته شد در ناحیه اول، $\xi > 0$ و در ناحیه دوم، $\xi < 0$ است.

انتظار داریم $\Omega\eta = \omega_R \tau$ باشد، که در آن ω_R فرکانس ریندلری است، از این رو با توجه به معادله اول رابطه (۶)،

رابطه مهم زیر به دست می‌آید

$$\Omega = \frac{\omega_R}{a}. \quad (8)$$

مدهای ریندلری نسبت به بردار کیلینگ زمان گونه ∂_η در ناحیه اول و نسبت به بردار کیلینگ زمان گونه $\partial_{-\eta}$ در ناحیه دوم،

مدهای فرکانس مثبت (ذره) هستند، یعنی

$$\partial_{\sigma\eta} U_{\Omega}^{(\sigma)} = -i\Omega U_{\Omega}^{(\sigma)}, \quad \Omega > 0$$

با جایگذاری مدهای ریندلری در معادله کلاین-گوردون و

به کمک تغییر متغیر $\xi' = \ln|\xi|$ معادله مذکور به معادله

خطی از عملگرهای خلق و فنا می‌نکوفسکی هستند. اکنون می‌خواهیم ضریب آلفای بگولیوبوف را حساب کنیم. برای این کار باید ضرب داخلی را که روی فضای ریندلری تعریف شده است، در حضور مدهای مینکوفسکی و ریندلری حساب کنیم. اگر از تعریف انتگرالی تابع فاکتوریل، یعنی $\int_0^\infty dy e^{-y} y^s = s!$ استفاده کنیم که در آن انتگرال روی محور اعداد موهومی صفحه اعداد مختلط است و نیز با انجام عملیات جبری به دست می‌آوریم

$$\alpha_{\Omega k}^I = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sqrt{\omega\Omega}}} \begin{bmatrix} (i)^{-i\Omega} k^{i\Omega} (-i\Omega)! \left(1 + \frac{\omega}{k}\right) \\ + (i)^{i\Omega} k^{-i\Omega} (i\Omega)! \left(1 - \frac{\omega}{k}\right) \end{bmatrix},$$

$$\alpha_{\Omega k}^{II} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sqrt{\omega\Omega}}} \begin{bmatrix} (i)^{-i\Omega} (-k)^{i\Omega} (-i\Omega)! \left(1 - \frac{\omega}{k}\right) \\ + (i)^{i\Omega} (-k)^{-i\Omega} (i\Omega)! \left(1 + \frac{\omega}{k}\right) \end{bmatrix}.$$

می‌دانیم $e^{i\theta} = |(i\Omega)!|$ ، که در آن θ ، فاز $(i\Omega)!$ است، بنابراین به کمک تغییر متغیر $\theta = -\Omega \ln l$ که $0 < l < \infty$ ، خواهیم داشت $|(i\Omega)!| = l^{-i\Omega}$. همچنین می‌دانیم $|(i\Omega)!| = \sqrt{\frac{\pi\Omega}{\sinh \pi\Omega}}$ [۳۰]، لذا با جایگذاری موارد مذکور در رابطه فوق خواهیم داشت

$$\alpha_{\Omega k}^I = \frac{1}{\sqrt{4\sqrt{\sinh \pi\Omega\pi\omega}}} \begin{bmatrix} (i)^{-i\Omega} (kl)^{i\Omega} \left(1 + \frac{\omega}{k}\right) \\ + (i)^{i\Omega} (kl)^{-i\Omega} \left(1 - \frac{\omega}{k}\right) \end{bmatrix},$$

$$\alpha_{\Omega k}^{II} = \frac{1}{\sqrt{4\sqrt{\sinh \pi\Omega\pi\omega}}} \begin{bmatrix} (i)^{-i\Omega} (-kl)^{i\Omega} \left(1 - \frac{\omega}{k}\right) \\ + (i)^{i\Omega} (-kl)^{-i\Omega} \left(1 + \frac{\omega}{k}\right) \end{bmatrix}.$$

اکنون $k = \varepsilon\omega$ را در نظر می‌گیریم، $\varepsilon = 1$ مربوط به مدهایی با تکانه‌های مثبت است (حرکت کننده به سمت راست) و $\varepsilon = -1$ مربوط به مدهایی با تکانه‌های منفی است (حرکت کننده به سمت چپ)، بنابراین با توجه به آنکه $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$ و $e^{i\pi} = -1$ ، ضریب آلفای بگولیوبوف به صورت $\alpha_{\Omega k}^{(\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}} \sqrt{\frac{e^{\pi\Omega}}{e^{\pi\Omega} + e^{-\pi\Omega}}} (\omega l)^{\sigma k} i\Omega$ به دست خواهد آمد. همچنین اگر روش فوق را برای محاسبه ضریب بتای

مربوط به ناحیه دوم با فرکانس Ω هستند. به سادگی می‌توان دید که این عملگرها در روابط جابه‌جایی زیر صدق می‌کنند

$$[c_{\Omega}^I, c_{\Omega'}^{I\dagger}] = [c_{\Omega}^{II}, c_{\Omega'}^{II\dagger}] = \delta(\Omega - \Omega'), \quad (12)$$

و بقیه جابه‌جاگرها برابر صفرند. می‌دانیم که پاسخ‌های $h_{\Omega}^{(\sigma)}(\xi')$ ترکیب خطی از امواج تخت $e^{i\Omega\xi'}$ و $e^{-i\Omega\xi'}$ هستند که برحسب ξ به صورت $|\xi|^{-i\Omega}$ در خواهند آمد، بنابراین با توجه به شرط تعامد (۹)، توابع $h_{\Omega}^{(\sigma)}(\xi)$ به شکل زیر به دست می‌آیند

$$h_{\Omega}^I(\xi) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} (\xi^{-i\Omega} - \xi^{i\Omega}) \quad \xi > 0,$$

$$h_{\Omega}^{II}(\xi) = \frac{1}{-i\sqrt{2\pi}} ((-1)^{-i\Omega} \xi^{-i\Omega} - (-1)^{i\Omega} \xi^{i\Omega}) \quad \xi < 0. \quad (13)$$

۳.۲. ضرایب بگولیوبوف

تا این جا ما عملگر میدان را برحسب دو دسته مد بسط دادیم، اکنون موقع آن رسیده که ارتباط بین این دو دسته مدها مشخص شود. اگر روابط (۳) و (۱۱) را مجدداً بنویسیم، آنگاه داریم

$$\hat{\phi} = \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[U_k^M a_k^M + U_k^{M*} a_k^{M\dagger} \right] \\ = \int_0^{\infty} d\Omega \left[U_{\Omega}^I c_{\Omega}^I + U_{\Omega}^{I*} c_{\Omega}^{I\dagger} + U_{\Omega}^{II} c_{\Omega}^{II} + U_{\Omega}^{II*} c_{\Omega}^{II\dagger} \right]. \quad (14)$$

با اعمال عملگر ضرب داخلی ریندلری، یعنی $(\phi, \eta) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{|\xi|} \phi^* \bar{\partial}_{\eta}$ روی تساوی فوق و انتخاب ϕ از میان مدهای ریندلری و نیز به کمک روابط تعامد (۱۰) می‌توان عملگرهای ریندلری را برحسب عملگرهای مینکوفسکی به صورت زیر نوشت

$$c_{\Omega}^{(\sigma)} = \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[\alpha_{\Omega k}^{(\sigma)} a_k^M + \beta_{\Omega k}^{(\sigma)} a_k^{M\dagger} \right]. \quad (15)$$

در رابطه فوق ضرایب $\alpha_{\Omega k}^{(\sigma)}$ و $\beta_{\Omega k}^{(\sigma)}$ ، ضرایب بگولیوبوف هستند که به صورت ضرب داخلی مدهای ریندلری و مینکوفسکی تعریف می‌شوند

$$\alpha_{\Omega k}^{(\sigma)} = (U_{\Omega}^{(\sigma)}, U_k^M)_R, \\ \beta_{\Omega k}^{(\sigma)} = (U_{\Omega}^{(\sigma)}, U_k^{M*})_R, \quad (\sigma) \in \{I, II\}. \quad (16)$$

پایین‌وند R تصریح می‌کند که ضرب داخلی روی فضای ریندلری انجام شده است. رابطه (۱۵) به تبدیلات بگولیوبوف معروف است که در آن عملگرهای فنا می‌نکوفسکی یک ترکیب

میدان را برحسب آن‌ها به عنوان سومین پایه معرفی شده، بسط می‌دهیم. اکنون عملگرهای آنرو را به صورت زیر معرفی می‌کنیم [۱۱، ۲۱، ۲۶ و ۲۷]

$$C_{\Omega}^R = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi\omega}} (\omega l)^{\frac{k}{\omega} i\Omega} a_k^M, \quad (19)$$

$$C_{\Omega}^L = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi\omega}} (\omega l)^{-\frac{k}{\omega} i\Omega} a_k^M.$$

C_{Ω}^L و C_{Ω}^R عملگرهای راست و چپ فنای ذره آنرو با فرکانس Ω هستند. بالاندهای R و L معرف راست و چپ بودن آن‌ها است. با توجه به بحث مطرح شده در پایان قسمت ۲-۳ و رابطه (۱۸)، در حقیقت عملگرهای آنرو چیزی جز عملگرهای ریندلری درحد شتاب صفر نیستند، یعنی $C_{\Omega}^L = c_{\Omega}^L(a \rightarrow 0)$ و $C_{\Omega}^R = c_{\Omega}^R(a \rightarrow 0)$. ویژگی مهم عملگرهای آنرو آن است که فرکانس آن‌ها با فرکانس عملگرهای ریندلری یکسان است. هر عملگر فنای آنرو یک ترکیب خطی از عملگرهای فنای مینکوفسکی است، بنابراین اگر خلا آنرو، $|\circ\rangle_U$ ، را به صورت نبود هیچ مد برانگیخته‌ای از ذره آنرو تعریف کنیم، یعنی $\forall \Omega > 0$ ، $C_{\Omega}^R |\circ\rangle_U = C_{\Omega}^L |\circ\rangle_U = 0$ ، آنگاه واضح است که خلا مینکوفسکی همان خلا آنرو است، یعنی $|\circ\rangle_M = |\circ\rangle_U = \prod_{\Omega} |\circ\rangle_U$.

با جایگذاری عملگرهای آنرو در رابطه (۱۸)، عملگرهای ریندلری برحسب عملگرهای آنرو به دست می‌آیند

$$c_{\Omega}^I = \cosh r C_{\Omega}^R + \sinh r C_{\Omega}^{L\dagger}, \quad (20)$$

$$c_{\Omega}^{II} = \cosh r C_{\Omega}^L + \sinh r C_{\Omega}^{R\dagger},$$

و به طور معکوس، بسط عملگرهای آنرو برحسب عملگرهای ریندلری

$$C_{\Omega}^R = \cosh r c_{\Omega}^I - \sinh r c_{\Omega}^{II\dagger}, \quad (21)$$

$$C_{\Omega}^L = \cosh r c_{\Omega}^{II} - \sinh r c_{\Omega}^{I\dagger}.$$

به کمک رابطه فوق و جبر حاکم بر عملگرهای ریندلری، رابطه‌های جابه‌جاگری عملگرهای آنرو به صورت $[C_{\Omega}^L, C_{\Omega'}^{L\dagger}] = \delta(\Omega - \Omega')$ و $[C_{\Omega}^R, C_{\Omega'}^{R\dagger}] = \delta(\Omega - \Omega')$ به دست می‌آیند که بقیه جابه‌جاگرها برابر صفر هستند. همان طور که از رابطه (۲۱) دیده می‌شود هر دو عملگر فنای راست و

بگولیوبوف به کار بریم، به دست خواهیم آورد $\beta_{\Omega k}^{(\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}} \sqrt{\frac{e^{-\pi\Omega}}{e^{\pi\Omega} + e^{-\pi\Omega}}} (\omega l)^{\frac{k}{\omega} i\Omega}$ پیداست که تفاضل مربعات عبارت‌های رادیکالی در ضرایب بگولیوبوف برابر واحد است، از این رو می‌توان آن‌ها را برابر توابع کسینوس هذلولوی و سینوس هذلولوی قرار داد، بنابراین [۱۱]

$$\alpha_{\Omega k}^{(\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}} \cosh r (\omega l)^{\frac{k}{\omega} i\Omega}, \quad (17)$$

$$\beta_{\Omega k}^{(\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}} \sinh r (\omega l)^{\frac{k}{\omega} i\Omega},$$

که $\tanh r = e^{-\pi\Omega} = e^{-\frac{\pi\omega_R}{a}}$ در شتاب صفر، پارامتر r برابر صفر است و در شتاب بینهایت این پارامتر برابر بینهایت است، از این رو می‌توان گفت که پارامتر r معرف شتاب ناظر ناخست است. نکته جالب آن است که برخلاف فضا-زمان چهاربعدی، ضرایب بگولیوبوف در اینجا برحسب تکانه‌های مثبت و منفی تفکیک شدند [۲۷]. اکنون با جایگذاری ضرایب به دست آمده فوق در رابطه (۱۵) خواهیم داشت

$$c_{\Omega}^{(\sigma)} = \cosh r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi\omega}} (\omega l)^{\frac{k}{\omega} i\Omega} a_k^M + \sinh r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi\omega}} (\omega l)^{\frac{k}{\omega} i\Omega} a_k^{M\dagger}. \quad (18)$$

همان طور که مشاهده می‌شود در شتاب صفر ضریب بتای بگولیوبوف صفر می‌شود، از این رو رابطه فوق بیان می‌کند که در شتاب صفر عملگر فنای ذره ریندلری، با یک ترکیب خطی از عملگرهای فنای ذره مینکوفسکی برابر است. این بدان معناست که در این حالت خلا ریندلری و مینکوفسکی برهم منطبق‌اند، چیزی که انتظار آن را داشتیم. همچنین بسط بالا این مطلب را بیان می‌کند که آشکارساز راب قبل از آنکه شتاب بگیرد، یک توزیعی از مدهای مینکوفسکی را آشکار می‌کند و نه یک تک مد مینکوفسکی را. این مطلب مقدمه ایست برای معرفی عملگرهای آنرو و کنار گذاشتن تقریب تک مد.

۴.۲. عملگرهای آنرو

در ادامه به معرفی عملگرهای آنرو و مدهای آنرو می‌پردازیم و

علی از یکدیگر جدا هستند، مقدمه‌ای است برای محاسبه درهم‌تنیدگی که در بخش بعد آن را بیان خواهیم کرد.

با استفاده از تغییر متغیر $w = \frac{k}{\omega} \ln \omega l$ و با توجه به آنکه $dw = \frac{dk}{\omega} (l \text{ مستقل از } \omega \text{ است})$ به سادگی می‌توان نشان داد که تبدیل فوریه معادله اول رابطه (۱۹) به شکل

فرکانس Ω کمی مثبت است، بنابراین با توجه به اینکه $C_{\Omega}^R = C_{-\Omega}^L$ ، بسط عملگر مینکوفسکی نسبت به فرکانس‌های مثبت آنرو به صورت زیر به دست می‌آید

$$a_k^M = \int_0^{\infty} \frac{d\Omega}{\sqrt{2\pi\omega}} \left((\omega l)^{\frac{k-i\Omega}{\omega}} C_{\Omega}^R + (\omega l)^{\frac{k+i\Omega}{\omega}} C_{-\Omega}^L \right). \quad (25)$$

اکنون فرض می‌کنیم که آشکارساز راب، قبل از شتاب گرفتن، یک توزیعی از ذرات مینکوفسکی با تابع توزیع $f^M(k)$ را آشکار می‌کند، آنگاه می‌توان عملگر خلق مینکوفسکی $a_k^{M\dagger}$ را برحسب عملگرهای خلق آنرو $C_{\Omega}^{R\dagger}$ و $C_{\Omega}^{L\dagger}$ با توابع وزنی $h^L(\Omega)$ و $h^R(\Omega)$ نوشت

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk f^M(k) a_k^{M\dagger} = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega' \left[h^R(\Omega') C_{\Omega'}^{R\dagger} + h^L(\Omega') C_{\Omega'}^{L\dagger} \right],$$

$$h^R(\Omega') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi\omega}} (\omega l)^{\frac{k-i\Omega'}{\omega}} f^M(k)$$

$$\text{و } h^L(\Omega') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi\omega}} (\omega l)^{\frac{k+i\Omega'}{\omega}} f^M(k) \quad (26)$$

می‌خواهیم برای تابع وزن $f^M(k)$ محدودیتی قائل شویم؛ فرض می‌کنیم که آشکارساز راب تنها به تک مد آنرو حساس باشد، یعنی تنها ذرات آنرو با فرکانس Ω را آشکارسازی کند، بنابراین با توجه به رابطه (۱۹) کلی‌ترین شکل تابع وزن $f^M(k)$ به شکل زیر خواهد بود

$$f^M(k) = \int_0^{\infty} d\Omega (q^R \frac{(\omega l)^{\frac{-k-i\Omega}{\omega}}}{\sqrt{2\pi\omega}} + q^L \frac{(\omega l)^{\frac{k+i\Omega}{\omega}}}{\sqrt{2\pi\omega}}), \quad (27)$$

که در آن q^R و q^L اعداد مختلط هستند. آشکار است که توابع وزنی $h^L(\Omega')$ و $h^R(\Omega')$ تابع توزیع دلتای دیراک خواهند بود،

چپ آنرو، یک ترکیب خطی از عملگرهای خلق و فنای مربوط به نواحی اول و دوم ریندلری هستند از این رو می‌توان خلا آنرو در بسامد Ω را برحسب حالت‌های برانگیخته ریندلری به شکل زیر نوشت [۱۱]

$$|{}^{\circ}\Omega\rangle_U = \sum_{n=0}^{\infty} f_n |n_{\Omega}\rangle^I \otimes |n_{\Omega}\rangle^{II}, \quad (22)$$

که در آن f_n ضرایب بسط و $|n_{\Omega}\rangle^I$ و $|n_{\Omega}\rangle^{II}$ به ترتیب بیانگر حالت‌هایی با n بار برانگیختگی مربوط به نواحی اول و دوم ریندلری می‌باشند. روابط جابه‌جاگری عملگرهای آنرو و ریندلری، خوش رفتار نیستند لذا حالت‌های متناظر آن‌ها نیز بهنجارش پذیر نیستند؛ اما می‌توان این حالت‌ها را با بسته موج‌های بهنجارش پذیری که حول بسامد Ω دارای قله شدیدی هستند تقریب بزیم و روابط جابه‌جاگری عملگرهای آنرو و ریندلری را باز بهنجارش کنیم، یعنی

$$[c_{\Omega}^I, c_{\Omega}^{I\dagger}] = [c_{\Omega}^{II}, c_{\Omega}^{II\dagger}] = 1, \quad [C_{\Omega}^R, C_{\Omega}^{R\dagger}] = [C_{\Omega}^L, C_{\Omega}^{L\dagger}] = 1$$

و بقیه جابه‌جاگرها برابر صفرند [۱۱]. بنابراین با اعمال عملگرهای آنرو از رابطه (۲۱) روی خلا آنرو و استفاده از

$$f_n = \frac{\tanh^n r}{\cosh r}$$

می‌توان نشان داد اگر مدهای جدیدی به نام مدهای آنرو تعریف کنیم به گونه‌ای که ضرایب بسط عملگر میدان برحسب این مدها، عملگرهای آنرو باشند، آنگاه می‌توان نوشت

$$\hat{\phi} = \int_0^{\infty} d\Omega \left[U_{\Omega}^R C_{\Omega}^R + U_{\Omega}^{R*} C_{\Omega}^{R\dagger} + U_{\Omega}^L C_{\Omega}^L + U_{\Omega}^{L*} C_{\Omega}^{L\dagger} \right], \quad (23)$$

که در آن U_{Ω}^L و U_{Ω}^R مدهای راست و چپ مربوط به ذره آنرو هستند. در حقیقت این دو مد به همراه مزدوج مختلطشان تشکیل یک پایه کامل می‌دهند؛ این پایه‌ها سومین پایه معرفی شده‌اند. اگر از رابطه (۲۰) عملگرهای ریندلری را در رابطه (۱۱)، یعنی بسط عملگر میدان برحسب مدهای ریندلری قرار دهیم و آن را با رابطه (۲۳) مقایسه کنیم، ارتباط بین مدهای ریندلری و آنرو به دست می‌آید

$$U_{\Omega}^R = \cosh r U_{\Omega}^I + \sinh r U_{\Omega}^{II*}, \quad (24)$$

$$U_{\Omega}^L = \cosh r U_{\Omega}^{II} + \sinh r U_{\Omega}^{I*}.$$

این مطلب که هر مد آنرو یک ترکیب خطی از مدهای ریندلری ناحیه اول و دوم است و اینکه عنوان شد این دو ناحیه از لحاظ

ناحیه دوم تشکیل می‌شود؛ بنابراین درهم‌تنیدگی در شتاب صفر در ناحیه اول مقدار بیشینه خود را نخواهد داشت. بیشینه درهم‌تنیدگی زمانی تشکیل می‌شود که مدی انتخاب کنیم که برای آن $|q_R|=1$ باشد. این مطلب به وضوح در درهم‌تنیدگی سامانه‌های دوبخشی دیده می‌شود [۱۱]؛ بنابراین انتظار داریم که در سامانه‌های سه‌بخشی نیز این مطلب را مشاهده کنیم.

۳. درهم‌تنیدگی حالت‌های GHZ و W

دو سنجۀ درهم‌تنیدگی برای محاسبۀ درهم‌تنیدگی سامانه‌های سه‌بخشی وجود دارد [۱۳]: تنیدگی سه‌گانه^۱ [۳۱] و تنیدگی پی^۲ [۳۲]. چون محاسبۀ تنیدگی سه‌گانه جز در چند مورد محدود بسیار مشکل است [۳۳]، ما در این کار از تنیدگی پی استفاده می‌کنیم. عملگر چگالی ρ^{ABC} مربوط به یک سامانه سه‌بخشی را که از الحاق سه زیرسامانه^۳ A ، B و C به وجود آمده‌است در نظر می‌گیریم، تنیدگی پی برای چنین سامانه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\pi = \frac{\pi_A + \pi_B + \pi_C}{3}, \quad (30)$$

که در آن

$$\pi_A = N_{A(BC)}^Y - N_{AB}^Y - N_{AC}^Y,$$

$$\pi_B = N_{B(AC)}^Y - N_{BA}^Y - N_{BC}^Y,$$

$$\pi_C = N_{C(AB)}^Y - N_{CA}^Y - N_{CB}^Y.$$

در روابط فوق نگاتیویته^۴ $N_{\alpha(\beta\gamma)}$ و $N_{\alpha\beta}$ که به ترتیب تنیدگی یگانه^۲ و تنیدگی دوگانه^۴ نام دارند به صورت $N_{\alpha(\beta\gamma)}^- = \|\rho^{\alpha\beta\gamma}\|^{-1}$ و $N_{\alpha\beta}^- = \|\rho^{\alpha\beta}\|^{-1}$ تعریف می‌شوند. منظور از $\rho^{\alpha\beta}$ ، $Tr_\gamma(\rho^{\alpha\beta\gamma})$ می‌باشد و α بیانگر آن است که از عملگر چگالی کل نسبت به زیرسیستم α ترانهاده^۵ جزئی گرفته‌ایم؛ همچنین $\|O\| = Tr\sqrt{OO^\dagger}$ نرم رد عملگر O است.

یعنی $h^L(\Omega') = q^L \delta(\Omega' - \Omega)$ و $h^R(\Omega') = q^R \delta(\Omega' - \Omega)$ بنابراین رابطه (۲۶) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk f^M(k) a_k^\dagger = q^R C_\Omega^{R\dagger} + q^L C_\Omega^{L\dagger} = C_\Omega^{U\dagger}. \quad (28)$$

عملگر $C_\Omega^{U\dagger}$ را که ترکیب خطی از عملگرهای راست و چپ آنرو است، عملگر خلق ذره آنرو می‌نامند و بالاوند U اشاره به آنرو بودن آن دارد. برای عملگر آنرو نیز داریم $[C_\Omega^U, C_\Omega^{U\dagger}] = 1$ ، بنابراین با توجه به روابط جابه‌جاگری بازبهنجارش شده عملگرهای آنرو و ریندلری، خواهیم داشت $|q^R|^2 + |q^L|^2 = 1$. با اعمال عملگر خلق آنرو روی حالت خلا آن، حالت تک ذره آنرو به دست می‌آید

$$|1_\Omega\rangle_U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh^n r \sqrt{n+1}}{\cosh^2 r} \left(q^L |n_\Omega\rangle^I |(n+1)_\Omega\rangle^{II} + q^R |(n+1)_\Omega\rangle^I |n_\Omega\rangle^{II} \right). \quad (29)$$

حالت تک ذره فوق با حالت تک ذره به دست آمده از طریق تقریب تک‌مد متفاوت است، اما اگر در رابطه بالا حالت خاصی را در نظر بگیریم که برای آن $|q_R|=1$ است، حالت تک ذره در تقریب تک‌مد به دست می‌آید. با این انتخاب تقارن بین نواحی راست و چپ آنرو از بین می‌رود، موضوعی که در تقریب تک مد نیز وجود دارد. این همانندی ممکن است این گمان را ایجاد نماید که تقریب تک‌مد را می‌توان با قرار دادن $|q_R|=1$ از ورای تقریب تک مد به دست آورد، اما باید توجه داشت که در تقریب تک‌مد عملگر خلق آنرو همان عملگر خلق مینکوفسکی است ولی در ورای تقریب تک مد با در نظر گرفتن این حالت خاص، همچنان عملگر آنرو ترکیب خطی از عملگرهای مینکوفسکی است. به بیان دیگر در حالت خاص فوق، $|q_R|=1$ ، همچنان آشکارساز راب به یک برهم‌نهی از مدهای مینکوفسکی حساس است، در حالی که در تقریب تک مد آشکارساز راب به یک تک مد مینکوفسکی حساس است.

نوع انتخاب مد آنرو تعیین کننده چگونگی توزیع درهم‌تنیدگی بین مدهای لخت و مدهای نواحی اول و دوم ریندلری در شتاب صفر است، به عبارت دیگر با انتخاب مدهایی که برای آن‌ها $|q_L| \neq 0$ است، مقداری از اطلاعات در

۱. The three-tangle

۲. The π -tangle

۳. The one-tangle

۴. The two-tangle

۵. Partial transposition

۱.۳. حالت GHZ

در این بخش سه ناظر لخت آلیس، باب و چارلی را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که آشکارسازهای آلیس و باب به تک مدهای مینکوفسکی ω و ω' و آشکارساز چارلی به تک مد آنرو Ω حساس باشند. اگر این سه ناظر حالت GHZ را به اشتراک بگذارند، خواهیم داشت

$$|GHZ\rangle_{ABC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\omega\rangle_M |\omega'\rangle_M |\Omega\rangle_U + |\omega\rangle_M |\omega'\rangle_M |\Omega\rangle_U \right). \quad (31)$$

اکنون فرض می‌کنیم که چارلی نسبت به آلیس و باب شتاب بگیرد، با جایگذاری حالت‌های خلا و ذره آنرو از طریق روابط (۲۲) و (۲۹)، حالت GHZ فوق به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$|GHZ\rangle_{ABC, \bar{C}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\begin{array}{l} |00n\rangle + Q_n^L |1n(n+1)\rangle \\ + Q_n^R |1(n+1)n\rangle \end{array} \right), \quad (32)$$

که در آن $Q_n^R = \frac{\sqrt{n+1}}{\cosh r} q^R$ ، $Q_n^L = \frac{\sqrt{n+1}}{\cosh r} q^L$ نمایش فشرده $|abcd\rangle$ ، $|a\omega\rangle_M |b\omega'\rangle_M |c\Omega\rangle_I |d\Omega\rangle_{II}$ است و نیز \bar{C} بیانگر آنتی چارلی می‌باشد. دانستیم که چارلی تنها به ناحیه اول ریندلری و آنتی چارلی تنها به ناحیه دوم ریندلری دسترسی دارد، از این رو برای به دست آوردن عملگر چگالی متناظر با سه‌بخشی آلیس-باب-چارلی، باید از عملگر چگالی متناظر با حالت رابطه (۳۲) نسبت به مدهای ناحیه دوم رد بگیریم، لذا داریم

$$\begin{aligned} \rho_{ABC}^{GHZ} &= \sum_{m=0}^{\infty} \Pi \left\langle m \left| \left| GHZ \right\rangle \left\langle GHZ \right| \right| m \right\rangle_{\Pi} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n^2}{2} \left[\rho^1 + \rho^2 + \rho^{\dagger\dagger} + \rho^3 + \rho^{\dagger\dagger\dagger} (nondiag) \right], \end{aligned} \quad (33)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \rho^1 &= |00n\rangle \langle 00n|, \\ \rho^2 &= Q_n^R |1(n+1)\rangle \langle 00n| + Q_n^L \tanh r |1n\rangle \langle 00(n+1)|, \\ \rho^3 &= \left| Q_n^R \right|^2 |1(n+1)\rangle \langle 1(n+1)| + \\ &+ \left| Q_n^L \right|^2 |1n\rangle \langle 1n| + Q_{n+1}^R Q_n^{L*} \tanh r |1(n+2)\rangle \langle 1n|. \end{aligned}$$

عبارت $\rho^{\dagger\dagger\dagger} (nondiag)$ بیانگر دگر جمله غیر قطری عملگر ρ^3 می‌باشد. چون رابطه (۳۲) نسبت به تعویض همزمان حالت‌های نواحی اول و دوم و ضرایب Q_n^L و Q_n^R ناورداست، لذا می‌توان عملگر متناظر با آلیس-باب-آنتی چارلی را با تعویض Q_n^R با Q_n^L از رابطه (۳۳) به دست آورد.

اکنون می‌خواهیم تنیدگی‌های یگانه را حساب کنیم. برای محاسبه $N_{\bar{A}(BC)}$ باید از عملگر رابطه (۳۳) نسبت به کیوبیت‌های آلیس ترانهاده جزئی بگیریم. برای این کار کافی است کیوبیت‌های آلیس را در هر جمله از رابطه (۳۳) با هم عوض کنیم، بنابراین به دست می‌آوریم

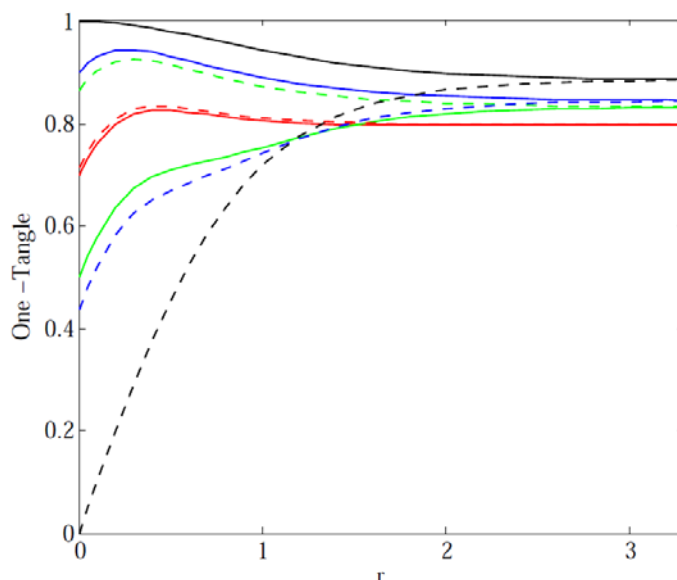
$$\rho_{A(BC)}^{GHZ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n^2}{2} \left[\rho^1 + \rho_A^2 + \rho_A^{\dagger\dagger} + \rho^3 + \rho^{\dagger\dagger\dagger} (nondiag) \right], \quad (34)$$

که در آن

$\rho_A^2 = Q_n^R |01(n+1)\rangle \langle 10n| + Q_n^L \tanh r |01n\rangle \langle 10(n+1)|$ اگر عملگر ρ^1 را در پایه‌های $|000\rangle, |001\rangle, |002\rangle, \dots$ عملگر ρ_A^2 و دگر آن را در پایه‌های $|010\rangle, |011\rangle, |012\rangle, |013\rangle, \dots$ و ρ^3 و دگر جمله غیر قطری آن را در پایه‌های $|110\rangle, |111\rangle, |112\rangle, \dots$ نمایش دهیم، نمایش ماتریسی عملگر رابطه (۳۴) شامل سه بلوک خواهد شد. بلوک متناظر با عملگر ρ^1 قطری و دارای درایه‌های مثبت است، لذا سهمی در نگاتیویته ندارد. چون بلوک متناظر با ρ^3 و $\rho^{\dagger\dagger\dagger}$ تحت ترانهاده جزئی تغییری نکرد بنابراین این بلوک نیز سهمی در نگاتیویته ندارد (چون همچنان مثبت است). بلوک متناظر با ρ_A^2 و دگر آن یک ماتریس هرمیتی چهار قطری تشکیل می‌دهند که نگاتیویته تنها از این بلوک ناشی می‌شود. محاسبات نشان می‌دهند که ویژه مقادیر این ماتریس تنها به اندازه q^L و q^R بستگی دارند و از فاز نسبی بین آن‌ها مستقل‌اند. جز در موردی که $|q^L|$ یا $|q^R|$ برابر یک باشند، نمی‌توان تنیدگی یگانه $N_{\bar{A}(BC)}$ را به صورت تابعی صریح بر حسب r به دست آورد. می‌دانیم که

$$N_{\bar{A}(BC)} = \lim_{D \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^D (|\lambda_i| - \lambda_i)$$

که λ_i ها ویژه مقادیر عملگر $\rho_{A(BC)}^{GHZ}$ می‌باشند. به کمک روش‌های محاسبات عددی



شکل ۲. تنیدگی‌یگانه به صورت تابعی از r برای حالت GHZ موقعی که ترانهاده جزئی نسبت به آلیس یا باب باشد. منحنی‌های پیوسته (گسسته) از بالا به پایین (از پایین به بالا) متناظر با $|q^R|$ های ۱، ۰/۹، ۰/۷ و ۰/۵ برای سه‌بخشی آلیس-باب-چارلی (آلیس-باب-آنتی چارلی) هستند و در حد شتاب بینهایت به ترتیب به مقادیر $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sim 0.886$ ، 0.846 ، 0.798 و 0.832 نزدیک می‌شوند.

نشان می‌دهد. در $r=0$ ، f_n^2 به ازای همه مقادیر n برابر صفر است، جز در $n=0$ که برابر یک است؛ از این رو به سادگی می‌توان دید که $N_{\tilde{A}(BC)}$ و $N_{\tilde{B}(AC)}$ در شتاب صفر برابر $|q^R|$ است؛ همچنین $N_{\tilde{A}(BC)}$ و $N_{\tilde{B}(AC)}$ در شتاب صفر برابر $|q^L|$ خواهند بود. در حالت خاصی که $|q^R|=1$ است، در حد شتاب بینهایت تنیدگی‌یگانه به مقدار دقیق $0.886 \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ میل می‌کند [۱۳]. در حقیقت این منحنی، همان منحنی است که از تقریب تک مد به دست می‌آید. در این حد مقادیر تنیدگی‌یگانه برای $|q^R|$ های ۰/۹، ۰/۷ و ۰/۵ به ترتیب برابر 0.846 ، 0.798 و 0.832 است. برای یک $|q^R|$ مشخص، مقدار حادی تنیدگی‌یگانه برای چارلی و آنتی چارلی یکسان است؛ به بیان دیگر در شتاب بینهایت تفاوت بین چارلی و آنتی چارلی از بین می‌رود. همان طور که از شکل مشاهده می‌شود، منحنی‌های نگانیتویته در شتاب محدود برای مقادیر مختلف $|q^R|$ رفتارهای متفاوتی از خود نشان می‌دهند. برای بعضی از آن‌ها تنیدگی‌یگانه به طور پیوسته با افزایش شتاب افزایش می‌یابد و در نهایت به یک مقدار ثابت میل می‌کند. برای بعضی دیگر تنیدگی‌یگانه در

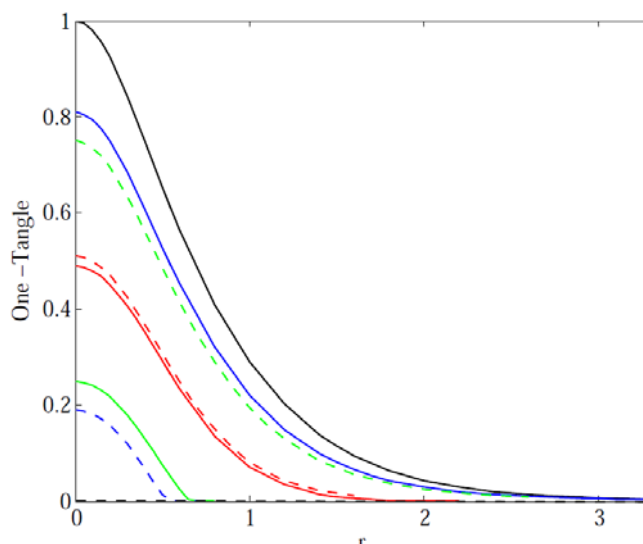
مبتنی بر کد نویسی رایانه‌ای مشاهده می‌شود که با اتخاذ مقادیر محدود D و افزایش آن، نگانیتویته به مقدار مشخصی میل می‌کند. بنابراین می‌توان تنیدگی‌یگانه $N_{\tilde{A}(BC)}$ را با تقریب خیلی خوب به دست آورد. برای انجام محاسبات، $D=2000$ انتخاب شده است.

برای به دست آوردن $N_{\tilde{B}(AC)}$ باید از عملگر رابطه (۳۳) نسبت به کیوبیت‌های باب ترانهاده جزئی بگیریم، بنابراین داریم

$$\rho_{\tilde{B}(AC)}^{GHZ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n^2}{2} \left[\rho^1 + \rho_B^2 + \rho_B^{2\dagger} + \rho^3 + \rho^{3\dagger} (\text{nondiag}) \right], \quad (35)$$

که $\rho_B^2 = Q_n^R |10(n+1)\rangle\langle 01n| + Q_n^L \tanh r |10n\rangle\langle 01(n+1)|$ اگر از پایه $|100\rangle|101\rangle|102\rangle \dots$ و دگر آن استفاده کنیم، آنگاه نمایش ماتریسی عملگرهای $\rho_{\tilde{B}(AC)}^{GHZ}$ و $\rho_{\tilde{A}(BC)}^{GHZ}$ یکسان خواهند شد؛ به عبارت دیگر $N_{\tilde{A}(BC)} = N_{\tilde{B}(AC)}$. البته به دلیل وجود تقارن در حالت GHZ نسبت به کیوبیت‌های آلیس و باب، این نتیجه قابل پیش‌بینی بود.

شکل ۲ تنیدگی‌یگانه را برحسب r برای $\tilde{B}(AC)$ و $\tilde{A}(BC)$



شکل ۳. تنیدگی یگانه به صورت تابعی از r برای حالت GHZ موقعی که ترانهاده جزئی نسبت به چارلی باشد. منحنی‌های پیوسته (گسسته) از بالا به پایین (از پایین به بالا) متناظر با $|q^R\rangle$ های ۱، ۰/۹، ۰/۷ و ۰/۵ برای سه بخشی آلیس-باب-چارلی (آلیس-باب-آنتی چارلی) هستند و در حد شتاب بینهایت به سمت صفر میل می‌کنند.

عملگر چگالی یک سامانه دو بخشی است [۱۱]، از این رو انتظار داریم رفتار تنیدگی یگانه $N_{\bar{C}(AB)}$ بر حسب شتاب مانند رفتار نگاتیویته یک سامانه دوپاره‌ای باشد؛ شکل ۳ این حقیقت را نشان می‌دهد.

اکنون می‌خواهیم به محاسبه تنیدگی‌های دوگانه بپردازیم. اگر از عملگر چگالی رابطه (۳۳) نسبت به آلیس یا باب رد بگیریم، عملگرهای چگالی متناظر با زیرسامانه‌های آلیس-چارلی و باب-چارلی با هم برابر خواهند بود و به شکل زیر به دست می‌آیند

$$\rho_{AC}^{GHZ} = \rho_{BC}^{GHZ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n^\gamma}{\gamma} [|0n\rangle\langle 0n| + |Q_n^R|^\gamma |1(n+1)\rangle\langle 1(n+1)| + |Q_n^L|^\gamma |1n\rangle\langle 1n| + Q_{n+1}^R Q_n^{L*} \tanh r |1(n+2)\rangle\langle 1n| + \text{H.C.}_{(\text{nondiag})}] \quad (37)$$

همچنین اگر از عملگر رابطه (۳۳) نسبت به چارلی رد بگیریم، عملگر چگالی متناظر با زیرسامانه آلیس-باب به صورت زیر به دست می‌آید

$$\rho_{AB}^{GHZ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n^\gamma}{\gamma} \left[|00\rangle\langle 00| + \frac{n+1}{\cosh^\gamma r} |11\rangle\langle 11| \right] \quad (38)$$

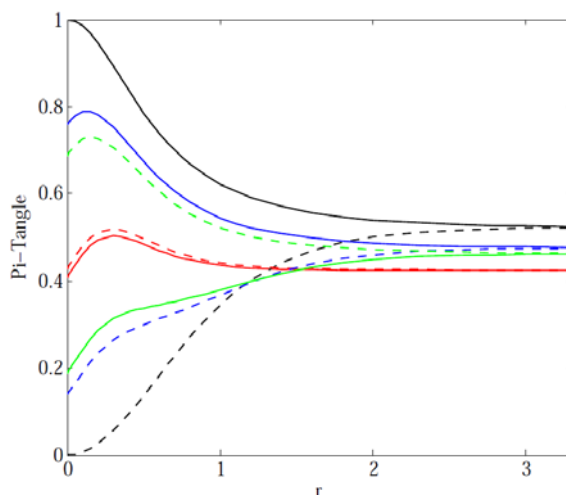
در عملگرهای چگالی فوق اگر نسبت به هر کدام از ناظرها

یک شتاب مشخص دارای بیشینه است؛ برای مثال منحنی متناظر با $|q^R\rangle$ برابر ۰/۹، دارای بیشینه ۰/۹۴۵ در $r = ۰/۳۰۰$ می‌باشد. صفر نشدن تنیدگی یگانه در حد شتاب بینهایت مطلبی است که در تقریب تک‌مد نیز مشاهده می‌شود، اما افزایش نگاتیویته با افزایش شتاب و وجود مقدار بیشینه در شتاب محدود برای بعضی انتخاب‌های $|q^R\rangle$ مطالب جدیدی هستند که تاکنون مشاهده نشده‌اند.

برای محاسبه تنیدگی یگانه $N_{\bar{C}(AB)}$ ، باید از عملگر چگالی ارائه شده در رابطه (۳۳) نسبت به کیوبیت‌های چارلی ترانهاده جزئی بگیریم. اگر از تبدیلات $|0\rangle_{AB} \rightarrow |0\rangle$ و $|1\rangle_{AB} \rightarrow |1\rangle$ استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$\rho_{\bar{C}(AB)}^{GHZ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n^\gamma}{\gamma} [|0n\rangle\langle 0n| + Q_n^R |1n\rangle\langle 0(n+1)| + Q_n^L \tanh r |1(n+1)\rangle\langle 0n| + |Q_n^R|^\gamma |1(n+1)\rangle\langle 1(n+1)| + |Q_n^L|^\gamma |1n\rangle\langle 1n| + Q_{n+1}^R Q_n^{L*} \tanh r |1n\rangle\langle 1(n+2)| + \text{H.C.}_{(\text{nondiag})}] \quad (39)$$

که $\text{H.C.}_{(\text{nondiag})}$ بیانگر همیوگ هرمیتی جملات غیر قطری است. همان طور که مشاهده می‌شود عملگر چگالی فوق مشابه



شکل ۴. تیدگی پی را به صورت تابعی از r برای حالت GHZ نشان می‌دهد. منحنی‌های پیوسته (گسسته) از بالا به پایین (از پایین به بالا) متناظر با $|q^R|$ های ۱، ۰/۹، ۰/۷ و ۰/۵ برای سه‌بخشی آلیس-باب-چارلی (آلیس-باب-آنتی‌چارلی) هستند. این شکل نشان می‌دهد که درهم‌تیدگی در حد شتاب بینهایت صفر نمی‌شود بلکه برای $|q^R|$ های ۱، ۰/۹، ۰/۷ و ۰/۵ به ترتیب به سمت $\frac{\pi}{6} \sim 0.524$ ، 0.477 ، 0.425 و 0.461 میل می‌کند.

درهم‌تیدگی در حد $r \rightarrow \infty$ برابر 0.424 است که مربوط به حالت خاصی است که برای آن $|q^R| = |q^L| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ است. از این مطلب، یعنی صفر نشدن درهم‌تیدگی در شتاب بینهایت، می‌توان این برداشت عجیب را نمود که برای یک سامانه سه‌پاره‌ای فرآیند اطلاع‌رسانی کوانتومی در حضور افق رویداد یک سیاهچاله نیز برقرار است [۱۳].

بیشینه شدن درهم‌تیدگی در شتاب محدود برای بعضی مدهای آنرو نتیجه‌ای جالب است که در کارهای قبلی انجام گرفته در حوزه اطلاع‌رسانی کوانتومی نسبیته مشاهده نشده است. اگر می‌توانستیم مسئله را به صورت تحلیلی حل کنیم، شاید قادر به درک این اتفاق می‌بودیم.

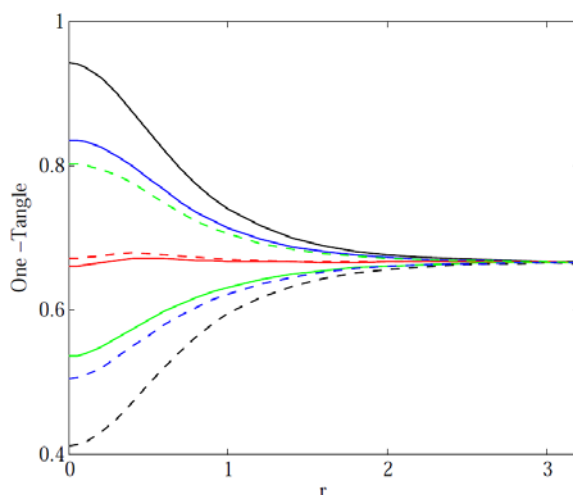
۲.۳. حالت W

این قسمت را با فرضیات قسمت قبل آغاز می‌کنیم با این تفاوت که اکنون فرض می‌کنیم که ناظرها در ابتدا حالت W را به اشتراک می‌گذارند

$$|W\rangle_{ABC} = \frac{1}{\sqrt{3}} (|1\rangle_M |\omega'\rangle_M |\Omega\rangle_U + |0\rangle_M |\omega\rangle_M |\Omega\rangle_U + |\omega\rangle_M |\omega'\rangle_M |\Omega\rangle_U) \quad (39)$$

ترانهاده جزئی بگیریم، تغییری رخ نخواهد داد یعنی $\rho_{AB}^{GHZ} = \rho_{AB}^{GHZ}$ و $\rho_{BC}^{GHZ} = \rho_{BC}^{GHZ}$ ، $\rho_{AC}^{GHZ} = \rho_{AC}^{GHZ}$ بدان معناست که زیرسامانه‌های دوبخشی حالت GHZ در ورای تقریب تک مد، همچنان تفکیک پذیر باقی می‌مانند، یعنی $N_{AC} = N_{BC} = N_{AB} = 0$. اکنون در موقعیتی هستیم که بتوانیم درهم‌تیدگی مربوط به حالت GHZ را در ورای تقریب تک مد بررسی کنیم. شکل ۴ رفتار تیدگی پی را نسبت به شتاب چارلی و آنتی‌چارلی برای $|q^R|$ های ۱، ۰/۹، ۰/۷ و ۰/۵ نشان می‌دهد.

مشاهده می‌شود درهم‌تیدگی سامانه‌های سه‌بخشی، برخلاف دوبخشی، در حد $r \rightarrow \infty$ از بین نمی‌رود، بلکه برای $|q^R|$ های ۱، ۰/۹، ۰/۷ و ۰/۵ به ترتیب به سمت $\frac{\pi}{6} \sim 0.524$ ، 0.477 ، 0.425 و 0.461 میل می‌کند. همان طور که در پایان بخش دوم متذکر شدیم، انتخاب‌های متفاوت $|q^R|$ در شتاب صفر، منجر به تفاوت میزان درهم‌تیدگی بین مدها می‌شود؛ در مورد GHZ، این تفاوت تا حد شتاب بینهایت نیز وجود دارد، به عبارت دیگر مقدار درهم‌تیدگی در این حد، به نوع این انتخاب‌ها وابسته است. کمترین مقدار



شکل ۵. تنیدگی یگانه به صورت تابعی از r برای حالت W هنگامی که ترانهاده جزئی نسبت به آلیس یا باب باشد. منحنی های پیوسته (گسسته) از بالا به پایین (از پایین به بالا) متناظر با $|q^R|$ های ۱، ۰/۹، ۰/۷ و ۰/۵ برای سه بخشی آلیس - باب - چارلی (آلیس - باب - آنتی چارلی) هستند و در حد شتاب بینهایت به ۰/۶۵۹ نزدیک می شوند.

$$\begin{aligned}
 &+ Q_n^L \tanh r | \circ \circ n \rangle \langle \circ \circ (n+1) | \\
 &+ Q_n^L \tanh r | \circ \circ n \rangle \langle \circ \circ (n+1) | \\
 &+ Q_{n+1}^R Q_n^{L*} \tanh r | \circ \circ (n+2) \rangle \langle \circ \circ n | \\
 &+ | Q_n^R |^2 | \circ \circ (n+1) \rangle \langle \circ \circ (n+1) | \\
 &+ | Q_n^L |^2 | \circ \circ n \rangle \langle \circ \circ n | + H.C(\text{nondiag})],
 \end{aligned} \tag{۴۲}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{B(AC)}^W = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n^2}{3} [| \circ \circ n \rangle \langle \circ \circ n | + | \circ \circ n \rangle \langle \circ \circ n | + | \circ \circ n \rangle \langle \circ \circ n | \\
 &+ Q_n^R | \circ \circ (n+1) \rangle \langle \circ \circ n | + Q_n^R | \circ \circ (n+1) \rangle \langle \circ \circ n | \\
 &+ Q_n^L \tanh r | \circ \circ n \rangle \langle \circ \circ (n+1) | \\
 &+ Q_n^L \tanh r | \circ \circ n \rangle \langle \circ \circ (n+1) | \\
 &+ Q_{n+1}^R Q_n^{L*} \tanh r | \circ \circ (n+2) \rangle \langle \circ \circ n | \\
 &+ | Q_n^R |^2 | \circ \circ (n+1) \rangle \langle \circ \circ (n+1) | + | Q_n^L |^2 | \circ \circ n \rangle \langle \circ \circ n | \\
 &+ H.C(\text{nondiag})].
 \end{aligned} \tag{۴۳}$$

گر عملگرهای $\rho_{A(BC)}^W$ و $\rho_{B(AC)}^W$ را به ترتیب در پایه های $\dots | \circ \circ n \rangle \langle \circ \circ n | \dots$ و $\dots | \circ \circ n \rangle \langle \circ \circ n | \dots$ نمایش دهیم، خواهیم دید نمایش ماتریسی آنها یکسان است؛ لذا خواهیم داشت $N_{A(BC)} = N_{B(AC)}$. با جابه جایی Q_n^L و Q_n^R با یکدیگر، از رابطه های (۴۲) و (۴۳)

اگر چارلی شتاب بگیرد حالت فوق از طریق روابط (۲۲) و (۲۹) به صورت زیر تبدیل می شود

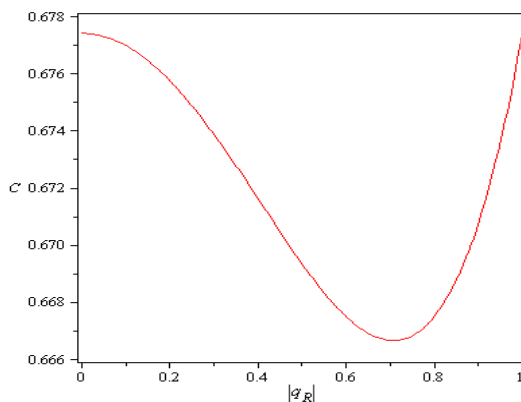
$$\begin{aligned}
 |W\rangle_{ABC, \bar{C}} = & \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} f_n (| \circ \circ nn \rangle + | \circ \circ nn \rangle) \\
 & + Q_n^L | \circ \circ n(n+1) \rangle + Q_n^R | \circ \circ (n+1)n \rangle.
 \end{aligned} \tag{۴۰}$$

مانند قبل با عمل ردگیری نسبت به مدهای آنتی چارلی، عملگر چگالی مربوط به سه بخشی آلیس - باب - چارلی به دست می آید

$$\begin{aligned}
 \rho_{ABC}^W = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n^2}{3} [| \circ \circ n \rangle \langle \circ \circ n | + | \circ \circ n \rangle \langle \circ \circ n | + | \circ \circ n \rangle \langle \circ \circ n | \\
 &+ Q_n^R | \circ \circ (n+1) \rangle \langle \circ \circ n | + Q_n^R | \circ \circ (n+1) \rangle \langle \circ \circ n | \\
 &+ Q_n^L \tanh r | \circ \circ n \rangle \langle \circ \circ (n+1) | + Q_n^L \tanh r | \circ \circ n \rangle \langle \circ \circ (n+1) | \\
 &+ Q_{n+1}^R Q_n^{L*} \tanh r | \circ \circ (n+2) \rangle \langle \circ \circ n | \\
 &+ | Q_n^R |^2 | \circ \circ (n+1) \rangle \langle \circ \circ (n+1) | + | Q_n^L |^2 | \circ \circ n \rangle \langle \circ \circ n | \\
 &+ H.C(\text{nondiag})].
 \end{aligned} \tag{۴۱}$$

ترانهاده جزئی عملگر ρ_{ABC}^W نسبت به آلیس و باب به ترتیب به صورت زیر است

$$\begin{aligned}
 \rho_{A(BC)}^W = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n^2}{3} [| \circ \circ n \rangle \langle \circ \circ n | + | \circ \circ n \rangle \langle \circ \circ n | \\
 &+ | \circ \circ n \rangle \langle \circ \circ n | + Q_n^R | \circ \circ (n+1) \rangle \langle \circ \circ n | \\
 &+ Q_n^R | \circ \circ (n+1) \rangle \langle \circ \circ n |
 \end{aligned}$$



شکل ۶. تنیدگی یگانه‌ی کل را برحسب $|q^R|$ برای شتاب صفر نشان می‌دهد. کمینه تنیدگی یگانه کل در $|q^R| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ اتفاق می‌افتد.

$$\left. -\frac{1}{3} \left\{ 1 - |q^R|^2 - \left[(1 + |q^R|^2)^2 + 4 \right]^{3/5} \right\} \right\}$$

تنیدگی یگانه کل در شتاب صفر، C

$$\left. -\frac{1}{6} \left\{ 1 - \left[(1 + |q^R|^2)^2 + 4 \right]^{3/5} - \left[(2 - |q^R|^2)^2 + 4 \right]^{3/5} \right\} \right\}$$

می‌باشد. همان‌طور که از شکل ۶ مشاهده می‌شود، تغییر تنیدگی یگانه کل در محدوده $1 \leq |q^R| \leq 0$ ناچیز و از مرتبه 10^{-2} است. محاسبات عددی نشان می‌دهد برای r های غیر صفر همچنان این تغییر وجود دارد، بنابراین نگاتیویته کل برای یک r مشخص جز در حد شتاب بینهایت با تغییر $|q^R|$ پایسته نمی‌ماند.

ترانهاده جزئی عملگر ρ_{ABC}^W نسبت به مدهای چارلی به شکل زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \rho_{C(AB)}^W = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n^2}{3} [|1 \circ n\rangle \langle 0 \circ n| + |1 \circ n\rangle \langle 1 \circ n| + |0 \circ n\rangle \langle 1 \circ n| \\ & + Q_n^R |0 \circ n\rangle \langle 1 \circ (n+1)| + Q_n^R |0 \circ n\rangle \langle 0 \circ (n+1)| \\ & + Q_n^L \tanh r |0 \circ (n+1)\rangle \langle 0 \circ n| \\ & + Q_n^L \tanh r |0 \circ (n+1)\rangle \langle 1 \circ n| \\ & + Q_{n+1}^R Q_n^{L*} \tanh r |0 \circ n\rangle \langle 0 \circ (n+2)| \\ & + |Q_n^R|^2 |0 \circ (n+1)\rangle \langle 0 \circ (n+1)| + |Q_n^L|^2 |0 \circ n\rangle \langle 0 \circ n| \\ & + \text{H.C. (nondiag)}]. \end{aligned} \quad (44)$$

به سادگی می‌توان دید در $r=0$ نگاتیویته

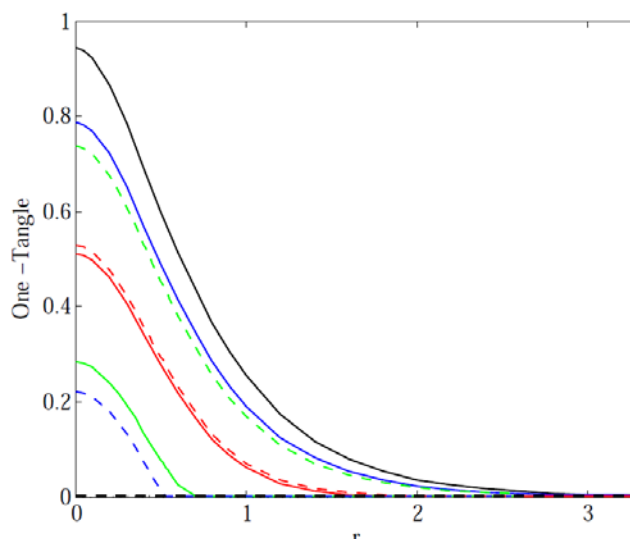
$$\left. -\frac{1}{3} \left\{ 1 - |q^R|^2 - \left[(1 + |q^R|^2)^2 + 4 |q^R|^2 \right]^{3/5} \right\} \right\}$$

برابر است. با

می‌توان به ترتیب $\rho_{B(AC)}^W$ و $\rho_{A(BC)}^W$ را به دست آورد. شکل ۵ تنیدگی یگانه را برحسب r ، هنگامی که آلیس، باب و چارلی حالت W را در ابتدا اشتراک گذاری کرده اند، نشان می‌دهد. مانند حالت GHZ میزان درهم تنیدگی در شتاب صفر به انتخاب مدهای آنرو وابسته است، اما برخلاف آن این تفاوت تا حد شتاب بینهایت ادامه نمی‌یابد و مقدار تنیدگی یگانه در این حد به ازای مقادیر متفاوت $|q^R|$ به تک مقدار 0.659 میل می‌کند؛ به عبارت دیگر مقدار تنیدگی یگانه در شتاب بینهایت مستقل از انتخاب $|q^R|$ ها می‌باشد.

با نگاه اولیه به شکل فوق ممکن است این تصور ایجاد شود که مقدار کل تنیدگی یگانه بین سامانه‌های آلیس-باب-چارلی و آلیس-باب-آنتی چارلی، با افزایش شتاب پایسته می‌ماند. اما ملاحظات ما نشان می‌دهند که کاهش تنیدگی یگانه بین مدهای آلیس، باب و چارلی به طور کامل با افزایش تنیدگی یگانه بین مدهای آلیس، باب و آنتی چارلی جبران نمی‌شود. حتی برای $|q^R| \approx |q^L|$ در محدوده‌ای از r ، افزایش نگاتیویته در هر دو سامانه مشاهده می‌شود. بنابراین نمی‌توان گفت تنیدگی یگانه کل بین این دو سامانه پایسته می‌ماند، هر چند با تغییر شتاب، تغییر تنیدگی یگانه کل ناچیز و حدوداً از مرتبه 10^{-2} می‌باشد.

اکنون می‌خواهیم ببینیم رفتار تنیدگی یگانه کل با تغییر $|q^R|$ به ازای یک r مشخص چگونه است. تنیدگی یگانه سامانه آلیس-باب-چارلی در $r=0$ برابر



شکل ۷. تنیدگی یگانه به صورت تابعی از r برای حالت W موقعی که ترانهاده جزئی نسبت به چارلی باشد. منحنی های پیوسته (گسسته) از بالا به پایین (از پایین به بالا) متناظر با $|q^R|$ های ۱، ۰/۹، ۰/۷، ۰/۵ و برای سه بخشی آلیس-باب-چارلی (آلیس-باب-آنتی چارلی) هستند. و در حد شتاب بینهایت به سمت صفر میل می کنند.

ها از بین می رود، این مقادیر محدود r برای $|q^R|$ های ۱، ۰/۹، ۰/۷ و ۰/۵ به ترتیب برابر ۰/۸۸۵، ۰/۷۷۵، ۰/۵۶۷ و ۰/۴۰۰ هستند.

سرانجام، عملگر چگالی متناظر با دوبخشی آلیس-باب را می توان با ردگیری از عملگر ρ_{ABC}^W نسبت به مدهای چارلی به دست آورد. ترانهاده جزئی عملگر $\rho_{AB}^W = Tr_C(\rho_{ABC}^W)$ نسبت به آلیس به شکل زیر است

$$\rho_{AB}^W = \frac{1}{3} [|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01|], \quad (46)$$

که برای به دست آوردن آن از سری های $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^2 = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^2 \frac{n+1}{\cosh^2 r} = 1$$

عملگر فوق به این مطلب اشاره دارد که درهم تنیدگی مربوط به زیر سامانه آلیس-باب مستقل از شتاب چارلی و انتخاب های $|q^R|$ است، لذا به سادگی می توان دید $N_{AB} = \frac{1}{3}(\sqrt{5}-1)$.

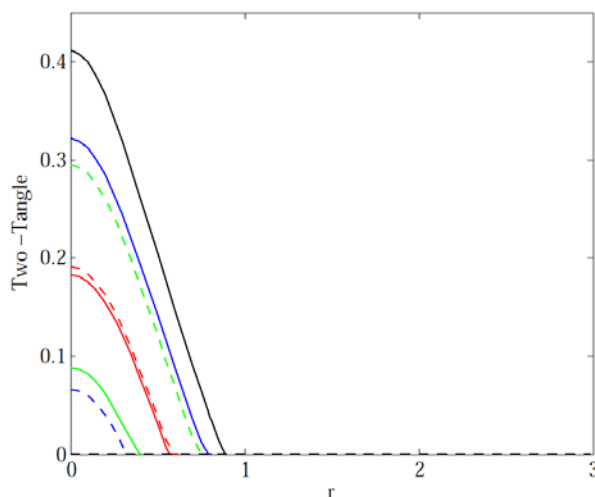
اکنون می توانیم به بررسی درهم تنیدگی برای حالت W پردازیم. شکل ۹ رفتار تنیدگی پی را نسبت به شتاب چارلی و

افزایش r نگاتیو به کاهش می یابد و در حد شتاب بینهایت، نگاتیو به برای هر انتخابی از $|q^R|$ ها به سمت صفر میل می کند؛ شکل ۷ بیانگر این مطلب است. در شتاب صفر، تنیدگی های یگانه $N_{\bar{A}(BC)}$ و $N_{\bar{C}(AB)}$ تنها به ازای $|q^R|=1$ با هم برابرند.

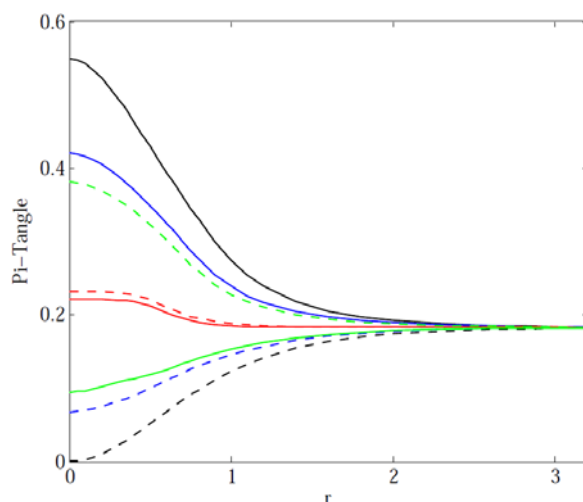
اکنون می خواهیم به بررسی درهم تنیدگی زیرسامانه ها پردازیم. به سادگی می توان دید که $Tr_A(\rho_{ABC}^W) = Tr_B(\rho_{ABC}^W)$ از این رو می توان درهم تنیدگی زیرسامانه های آلیس-چارلی و باب-چارلی را به کمک عملگر زیر به دست آوریم

$$\begin{aligned} \rho_{AC}^W = \rho_{BC}^W = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n^2}{3} [|0n\rangle\langle 0n| + |1n\rangle\langle 1n| \\ & + Q_n^R |1(n+1)\rangle\langle 0n| + Q_{n+1}^R Q_n^{L*} \tanh r |0(n+2)\rangle\langle 0n| \\ & + Q_n^L \tanh r |1n\rangle\langle 0(n+1)| + |Q_n^R|^2 |0(n+1)\rangle\langle 0(n+1)| \\ & + |Q_n^L|^2 |0n\rangle\langle 0n| + \text{H.C. (nondiag)}] \end{aligned} \quad (45)$$

بنابراین $N_{AC} = N_{BC}$. رفتار تنیدگی دوگانه $N_{\bar{BC}}$ و $N_{\bar{AC}}$ برحسب شتاب چارلی در شکل ۸ نشان داده شده است. برخلاف موارد قبل نگاتیو به در r محدودی برابر صفر خواهد شد، یعنی از یک شتاب محدودی به بعد درهم تنیدگی زیرسامانه



شکل ۸. تنیدگی دوگانه را به صورت تابعی از r برای زیرسامانه‌های دوبخشی حالت W که شامل ناظر شتاب‌دار هستند، نشان می‌دهد. منحنی‌های پیوسته (گسسته) از بالا به پایین (از پایین به بالا) متناظر با $|q^R|$ های ۱، $0/9$ ، $0/7$ و $0/5$ برای دوبخشی آلیس-چارلی و باب-چارلی (آلیس-آنتی‌چارلی و باب-آنتی‌چارلی) هستند. تنیدگی دوگانه به ترتیب از r های $0/885$ ، $0/775$ ، $0/567$ و $0/400$ (۰، $0/329$ ، $0/580$ و $0/740$) به بعد صفر می‌شوند.



شکل ۹. تنیدگی پی را به صورت تابعی از r برای حالت W نشان می‌دهد. منحنی‌های پیوسته (گسسته) از بالا به پایین (از پایین به بالا) متناظر با $|q^R|$ های ۱، $0/9$ ، $0/7$ و $0/5$ برای سه‌بخشی آلیس-باب-چارلی (آلیس-باب-آنتی‌چارلی) هستند. این شکل نشان می‌دهد که تنیدگی پی در حد شتاب بینهایت به مقدار غیر صفر $0/176$ میل می‌کند.

درهم‌تنیدگی باقی مانده در حالت W کوچکتر از مقادیر متناظر در حالت GHZ است. در واقع می‌توان گفت زمانی که ناظرها ابتدا حالت W را اشتراک گذاری می‌کنند، در حد شتاب بینهایت تفاوت بین رهیافت‌های تقریب تک مد و ورای تقریب تک مد از بین می‌رود. منحنی‌های تنیدگی پی در حالت W ، منحنی‌های یکنوا صعودی و نزولی هستند، در حالی که در حالت GHZ

آنتی‌چارلی برای $|q^R|$ های ۱، $0/9$ ، $0/7$ و $0/5$ نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود مثل حالت GHZ تنیدگی پی به ازای بعضی مقادیر $|q^R|$ با افزایش شتاب افزایش می‌یابد و به ازای انتخاب‌های دیگر با افزایش شتاب کاهش می‌یابد؛ اما برخلاف حالت GHZ، به ازای مقادیر مختلف $|q^R|$ در حد شتاب‌های بالا به تک مقدار $0/176$ میل می‌کند؛ این مقدار

می‌کند. برای بعضی دیگر از مدهای آنرو، تنیدگی پی مقدار بیشینه در شتاب محدود خواهد داشت و در حد شتاب بینهایت به مقدار غیر صفر میل می‌کند. اگر ناظرها در ابتدا حالت W را به اشتراک بگذارند، تنیدگی پی به ازای بعضی انتخاب‌های $|q^R\rangle$ یکنوا نزولی و برای انتخاب‌های دیگر یکنوا صعودی است، اما برخلاف حالت GHZ، منحنی‌های درهم‌تنیدگی به ازای همه مقادیر $|q^R\rangle$ به 0.176 میل می‌کند. بیشینه شدن تنیدگی پی در شتاب محدود برای بعضی از مدهای آنرو در حالت GHZ نتیجه‌ای جالب است. ما علت فیزیکی این اتفاق را نمی‌دانیم اما بررسی مجدد این مسئله با استفاده از سنجه تنیدگی سه‌گانه و مقایسه نتایج حاصل از آن با نتایج موجود می‌تواند مفید باشد؛ هرچند کار با معیار تنیدگی سه‌گانه جز در چند مورد محدود بسیار مشکل است.

برای بعضی مقادیر $|q^R\rangle$ ، منحنی درهم‌تنیدگی مقدار بیشینه‌ای در شتاب غیر صفر دارد.

۴. نتیجه‌گیری

در این کار ما درهم‌تنیدگی سامانه‌های سه‌بخشی را در ورای تقریب تک مد بررسی کردیم. برای حالت GHZ نشان دادیم که تنیدگی پی، به عنوان معیار درهم‌تنیدگی سامانه‌های سه‌بخشی، با اتخاذ مدهای مختلف آنرو رفتارهای متفاوتی از خود نشان می‌دهد. برای $|q^R\rangle=1$ ، اگر تنها یکی از ناظرها شتابدار شود، منحنی تنیدگی پی یکنوا نزولی است و در حد شتاب بینهایت درهم‌تنیدگی به طور کامل از بین نمی‌رود و به مقدار $0.524 \sim \frac{\pi}{6}$ میل می‌کند. برای بعضی مدهای آنرو تنیدگی پی، یکنوا صعودی خواهد بود؛ به عنوان مثال برای $|q^R\rangle=0.5$ درهم‌تنیدگی با افزایش شتاب افزایش می‌یابد و به 0.461 میل

مراجع

1. G Albert, "Quantum Information", Springer (2001).
2. A Peres, P F Scudo, and D R Terno, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 230402; D R Terno and A Peres, *Rev. Mod. Phys.* **76** (2004) 93.
3. R M Gingrich and C Adami, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 270402.
4. R M Gingrich, A J Bergou, and C Adami, *Phys. Rev. A* **68** (2003) 042102.
5. P M Alsing and G J Milburn, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 180404.
6. I Fuentes-Schuller and R B Mann, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 120404.
7. P M Alsing, I Fuentes-Schuller, R B Mann, and T E Tessier, *Phys. Rev. A* **74** (2006) 032326.
8. J Doukas and L C L Hollenberg, *Phys. Rev. A* **79** (2009) 052109.
9. E Martin-Martinez and J Leon, *Phys. Rev. A* **80** (2009) 042318.
10. E Martin-Martinez, L J Garay, and J Leon, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 064006.
11. D E Bruschi, J Louko, E Martin-Martinez, A Dragan, and I Fuentes, *Phys. Rev. A* **82** (2010) 042332.
12. B Nasr Esfahani, M Shamirzaie, and M Soltani, *Phys. Rev. D* **84** (2011) 025024.
13. M Hwang, D Park, and E Jung, *Phys Rev A* **83** (2011) 012111.
14. J Wang and J Jing, *Phys. Rev. A* **83** (2011) 022314.
15. E Martin-Martinez and I Fuentes, *Phys. Rev. A* **83** (2011) 052306.
16. M Shamirzaie, B Nasr Esfahani, and M Soltani, *Int. J. Theor. Phys.* **51** (2012) 787.
17. S A A Ghorashi, M H Aminjavaheri, M Bagheri Harouni, *Quantum. Inf. Process* **13** (2014) 527.
18. M H Aminjavaheri, S A A Ghorashi and M Bagheri Harouni, *Quantum. Inf. Process* **13** (2014) 1483.
19. ب. نصر اصفهانی، ش. دهدشتی و م. اسحاقی، مجله پژوهش فیزیک ایران، ۵، ۳ (۱۳۸۴) ۱۳۵.
20. ع. بهزادی مهر، ز. خاکساری و ب. میرزا، مجله پژوهش فیزیک ایران، ۱۲، ۲ (۱۳۹۱) ۱۴۷.
21. W G Unruh, *Phys. Rev D* **70** (1976) 048702.
22. D M Greenberger, M Horne, and A Zeilinger, "Bells Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe", edited by M Kafatos Kluwer, Dordrecht (1989).
23. W Dur, G Vidal, and J I Cirac, *Phys. Rev. A* **62** (2000) 062314.
24. E Martin-Martinez and J Leon, *Phys. Rev. A* **81** (2010) 032320.
25. Q Pan and J ing, *Phys. Rev. A* **74** (2008) 024302.
26. N D Birrell and P C W Davies, "Quantum Fields in Curved Space", Cambridge University Press, Cambridge, UK (1984).
27. S Takagi, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **88** (1986) 1.

32. Y C Ou and H Fan, *Phys. Rev. A* **75** (2007) 062308.
33. R Lohmayer, A Osterloh, J Siewert, and A Uhlmann, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 260502; C Eltschka, A Osterloh, J Siewert, and A Uhlmann, *New J. Phys.* **10** (2008) 043014; E Jung, M R Hwang, D K Park, and J W. Son, *Phys. Rev. A* **79** (2009) 024306.
28. R d'Inverno, "Introducing Einstein's Relativity", Clarendon Press, Oxford (1992).
29. S Carroll, "Spacetime and Geometry an Introduction to General Relativity", Addison Wesley (2004).
30. G Arfken, "Mathematical Methods for Physics", Academic Press, Inc (1985).
31. V Coffman, J Kundu, and W K Wothers, *Phys. Rev. A* **61** (2000) 052306.