مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۲۱، شمارهٔ ۳، پاییز ۱۴۰۰

ناموضعیت، درهم‌تنیدگی و فرابرد کوانتومی برای حالت‌های آمیخته با اسپین $\frac{۱}{۲}$

محمد مهدی اتفاقی و نرگس پور رحیمی

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم

پست الکترونیکی: mettefaghi@qom.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۸/۳ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۴۰۰/۳/۸)

چکیده

نقض نامساوی بل در مکانیک کوانتومی به معنی وجود ناموضعیت و درهم تنیدگی است. هرگاه ماتریس چگالی یک سیستم مرکب را نتوان به صورت ترکیب محدب از حاصل ضرب تانسوری ماتریس چگالی زیر سیستم‌های تشکیل دهندهٔ آن نوشت، اصطلاحاً گفته می‌شود درهم تنیدگی وجود دارد. برای حالت‌های خالص، وجود درهم تنیدگی همیشه منجر به نقض نامساوی بل می‌شود؛ در حالی که برای حالت‌های درهم آمیخته ممکن است درهم تنیدگی وجود داشته باشد ولی قضیه بل نقض نشود و به عبارت دیگر ناموضعیت تجلی پیدا نکند. علاوه بر نامساوی بل، فرابرد کوانتومی هم تجلیگر ناموضعیت است. فرابرد کوانتومی با استفاده از حالت‌های درهم تنیده موفق‌تر از فرابرد کوانتومی با حالت‌های جدا پذیر است. بنابراین کمیت شباهت حالت انتقال یافته با حالت اولیه (به طور خلاصه کمیت شباهت) در فرابرد کوانتومی از طریق کانال کوانتومی درهم تنیده بیشتر از کمیت شباهت در فرابرد کوانتومی از طریق کانال کوانتومی جدا پذیر است. در این مقاله برای موردی که از حالت ورنر به عنوان کانال کوانتومی استفاده می‌شود، نشان می‌دهیم که در بازه‌ای از پارامتر مربوطه، در حالی که نامساوی *CHSH* نقض می‌شود، کمیت شباهت که بیانگر میزان موفقیت فرابرد کوانتومی است کمتر از حد بالای کمیت شباهت برای حالت‌هایی که قابل شبیه‌سازی با یک نظریهٔ متغییر نهان موضعی است، می‌باشد. با این وجود خواهیم دید که برای مورد حالت ژیسن که ناموضعیت پنهان دارد، فیلتر کردنی که باعث تجلی ناموضعیت می‌شود و به عبارت صریح تر سبب می‌شود که نامساوی *CHSH* نقض شود، باعث افزایش کمیت شباهت نیز می‌شود..

واژه‌های کلیدی: درهم تنیدگی، ناموضعیت، دوربری کوانتومی، ناموضعیت پنهان، حالت های درهم آمیخته

۱. مقدمه

یک سیستم متشکل از دو زیر سیستم که در لحظهٔ اولیه با هم برهم‌کنش داشته ولی از یکدیگر جدا شده‌اند را در نظر بگیرید. با قبول واقع گرایی، از قضیهٔ EPR نتیجه می‌شود که در مکانیک کوانتومی، اندازه‌گیری روی هر یک از زیر سیستم‌ها، بر روی زیر سیستم متقابل حتی در فواصل فضا گونه تأثیر می‌گذارد [۱]. به این پدیده ناموضعیت و زیر سیستم‌هایی که ناموضعیت را نشان می‌دهند، درهم تنیده گفته می‌شود. ولی هدف اصلی قضیه EPR تأکید بر وجود متغییر نهان موضعی سازگار با واقع گرایی فیزیکی بود (در واقع در مقالهٔ EPR نویسندگان می‌خواستند نشان دهند مکانیک کوانتومی ناکامل است و برای توصیف کامل نیاز به وجود نظریه‌های دارای متغیر نهان موضعی است). بعدها بل با معرفی یک نامساوی راه را برای محک تجربی سازگاری فرض‌های هم زمان موضعیت و متغییر نهان موضعی باز کرد [۲].

آزمایش‌های زیادی طراحی شدند که همه آنها نشان می‌دهند که مدل های فیزیک کلاسیک که برمبنای موضعیت و واقع گرایی (متغییر نهان موضعی) هستند، نمی‌توانند همیشه درست باشند (برای نمونه به [۳] مراجعه کنید).

معمولاً توصیف‌های نظری بر مبنای آنسامبل‌های خالص صورت می‌گیرد. اما در عمل انجام آزمایش با آنسامبل‌های خالص فرض آرمانی است و بر اثر برهم‌کنش با محیط ما با یک آنسامبل آمیخته سر و کار داریم. لذا لازم است مطالعهٔ این مفاهیم در چارچوب آنسامبل‌های آمیخته انجام شود. برای آنسامبل‌های آمیخته، درهم تنیدگی و ناموضعیت همیشه معادل نیستند: نقض نامساوی بل همواره حاکی از وجود ناموضعیت و (یا) عدم وجود نظریهٔ متغییر نهان است در حالی که وجود درهم تنیدگی بدان معنی است که ماتریس چگالی یک سیستم مرکب قابل تجزیه برحسب ماتریس چگالی زیر سیستم‌ها نیست. بر مبنای نظریهٔ منبع کوانتومی، هر همبستگی بین دو سیستم که با عملگرهای موضعی و ارتباط کلاسیکی قابل حصول نباشد درهم تنیدگی گفته می‌شود [۴]. برای مثال حالت آمیخته ورنر[1] [۵]:

$$\rho_W = p\left|\overline{\psi}\right\rangle\left\langle\overline{\psi}\right| + \left(\frac{۱-p}{۴}\right) I \otimes I, \qquad (۱)$$

که $۰ \leq p \leq ۱$، را در نظر بگیرید. در اینجا $\left|\overline{\psi}\right\rangle = \frac{\left|۱۰\right\rangle - \left|۰۱\right\rangle}{\sqrt{۲}}$ حالت تکتایی، و I عملگر واحد است. با استفاده از معیارهای درهم تنیدگی مانند ترانهادهٔ جزیی [۶] می توان نشان داد که به ازای $\frac{۱}{۳} < p < ۱$ درهم تنیدگی وجود دارد در حالی که نامساوی بل به ازای $\frac{۱}{\sqrt{۲}} < p < ۱$ نقض می‌شود. بنابراین در بازهٔ $\frac{۱}{۳} < p < \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ درهم تنیدگی وجود دارد در حالی که نامساوی بل نقض نمی‌شود و در نتیجه وجود ناموضعیت نمایان نمی‌شود.

شیوه نامهٔ فرابرد کوانتومی[2] یک تجلی دیگر از ناموضعیت در مکانیک کوانتومی است که در سال ۱۹۹۳ توسط بنت[3] و همکاران مطرح شد [۷]. در این شیوه‌نامه یک حالت درهم تنیدهٔ کوانتومی (با فرض آرمانی یک حالت بل) بین آلیس و باب به اشتراک گذاشته می‌شود که به آن کانال کوانتومی گفته می‌شود. علاوه بر این، آلیس یک حالت ناشناخته در اختیار دارد که می‌خواهد آن را برای باب بفرستد. با انجام اندازه‌گیری در پایهٔ حالت‌های بل و با استفاده از یک کانال کلاسیکی موفق به انجام این کار می‌شود. انتخاب یکی از حالت‌های بل به عنوان کانال کوانتومی باعث می‌شود که آلیس با موفقیت کامل حالت ناشناختهٔ خودش را به باب انتقال دهد. ولی در آزمایش، کانال کوانتومی یک حالت آمیخته است و در نتیجه علی الاصول میزان موفقیت فرابرد کوانتومی به میزان درهم تنیدگی و ناموضعیت کانال کوانتومی بستگی خواهد داشت. میزان موفقیت فرابرد کوانتومی با معرفی پارامتر کمیت شباهت[4] قابل ارزیابی است. این پارامتر در واقع شباهت حالت فرستاده شده با حالت دریافت شده را ارزیابی می‌کند. به این ترتیب وقتی فرابرد کوانتومی با موفقیت کامل انجام شود کمیت شباهت برابر یک و در غیر این صورت کوچک تر از یک خواهد بود. اگر باب هیچ اطلاعاتی از آلیس دریافت نکند و تنها به طور حدسی تلاش کند که حالت آلیس را پیش بینی کند، کمیت شباهت برابر $\frac{۱}{۲}$ خواهد شد که این مقدار کمینهٔ آن است [۸]. اگر بین آلیس و باب یک حالت جداپذیر به اشتراک گذاشته شده باشد و آنها از طریق یک کانال کلاسیکی ارتباط برقرار کنند، کمیت شباهت برابر $\frac{۲}{۳}$ خواهد شد. اگر مطابق شیوه‌نامهٔ فرابرد کوانتومی بین آلیس و باب یک کانال کوانتومی به اشتراک گذاشته شود، حتی اگر این حالت کوانتومی نمایانگر ناموضعیت نباشد و به عبارت دیگر قضیهٔ بل را نقض نکند، کمیت شباهت می‌تواند از $\frac{۲}{۳}$ بزرگ‌تر باشد [۹]. به طور خاص در مرجع [۱۰] نشان داده شده است که برای حالت کوانتومی قابل شبیه‌سازی با نظریه‌های متغییر نهان موضعی، کمیت شباهت می‌تواند تا مقدار $F_\rho \approx ۰/۸۷$ بزرگ شود. در

۱. Werner
۲. Quantum Teleportation
۳. Bennett
۴. Fidelity

مرجع [۱۱]، نشان داده شده است برای کانال کوانتومی‌ای که نامساوی *CHSH* را نقض می‌کند کمیت شباهت قطعاً از $\frac{۲}{۳}$ بزرگ‌تر است. در این مقاله می‌خواهیم برای حالت ورنر میزان افزایش کمیت شباهت را با افزایش درهم تنیدگی که فرض می‌کنیم توسط پارامتر تطابق[1] کمی شود [۱۲] و نمایان شدن ناموضعیت که برحسب نقض نامساوی *CHSH* سنجیده می‌شود [۱۳] مقایسه کنیم. با این مقایسه خواهیم دید در بازه‌ای از پارامتر p، نامساوی *CHSH* نقض می‌شود ولی کمیت شباهت کمتر از حد بالای آن که از حالت‌های قابل شبیه‌سازی با نظریه‌های متغییر نهان به دست می‌آید، یعنی ۰٫۸۷ است.

از طرف دیگر ژیسن حالت‌هایی را معرفی کرد که نامساوی *CHSH* را نقض نمی‌کردند ولی بعد از برهم‌کنش با محیط (فیلتر شدن) این نامساوی را نقض می‌کردند و در نتیجه ناموضعیت را نشان می‌دادند از این رو به آن ناموضعیت پنهان گفته می‌شود [۱۴]. لذا با توجه به نتیجه‌ای که برای حالت ورنر حاصل می‌شود سؤالی که پیش می‌آید این است که آیا نمایان شدن ناموضعیت بر اثر فیلتر شدن به معنی مناسب‌تر شدن حالت برای فرابرد کوانتومی است؟ از این‌رو در این مقاله اثر عمل فیلتر کردن را بر میزان کمیت شباهت بررسی خواهیم کرد.

در بخش دوم مقاله مفاهیم ناموضعیت و درهم تنیدگی و فرابرد کوانتومی را معرفی می‌کنیم. برای اولی یک نشانگر جهت تشخیص وجود یا عدم وجود ناموضعیت و برای هر کدام از دوتای دیگر یک سنجهٔ سنجش معرفی می‌کنیم. در بخش سوم این پارامترها را برای حالت ورنر مقایسه خواهیم کرد. در بخش چهارم فرابرد کوانتومی را برای حالت‌های دارای ناموضعیت پنهان قبل و بعد از فیلتر کردن بررسی خواهیم کرد. بالاخره در بخش پایانی نتایج را جمع‌بندی و روی آنها بحث خواهیم کرد.

۲. ناموضعیت، درهم تنیدگی و فرابرد کوانتومی و معیار آنها

در این بخش هر یک از مفاهیم ناموضعیت، درهم تنیدگی و فرابرد کوانتومی را تعریف می‌کنیم. همچنین یک نشانگر برای تشخیص وجود ناموضعیت و برای هر کدام از دوتای دیگر یک معیار سنجه‌ای معرفی می‌کنیم.

۲. ۱. ناموضعیت

نامساوی بل برمبنای پذیرش دو اصل معقول در فیزیک کلاسیک یعنی واقع گرایی و موضعیت حاصل می‌شود. از این‌رو نقض این نامساوی نشان می‌دهد فیزیک حاکم بر جهان همیشه از این دو اصل به طور همزمان طبعیت نمی‌کند و به عبارت دیگر جهان واقع گرای موضعی نیست. مکانیک کوانتومی قابلیت توجیه نقض نامساوی بل را دارد. در واقع همبستگی‌هایی در کوانتوم پیش‌بینی می‌شوند که با فرض واقع‌گرایی موضعی در تناقض است و در نتیجه منجر به نقض نامساوی بل می‌شود که در آزمایشگاه نیز تأیید شده است. حالت‌های چند ذره‌ای کوانتومی که یکی از نسخه‌های نامساوی بل را نقض می‌کنند حالت‌هایی هستند که در آنها وجود ناموضعیت تجلی پیدا کرده است؛ از این‌رو به این حالت‌ها ناموضعی گفته می‌شود. برای نمونه یک سیستم دو ذره‌ای با اسپین $\frac{۱}{۲}$ در نظر بگیرید. به طور عام حالت کوانتومی این سیستم با ماتریس چگالی زیر داده می‌شود:

$$\rho=\frac{1}{4}\left(\begin{array}{c} \mathrm{I}\otimes\mathrm{I}+\vec{r}.\vec{\sigma}\otimes\mathrm{I}+\mathrm{I}\otimes\vec{s}.\vec{\sigma} \\ +\sum_{m,n=1}^{3} t_{mn}\sigma_m\otimes\sigma_n \end{array}\right), \qquad (۲)$$

در اینجا $\vec{r}$ و $\vec{s}$ بردارهایی در $\mathbb{R}^3$ و σ_i ها ماتریس های پائولی هستند. ضرایب $t_{mn}=Tr(\rho\sigma_m\otimes\sigma_n)$ تشکیل یک ماتریس حقیقی می‌دهند که ما آن را با T_ρ نمایش می‌دهیم. در عبارت (۲) برای ماتریس چگالی باید شرط مثبت بودن جداگانه اعمال شود. عملگر B_{CHSH} به صورت

$$B_{CHSH}=\widehat{a.\vec{\sigma}}\otimes(\hat{b}+\widehat{b').\vec{\sigma}}+\widehat{a'.\vec{\sigma}}\otimes(\hat{b}-\widehat{b').\vec{\sigma}}, \qquad (۳)$$

که $\hat{a}$، $\widehat{a'}$، $\hat{b}$ و $\widehat{b'}$ بردارهای یکه در $\mathbb{R}^3$ هستند، تعریف می‌شود. نسخهٔ CHSH نامساوی بل به صورت زیر نوشته می‌شود:

۱. Concurrence

$$\left|\left\langle B_{CHSH}\right\rangle_{\rho}\right| \leq ۲, \qquad (۴)$$

که $\left\langle B_{CHSH}\right\rangle_{\rho} = Tr(\rho B_{CHSH})$. برای حالت ρ که در رابطۀ (۲) داده شده است پارامتر M_{ρ} به صورت:

$$M_{\rho} = u_{i} + u_{j}, \qquad (۵)$$

که u_i و u_j دو ویژه مقدار بزرگ تر ماتریس $U_{\rho} = T_{\rho}^{\dagger} T_{\rho}$ هستند، تعریف می‌شود. در مرجع [۱۳] نشان داده شده است که نامساوی (۴) نقض می‌شود اگر و فقط اگر $M_{\rho} > ۱$. حد بالای M_{ρ} برابر ۲ است. همان گونه که گفته شد نقض یک نسخه از نامساوی بل به معنی وجود ناموضعیت است، لذا پارامتر

$$B_{\rho} = \sqrt{Max(۰, M_{\rho} - ۱)}, \qquad (۶)$$

را به عنوان نشانگر ناموضعیت تعریف می‌کنیم. بدین ترتیب صفر بودن B_{ρ} به معنی عدم وجود ناموضعیت است و وقتی $B_{\rho} = ۱$ باشد نامساوی *CHSH* به صورت بیشینه نقض می‌شود. لازم به ذکر است که ناموضعیت از دیدگاه نظریۀ منبع کوانتومی به طور گسترده بررسی شده است و از این طریق سنجه‌هایی برای کمی کردن ناموضعیت تعریف شده است (برای نمونه به مراجع [۱۵، ۱۶، ۱۷ و ۱۸ مراجعه کنید). در این مقاله ما از B_{ρ} تنها برای تعیین امکان نقض نامساوی *CHSH* استفاده می‌کنیم.

۲. ۲. درهم تنیدگی

همان گونه که گفته شد مفهوم درهم‌تنیدگی در مقابل جدا پذیری تعریف می‌شود. اگر ρ ماتریس چگالی یک سیستم متشکل از دو زیر سیستم باشد، در صورتی که بتوان آن را به صورت

$$\rho = \sum_{i} p_{i} \rho_{i}^{A} \otimes \rho_{i}^{B}, \qquad (۷)$$

نوشت، گفته می‌شود که جدا پذیر است و در غیر این صورت گفته می‌شود که درهم تنیده است. شاخص‌های A و B نشانگر زیر سیستم‌های مختلف است و p_i ها عددهای حقیقی بین صفر و یک است که رابطۀ $\sum_{i} p_{i} = ۱$ را برآورده می‌کنند. برای تشخیص وجود درهم تنیدگی روش‌های مختلفی وجود دارد: یکی از مهمترین روش‌ها بررسی قضیه بل است. حالت‌هایی که نامساوی بل را نقض می‌کنند علاوه بر این که ناموضعیت را نمایان می‌کنند، درهم تنیده نیز هستند. روش دیگر روش ترانهاده جزئی است [۶]. در این روش از ماتریس چگالی در پایۀ محاسباتی نسبت به یکی از زیر سیستم‌ها ترانهاده می‌گیریم و سپس ویژه مقادیر ماتریس جدید را به دست می‌آوریم. شرط لازم برای این که حالت مورد نظر جدا پذیر باشد این است که این ویژه مقادیر غیر منفی باشند. در مرجع [۱۹] نشان داده شده است که این شرط برای ماتریس چگالی‌های عمل کننده روی فضای هیلبرت ۲×۲ و ۳×۲ نیز کافی است. البته روش‌های دیگر نیز برای بررسی درهم تنیدگی وجود دارد که ما از ذکر همۀ آنها چشم پوشی می‌کنیم. ولی در این بین روش‌هایی وجود دارد که با استفاده از نظریۀ منبع کوانتومی میزان درهم تنیدگی را کمی می کنند [۴ و ۱۲]. از دیدگاه نظریۀ منبع کوانتومی حالت یک سیستم متشکل از دو زیر سیستم درهم تنیده است اگر روشی برای ایجاد همبستگی‌های بین این دوسیستم از طریق اندازه‌گیری‌های موضعی (اندازه‌گیری در آزمایشگاه هر زیر سیستم) و ارتباط کلاسیکی وجود نداشته باشد. بنابراین، میزان درهم تنیدگی حالت‌های درهم تنیدۀ مختلف یکسان نیست و در این روش‌ها با معرفی یک سنجۀ مناسب، میزان درهم تنیدگی را کمی می‌کنند. به عنوان مثال میزان درهم تنیدگی سیستم‌های دو بخشی کیوبیتی را می‌توان با پارامتر تطابق که به صورت زیر تعریف می‌شود، سنجید [۱۲]:

$$C = Max(۰, \sqrt{\lambda_{۱}} - \sqrt{\lambda_{۲}} - \sqrt{\lambda_{۳}} - \sqrt{\lambda_{۴}}), \qquad (۸)$$

در اینجا λ_i ها ویژه مقادیر $\rho\tilde{\rho}$ هستند و از بزرگ به کوچک مرتب شده‌اند. ماتریس $\tilde{\rho}$ از روی ماتریس چگالی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{\rho} = \sigma_{y} \otimes \sigma_{y} \rho^{*} \sigma_{y} \otimes \sigma_{y}, \qquad (۹)$$

که در اینجا ρ^{*} مزدوج مختلط ماتریس چگالی ρ در پایۀ محاسباتی است. غیر صفر شدن C به معنی عدم وجود درهم تنیدگی و بزرگ‌تر شدن آن به معنی درهم تنیدگی بیشتر است. $C = ۱$ متناظر به درهم تنیدگی کامل یعنی متناظر با حالت‌های بل است.

۲. ۳. فرابرد کوانتومی

فرابرد کوانتومی به عنوان یکی از مهم‌ترین شیوه‌نامه‌ها در دانش اطلاعات و محاسبات کوانتومی با هدف انتقال اطلاعات بین سامانه‌های غیر بر هم‌کنشی به واسطهٔ یک کانال کوانتومی بنا نهاده شده است. بنت و همکاران نشان دادند که با استفاده از حالت‌های درهم تنیده می‌توان حالت یک ذره را بدون این که اندازه‌گیری روی آن انجام دهیم به طور کامل به ذره‌ای دیگر منتقل کنیم که به آن فرابرد کوانتومی گفته می‌شود [۷]. در واقع از طریق این فرایند یک حالت کوانتومی ناشناخته از یک فرستنده (آلیس) به یک گیرنده (باب) انتقال می‌یابد. برای انجام این فرایند، باید قبلاً بین آلیس و باب یک حالت درهم تنیده که تحت عنوان کانال کوانتومی نام برده می‌شود، به اشتراک گذاشته شود. کانال کوانتومی یک سامانهٔ دوقسمتی کوانتومی درهم تنیده مثل حالت‌های بل گونه است. هر چه حالت کانال کوانتومی به حالت‌های بل گونه نزدیک‌تر باشد، برای فرابرد کارامدتر است. علاوه بر کانال کوانتومی، آلیس باید اطلاعات کلاسیکی اضافه‌تری را از طریق یک کانال کلاسیکی (مثلاً از طریق تلفن) به باب بفرستد تا باب بتواند با انتخاب استراتژی مناسب حالت کوانتومی مورد نظر را تشخیص دهد.

از آنجایی که به عنوان مثال در آزمایشگاه، حالت‌های درهم تنیده خالص دست خوش برهم‌کنش با محیط قرار می‌گیرند، در عمل فرابرد کوانتومی از طریق حالت آمیخته انجام می‌شود. لذا انتقال کوانتومی آرمانی ذکر شده، در آزمایشگاه اتفاق نمی‌افتد و لازم است از طریق مقایسهٔ شباهت حالت فرستاده شده با حالت دریافت شده، میزان موفقیت فرابرد کوانتومی را ارزیابی کنیم. برای تعیین میزان شباهت حالت‌های کوانتومی فرستاده شده توسط آلیس و دریافت شده توسط باب، معیار کمیت شباهت معرفی می‌شود که یک مفهوم اساسی در نظریهٔ اطلاعات کوانتومی است. اگر حالت خالص و ناشناخته‌ای که توسط آلیس فرستاده می‌شود را با $|\psi_{Alice}\rangle$ و به طور عام حالت آمیختهٔ دریافت شده توسط باب را با ρ_{Bob} نشان دهیم، کمیت شباهت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_\rho = Max_{strategies}[M(\langle\psi_{Alice}|\rho_{Bob}|\psi_{Alice}\rangle)], \qquad (۱۰)$$

که منظور از M میان گیری روی حالت‌های ممکن انتخاب شده توسط آلیس و $Max_{strategies}$ انتخاب استراتژی‌ای که F_ρ را بیشنه می‌کند، است. ρ نشانگر ماتریس چگالی کانال کوانتومی استفاده شده در فرابرد کوانتومی است و همان گونه که ملاحظه می‌شود کمیت شباهت به ویژگی‌های کانال کوانتومی وابسته است. با این تعریف برای شیوه‌نامهٔ آرمانی که کانال کوانتومی حالت‌های خالص درهم تنیده[۱] است، کمیت شباهت برابر یک می‌شود. لذا با توجه به این که فرابرد کوانتومی در واقع یک اثر کوانتومی ناشی از ناموضعیت و درهم تنیدگی است، می‌توان از کمیت شباهت به عنوان یک کمیت برای ارزیابی میزان ناموضعیت و درهم تنیدگی استفاده کرد.

ثابت می‌شود کمیت شباهت برای حالت کوانتومی‌ای که با رابطهٔ (۲) داده می‌شود به صورت زیر است [۱۱]:

$$F_\rho = \frac{۱}{۲}\left(۱+\frac{۱}{۳}N_\rho\right), \qquad (۱۱)$$

که $N_\rho = Tr\sqrt{T_\rho^\dagger T_\rho}$. برای N_ρ داریم:

$$N_\rho = \sum_{i=۱}^{۳}\sqrt{u_i}, \qquad (۱۲)$$

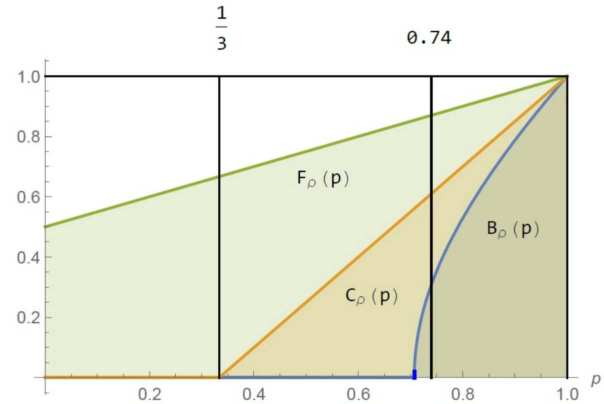
که u_i ها ویژه مقادیر ماتریس $T_\rho^\dagger T_\rho$ هستند. طبق رابطهٔ (۱۱) برای این که تضمین شود که کانال کوانتومی ρ برای فرابرد کوانتومی مؤثر است (یعنی کمیت شباهت متناظر با آن بیشتر از کمیت شباهت متناظر با کانال غیر کوانتومی یعنی $\frac{۲}{۳}$ باشد) باید $N_\rho > ۱$ باشد. چون u_i ها کوچک‌تر از یک هستند [۱۱]، داریم:

$$M_\rho \le N_\rho, \qquad (۱۳)$$

بنابراین شرط $M_\rho > ۱$ که تضمین می‌کند نامساوی *CHSH* نقض می‌شود شرط کافی برای $F_\rho > \frac{۲}{۳}$ نیز است. به عبارت دیگر حالت‌هایی که نامساوی *CSHS* را نقض می‌کنند برای انجام فرابرد از کانال‌های کلاسیکی مفیدتر هستند. البته این نتیجه را

---

۱. حالت‌های درهم تنیدهٔ خالص، کاملاً ناموضعی نیز هستند و در نتیجه یکی از نسخه‌های نامساوی بل را نقض می‌کنند.



شکل ۱. (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) نمودار پارامترهای نشانگر ناموضعیت B_ρ، سنجش درهم تنیدگی C_ρ و سنجش فرابرد کوانتومی F_ρ برحسب p برای حالت ورنر. دو خط عمودی $\frac{۱}{۳}$ و ۰٫۷۴ معادل حد بالای F_ρ برای فرابرد توسط به ترتیب کانال کلاسیکی و کانال سازگار با نظریهٔ متغییر نهان موضعی هستند.

می‌توان تعمیم داد و نتیجه گرفت که حالت‌هایی که یک نسخه از نامساوی بل را نقض می‌کنند برای انجام فرابرد نسبت به کانال کلاسیکی مؤثرتر هستند.

۳. حالت ورنر

در این قسمت ناموضعیت، درهم تنیدگی و فرابرد کوانتومی را برای حالت ورنر که در رابطهٔ (۱) داده شده است بررسی می‌کنیم. با یک محاسبهٔ سر راست می‌توان نشان داد که پارامتر B_ρ به عنوان معیار ناموضعیت، پارامتر C_ρ به عنوان معیار درهم تنیدگی و پارامتر F_ρ به عنوان معیار موفقیت فرابرد کوانتومی برای حالت ورنر به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$B_\rho = \sqrt{Max(۰, ۲p^{۲} - ۱)}, \qquad (۱۴)$$

$$C_\rho(p) = \frac{۱}{۲}(۳p - ۱), \qquad (۱۵)$$

$$F_\rho(p) = \frac{۱}{۲}(۱ + p), \qquad (۱۶)$$

برای مقایسه، نمودار تغییر این سه پارامتر بر حسب p را در شکل ۱ رسم کرده‌ایم. در این شکل دو خط $p = \frac{۱}{۳}$ و $p = ۰٫۷۴$ به ترتیب متناظر با حد بالای کمیت شباهت برای فرابرد با کانال کلاسیکی $F_\rho = \frac{۲}{۳}$ و حد بالای کمیت شباهت برای فرابرد با کانال کوانتومی سازگار با نظریهٔ متغییر نهان موضعی $F_\rho \approx ۰٫۸۷$ هستند. همان گونه که در شکل دیده می‌شود برای $p < \frac{۱}{۳}$ ناموضعیت و درهم تنیدگی هیچ کدام وجود ندارند. درهم تنیدگی دقیقاً از $p = \frac{۱}{۳}$ شروع می‌شود. این در حالی است که ناموضعیت از $p = ۰٫۷۱$ شروع می‌شود. ولی نتیجهٔ مهم‌تر از آن این است که در بازهٔ $۰٫۷۱ < p < ۰٫۷۴$ با وجود این که کمیت شباهت از حد ۰٫۸۷ کوچک‌تر است ولی نامساوی *CHSH* نقض می‌شود و در نتیجه ناموضعیت وجود دارد. به عبارت دیگر حالت‌هایی وجود دارند که ناموضعیت دارند ولی در فرابرد کوانتومی از بعضی از حالت‌های قابل شبیه‌سازی با نظریه‌های متغییر نهان موضعی ناکارامدتر هستند.

۴. موضعیت پنهان و فرابرد کوانتومی

این گونه به نظر می‌رسد که برهم‌کنش با محیط باعث کم شدن همبستگی ها کوانتومی می‌شود و حالتی که ناموضعیت دارد بر اثر برهم‌کنش با محیط خاصیت ناموضعیتش را از دست بدهد. اما ژیسن حالت‌هایی را معرفی می‌کند که در ابتدا موضعی هستند ولی بعد از برهم‌کنش با محیط و به عبارت دیگر بعد از

فیلتر شدن می‌توانند ناموضعی شوند و نامساوی *CHSH* را نقض کنند [۱۴]. در ادامهٔ این مقاله می‌خواهیم اثر عمل فیلتر کردن را بر میزان موفقیت فرابرد کوانتومی بررسی کنیم. با توجه به نتیجه‌ای که برای حالت ورنر به دست آمد مشخص نیست که آیا عمل فیلتر کردنی که ناموضعیت را نمایان می‌کند می‌تواند باعث افزایش کارامدی حالت برای فرابرد کوانتومی شود یا نه؟

ابتدا حالت‌های خالص زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\psi_{\alpha,\beta}=\alpha|01\rangle-\beta|10\rangle, \quad (۱۷)$$

$$\psi_{00}=|00\rangle, \quad (۱۸)$$

$$\psi_{11}=|11\rangle, \quad (۱۹)$$

که $\alpha>\beta>0$ و $\alpha^2+\beta^2=1$ است. حال حالت آمیختهٔ زیر که ترکیبی از حالت‌های خالص بالا است، را در نظر بگیرید [۱۴]:

$$\rho(\lambda,\alpha)=\lambda\rho_{\psi_{\alpha,\beta}}+\frac{1}{2}(1-\lambda)\left(\rho_{\psi_{00}}+\rho_{\psi_{11}}\right) \quad (۲۰)$$

در اینجا λ یک عدد حقیقی بین ۰ و ۱ است. شکل ماتریسی $\rho(\lambda,\alpha)$ بر اساس ماتریس‌های پائولی و ماتریس همانی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\rho(\lambda,\alpha)=\frac{1}{4}[1+\lambda(\alpha^2-\beta^2)(\sigma_z\otimes I-I\otimes\sigma_z)+(1-2\lambda)\sigma_z\otimes\sigma_z-2\lambda\alpha\beta(\sigma_x\otimes\sigma_x+\sigma_y\otimes\sigma_y)], \quad (۲۱)$$

حال مطابق مطالب بخش ۲-۱برای M_ρ خواهیم داشت:

$$M_\rho(\lambda,\alpha,\beta)=Max[(2\lambda-1)^2+4\lambda^2\alpha^2\beta^2, 8\lambda^2\alpha^2\beta^2], \quad (۲۲)$$

فرض کنید دو ذره یکی به سمت راست و دیگری به سمت چپ حرکت می‌کنند. این ذرات قبل از هر گونه اندازه‌گیری از فیلترهایی که از لحاظ ریاضی با عملگرهای زیر داده می‌شوند، عبور می‌کنند:

$$T_{right}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{\beta/\alpha}\end{bmatrix}, \quad (۲۳)$$

و

$$T_{left}=\begin{bmatrix}\sqrt{\beta/\alpha} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad (۲۴)$$

که T_{right} و T_{left} به ترتیب روی ذرات سمت راست و چپ اثر می‌کنند. بعد از اعمال این ماتریس‌ها روی حالت کوانتومی داده شده در معادلهٔ (۱۷)، حالت زیر حاصل می‌شود:

$$\rho_{filter}(\lambda,\alpha)=\frac{1}{N}\begin{bmatrix}2\lambda\alpha\beta\rho_{singlet}\\ +\frac{1}{2}(1-\lambda)(\rho_{\psi_{00}}+\rho_{\psi_{11}})\end{bmatrix}, \quad (۲۵)$$

به راحتی می‌توان نشان داد که M_ρ مربوط به این حالت به صورت زیر در می‌آید:

$$M_{\rho_{filter}}(\lambda,\alpha,\beta)=Max[\frac{1}{N^2}(4\lambda^2\alpha^2\beta^2+(1-\lambda-2\lambda\alpha\beta)^2),\frac{8\lambda^2\alpha^2\beta^2}{N^2}], \quad (۲۶)$$

که $N=\lambda(2\alpha\beta-1)+1$. در مقالهٔ [۱۴] نشان داده شده است که به ازای بعضی از مقادیر α، این گونه فیلتر کردن باعث نمایان شدن ناموضعیت در بازهٔ بزرگ‌تری از مقادیر λ می‌شود. از آنجایی که مطابق با رابطهٔ (۶)، نمایان شدن ناموضعیت به معنی غیر صفر شدن پارامتر B_ρ است، برای حالت‌های کوانتومی داده شده در معادلات (۱۷) و (۲۳)، B_ρ را برای نمونه به ازای $\alpha=\cos\theta$ و $\theta=\frac{\pi}{9}$ در شکل ۲رسم کرده‌ایم. این نمودار نشان می‌دهد که این امکان وجود دارد که در بازه‌ای از پارامتر λ که قبل از فیلتر کردن ناموضعیت در آن دیده نمی‌شد، بر اثر فیلتر کردن نمایان می‌شود.

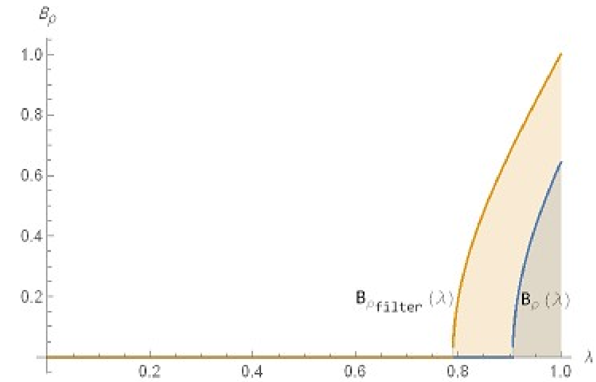
حال کمیت شباهت متناظر با ρ و ρ_{filter} را با هم مقایسه می‌کنیم. با استفاده از رابطهٔ (۱۰) با یک محاسبهٔ ساده می‌توان نشان داد که کمیت شباهت متناظر با ρ و ρ_{filter} به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$F_\rho=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\left(4\lambda\alpha\beta+|2\lambda-1|\right)\right), \quad (۲۷)$$

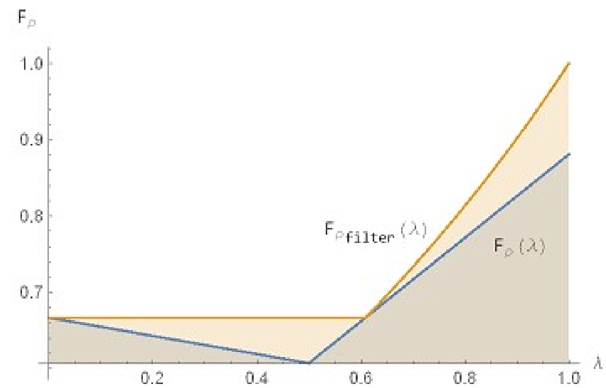
و

$$F_{\rho_{filter}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2N}(4\lambda\alpha\beta+|1-\lambda-2\lambda\alpha\beta|)\right), \quad (۲۸)$$

در شکل ۳ این دو کمیت را به ازای $\theta=\frac{\pi}{9}$ با هم مقایسه کرده‌ایم. همان گونه که ملاحظه می‌شود میزان موفقیت فرابرد کوانتومی به‌جز یک نقطه بقیه جاها افزایش می‌یابد. به عبارت



شکل ۲. (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) نمودار ناموضعیت حالت ژیسن قبل از فیلتر شدن B_ρ و بعد از فیلتر شدن $B_{\rho_{filter}}$ بر حسب λ.



شکل ۳. (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) نمودار کمیت شباهت حالت ژیسن قبل فیلتر شدن F_ρ و بعد از فیلتر شدن $F_{\rho_{filter}}$ بر حسب λ.

دیگر فیلترهای موضعی می‌توانند میزان موفقیت فرابرد کوانتومی را افزایش دهند.

۵. بحث و نتیجه‌گیری

اگر ماتریس چگالی یک سیستم متشکل از چند زیر سیستم را نتوان به صورت ترکیب محدب از حاصل ضرب تانسوری ماتریس چگالی زیر سیستم‌های تشکیل دهندهٔ آن نوشت، اصطلاحاً گفته می‌شود درهم تنیدگی وجود دارد. برای آنسامبل خالص قضیهٔ بل همیشه توسط حالت‌های درهم تنیده نقض می‌شود و به عبارت دیگر ناموضعیت نمایان می‌شود. ولی برای حالت‌های درهم آمیخته ممکن است با وجود درهم تنیدگی نامساوی بل نقض نشود. از طرف دیگر جای دیگری که ناموضعیت تجلی پیدا می‌کند در انجام شیوه‌نامهٔ فرابرد کوانتومی است؛ هر چند که نحوهٔ بروز آن متفاوت است. در فرابرد کوانتومی هر کانال کوانتومی که کمیت شباهت بیش از $\frac{۲}{۳}$، که حد بالای کمیت شباهت برای کانال‌های کلاسیکی است، بدهد بیانگر آن است که ناموضعیت داشته است. در این مقاله، ما ابتدا برای حالت ورنر ناموضعیت‌های نمایانگر شده در نامساوی *CHSH* و فرابرد کوانتومی را باهم مقایسه کردیم. در این مورد دیدیم که در بازهٔ ۰٫۷۱ > p > ۰٫۷۴ نامساوی *CHSH* نقض می‌شود ولی کمیت شباهت کمتر از حد بالای کمیت شباهت متناظر با حالت‌های قابل شبیه‌سازی با نظریه‌های متغیر نهان است (شکل ۱ را ببینید). در ادامه کمیت شباهت متناظر با حالت‌هایی که ناموضعیت پنهان دارند را بررسی کردیم. این حالت‌ها در ابتدا نامساوی بل را نقض نمی‌کنند ولی بعد از فیلتر شدن بر اثر برهم‌کنش با محیط، این نامساوی را نقض می‌کنند. برای حالت‌هایی که در مقالهٔ [۱۴] معرفی شده‌اند، فیلتر کردن علاوه بر

افزایش بازهٔ نقض نامساوی *CHSH*، میزان کمیت شباهت را نیز افزایش می‌دهد (به ترتیب شکل‌های ۲ و ۳ را ببینید).

تشکر و قدردانی

نویسندگان از آقای دکتر رزمی به دلیل نظرهای تکمیلی و بحث‌های مؤثر ایشان تشکر می‌کنند.

مراجع

1. A Einstein, B Podolsky, and N Rosen, *Phys. Rev.* **47**, no. 10 (1935) 777.
2. S John Bell, *Physics Physique Fizika* **1** (1964) 195.
3. A Aspect, P Grangier, and G Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 91.
4. V Vedral, Martin B Plenio, Michael A Rippin, and Peter L Knight, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 2275.
5. Reinhard F Werner, *Phys. Rev.* A **40** (1989) 4277.
6. A Peres, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 1413.
7. C Bennett, G Brassard, C Crepeau, R Jozsa, A Peres, and W K Wootters, *Phys. Rev. Lett*. **70** (1993) 1895.
8. S Massar and S Popescu, *Phys. Rev. Lett*. **74** 1259 (1995)
9. S Popescu, *Phys. Rev. Lett*. **72** (1994) 797.
10. N Gisin, *Phys. Lett*. A **210** (1996) 157.
11. R Horodecki, M Horodecki, and P Horodecki, *Phys. Lett*. A **222** (1996) 21.
12. E Chitambar, and G Gour. *Rev. of Mod. Phys*. 91. **2** (2019) 025001.
13. R Horodecki, M Horodecki, and P Hovodecki, *Phys. Lett*. A **200** (1995) 340.
14. N Gisin, *Phys. Lett*. A **210** (1996) 151.
15. N Brunner, D Cavalcanti, S Pironio, V Scarani, and S Wehner, *Rev. Mod. Phys*. **86** (2014) 419.
16. R Gallego and L Aolita, *Phys. Rev.* A **95** (2017) 032118.
17. S G A Brito, B Amaral, and R Chaves, *Phys. Rev*. A **97** (2018) 022111.
18. J I De Vicente, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **47,** 42 (2014) 424017.
19. M Horodecki, R Horodecki, and P Horodecki (1996) 9605038.