

سیاه‌چاله‌های منظم گوسی در گرانش مجذوری محض

بهرز ملک الکلامی

گروه فیزیک، دانشگاه کردستان، سنندج

پست الکترونیکی: b.malakolkalami@uok.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۱۲/۲۳؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۲/۰۵/۰۷)

چکیده:

همانطور که می‌دانیم، سیاه‌چاله‌های منظم به فضا-زمان‌هایی اطلاق می‌شود که در عین داشتن افق (اتفاق)، عاری از تکینگی‌های اساسی (ذاتی) هستند. سیاه‌چاله‌های گوسی یک نوع مهم از سیاه‌چاله‌های منظم‌اند که دسته‌ای از جواب‌های استاتیک متقارن کروی معادلات اینشتین در حضور ثابت کیهان‌شناسی هستند. فضا-زمان‌های مربوط به این سیاه‌چاله‌ها می‌توانند مجانباً دوسپته و یا پاد-دوسپته باشند. آنها خواص جالب و ویژه‌ای داشته که تا حدودی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته‌اند. در کار حاضر، خواص مقدماتی این سیاه‌چاله‌ها در گرانش تعمیم یافته مجذوری محض مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده می‌شود با انتخاب شرایط مرزی مناسب می‌توان علاوه بر فضا-زمان‌های مجانباً دوسپته و پاد-دوسپته، فضا-زمان‌های مجانباً تخت را نیز تولید کرد. نکته مهم در این میان این است که این جواب‌ها (برخلاف گرانش اینشتینی) بدون حضور ثابت کیهان‌شناسی تولید می‌شود. این موضوع از این جنبه مهم است که علی‌رغم نامعلوم بودن منشأ ثابت کیهان‌شناسی، منشأ آن را مادی می‌دانند ولی در نوشتار حاضر سعی بر نشان دادن یک منشأ هندسی به جای یک منشأ مادی یا فیزیکی برای آن است. در ضمن مقایسه این جواب‌های سیاه‌چاله‌های با هم‌تای گرانش اینشتینی و در بحث ترمودینامیکی با جواب شوارتسشیلد، نشان دهنده برتری‌های نسبی این مدل گرانشی است.

واژه‌های کلیدی: سیاه‌چاله، گرانش تعمیم یافته، فضا-زمان‌های مجانباً تخت و (پاد) دوسپته، توزیع گوسی

۱. مقدمه

سیاه‌چاله در سال ۲۰۱۵ که با نام اختصاری GW150914 شناخته می‌شود، انگیزه و هیجانی مضاعف برای مطالعه سیاه‌چاله‌ها ایجاد کرده است [۱]. از این‌رو، مطالعات نظری بر روی آنها می‌تواند اهمیت بسزایی در تکمیل و بسط مفاهیم مربوطه داشته باشد. همانگونه که می‌دانیم، بزرگ‌ترین موفقیت‌هایی که در تحقیقات حوزه سیاه‌چاله‌ای انجام گرفته، متعلق به نظریه پردازانی بزرگ مانند استیفن هاوکینگ دانشمند مشهور بریتانیایی است.

از بخش‌های مهم مطالعات نظری یافتن جواب‌های دقیق برای فضا-زمان‌های مربوط به سیاه‌چاله‌ها است که می‌تواند به درک بهتری از آنها در انطباق با قوانین جهان فیزیکی منجر شود. کارهای ارزشمندی از این دست چه در حوزه نسبیت

سیاه‌چاله‌ها از جمله اجرام کیهانی‌اند که با وجود نداشتن مشاهدات رصدی مستقیم و قوی، زمینه‌ای جذاب و مستعد برای مطالعه و تحقیق در مباحث اختر فیزیکی و گرانشی دارند. دلیل این امر آن است که اولاً سیاه‌چاله‌ها توسط نظریه نسبیت عام پیش‌بینی شده‌اند و دوماً از دیدگاه مشاهداتی رفتار بسیاری از اجرام سماوی که به طور مستقیم رصد می‌شوند، تنها با وجود اجرامی مانند سیاه‌چاله توجیه‌پذیر است و اینها را می‌توان به نوعی گواه رصدی غیرمستقیم برای سیاه‌چاله‌ها دانست. البته به‌جز اجرام سماوی و برخی دیگر از مشاهدات رصدی غیرمستقیم، آشکارسازی امواج گرانشی ناشی از برخورد دو

عمل می‌کند و ضریب توان مرتبه اول را می‌توان توسط گرانش اینشتینی مقید کرد. همچنین ضریب توان مرتبه دوم نیز به بهترین وجه توسط اندازه‌گیری نیروی پنجم محدود و به کارگرفته می‌شود.

در نوشتار حاضر نیز تابعی فقط از توان درجه دوم از نرده‌ای ریچی برای مطالعه و بررسی جواب‌های (منظم) مربوطه در نظر گرفته شده که در بخش بعد به آن می‌پردازیم (این مدل را گاهی گرانش تعمیم یافته مجذوری محض می‌نامند).

در حال حاضر برای آشنایی بیشتر خواننده با مفهوم سیاه‌چاله منظم، شرحی بسیار مختصر و کلی از آن و اهمیتش از دیدگاه فیزیکی و نظری در زیر آورده شده است.

نظریه سیاه‌چاله‌ها همانند بسیاری از مدل‌های کیهان‌شناسی و گرانشی از مفهومی به نام تکینگی رنج می‌برد، چون تکینگی به نوعی به واگرایی (بی‌نهایت) در کمیت‌های فیزیکی و هندسی اشاره دارد. به عنوان مثال، در نظریه انفجار بزرگ با صفرشدن عامل مقیاس، چگالی انرژی بی‌نهایت می‌شود یا در سیاه‌چاله شوارتزشیلد انحنا هندسی فضا-زمان در مرکز سیاه‌چاله دچار واگرایی است. برای رفع این مشکل دو پیشنهاد مطرح است:

اول این که قوانین فیزیک کلاسیک در ریز مقیاس (مقیاس‌های پلانک) دیگر اعتبار نداشته و باید اصلاح شوند و در حال حاضر یکی از راه‌های حل این مشکل، توسل به گرانش کوانتومی است.

دومین پیشنهاد بر این فرض مبتنی است که اصولاً در جهان فیزیکی تکینگی وجود نداشته و ظهور آنها در مدل‌های فیزیکی به دلیل فرض‌های نادرست اولیه در این مدل‌هاست. به عنوان مثال در سیاه‌چاله شوارتزشیلد فرض توزیع جرم نقطه‌ای منجر به فضا-زمان تکیندار می‌شود. به طور مشخص در اینجا می‌دانیم که از نظر فیزیکی توزیع جرم نقطه‌ای واقعاً در جهان فیزیکی وجود ندارد و لذا تکینگی فضا-زمان هم یک محصول تصنعی مدل می‌باشد. بر این اساس بی‌نهایت شدن کمیت‌ها از نظر فیزیکی توجیه پذیر نبوده و لذا پرهیز از تکینگی در نظریات و مدل‌های فیزیکی می‌تواند از مقبولیتی منطقی برخوردار باشد. مباحث سیاه‌چاله‌ای هم از

عام و چه در حوزه گرانش‌های تعمیم یافته انجام شده است که به دلیل شمار زیاد و دسترسی آسان به آنها و همچنین عدم نیاز، از ذکر منابع خودداری می‌شود. این جواب‌ها از ساده‌ترین آنها یعنی شوارتزشیلد تا سیاه‌چاله‌های باردار و چرخان و انواع دیگر را در بر می‌گیرد. یکی دیگر از جنبه‌های اهمیت مطالعات نظری این است که نظریه نسبیت عام فقط در توضیح پدیده‌های گرانشی کوتاه برد (مانند منظومه شمسی) موفق بوده است. بنابراین مطالعات نظری چه در گرانش اینشتینی و چه در نظریات گرانشی می‌تواند زمینه اولیه برای طرح آزمون‌های بلند برد به شمار آید. به‌ویژه این که سیاه‌چاله‌ها جزو پدیده‌های گرانش بلند برد بوده، ممکن است یک مدل گرانشی در کوتاه برد در مقایسه با گرانش اینشتینی موفق عمل نکند ولی در بلندبرد وضعیت معکوس شود.

نظریات گرانشی تعمیم یافته در اصل برای رفع نواقص نسبیت عام در مقیاس‌های فزونی و فرابنفش مورد توجه قرار گرفتند. یکی از مشهورترین و شاید مهم‌ترین آنها، نظریه $F(R)$ است که قسمت هندسی کنش گرانشی مربوطه فقط تابعی از نرده‌ای ریچی R است. از مراجع نسبتاً مهم در این زمینه می‌توان به عنوان نمونه به [۲] اشاره کرد. بدیهی است که هر تابعی از R را نمی‌توان برای تجزیه و تحلیل مسائل مربوطه به کار گرفت، زیرا تابع مورد نظر باید با مشاهدات رصدی و برخی دیگر از پارامترهای موجود سازگاری داشته باشد. به عنوان مثال مدل ستاروبینسکی که در آن تابعی درجه دو به صورت

$$F(R) = R + \beta R^2$$

در کیهان‌شناسی تورمی در نظر گرفته می‌شود (β یک ثابت است)، از مدل‌های موفقی است که درجه بالایی از سازگاری با شواهد رصدی را دارد [۳].

به طور کلی مدل‌های توانی (به صورت R^n) از اهمیت ویژه‌ای به دلیل حضور در بسط (سری) ماکلورن تابع یعنی

$$F(R) = a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + \dots$$

برخوردارند. ضرایب ثابت موجود در سری را می‌توان از طریق مشاهدات یا محاسبات نظری مقید کرد. به عنوان مثال در سری فوق، جمله مرتبه صفر همانند ثابت کیهان‌شناسی

کرد، در صورتی که کنش (۱) در حالت $\alpha = 0$ بیانگر نظریه‌ای فاقد چنین محصولاتی است و یکی از دلایل انتخاب مدل مجذوری محض برای کار حاضر نیز همین است. بنابراین با داشتن قسمت هندسی برای کنش مورد نظر، ساده‌ترین شکل کنش در گرانش مجذوری در حضور میدان مادی را که توسط چگالی لاگرانژی مادی L_{matter} داده می‌شود به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$S = \int (\beta R^\nu + L_{matter}) \sqrt{-g} dx^\nu. \quad (2)$$

در محاسبات بعدی، ضریب عددی β برابر واحد در نظر گرفته می‌شود؛ زیرا همانگونه که معادلات میدان نشان خواهند داد، انتخاب هر مقدار دیگری برای این ضریب عددی معادل یک تغییر مقیاس در جرم سیاه‌چاله است.

در مدل ما، لاگرانژین مادی توسط یک توزیع گوسی از یک سیال مادی غیر تکین ایستا و ناهمسانگرد داده می‌شود که با گرفتن وردش از لاگرانژین مادی، مؤلفه‌های غیر صفر تانسور انرژی-تنگانه به صورت زیر به دست می‌آیند [۷]:

$$T_\nu^\nu = T_1^1 = -\rho(r), \quad (3)$$

$$T_r^\nu = T_\nu^r = -\rho(r) - \frac{r}{2} \frac{\partial \rho(r)}{\partial r},$$

که تابع چگالی گوسی به صورت زیر داده می‌شود:

$$\rho(r) = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi\alpha^3} e^{-\frac{r}{\alpha}} = \rho_0 e^{-\frac{r}{\alpha}}, \quad (4)$$

که در آن M جرم کل توزیع و α که برابر نصف واریانس توزیع است، پارامتری است که می‌تواند اثرات ناجابه‌جایی را در فضا-زمان شبیه‌سازی و یا تقلید کند. لازم به یادآوری است که توزیع گوسی بالا در حد $\alpha \rightarrow 0$ یک توزیع جرم نقطه‌ای را به نمایش می‌گذارد که میدان گرانشی آن همانند میدان شوارتزشیلد با جرم نقطه‌ای مرکزی M است.

در اینجا مناسب است قبل از به دست آوردن معادلات میدان و جواب‌های مربوطه در گرانش مجذوری در حضور منبع گوسی، به سراغ جواب‌های سیاه‌چاله‌ای منظم متناظر در گرانش اینشتین که شامل ثابت کیهان‌شناسی است برویم. هدف از این کار، مقایسه آنها با جواب‌های متناظر در دو گرانش مذکور است که تا حد زیادی نقاط ضعف و قوت آنها را مشخص می‌کند.

این قاعده مستثنی نبوده و سیاه‌چاله‌های بدون تکینگی (اساسی) توانسته‌اند توجه بسیاری از محققین و پژوهشگران را به خود جلب کنند. وجه تسمیه منظم به معنای نداشتن تکینگی اساسی است. بنابراین بدیهی است، همانگونه که وجود سیاه‌چاله‌های تکیندار (نامنظم) اولین بار توسط نظریه نسبیت عام پیش‌بینی شد و طیف وسیعی از جواب‌ها برای معادلات اینشتین و گرانش‌های (تعمیم یافته) دیگر به دست آمد، جواب‌ها و خواص سیاه‌چاله‌های منظم نیز باید در بستر گرانش‌های اینشتینی و تعمیم یافته مورد مطالعه و بررسی قرار بگیرند.

در پایان این بخش خلاصه‌ای از اهداف کلی بخش‌های بعدی بیان شده است.

در بخش دوم مدل گرانش تعمیم یافته مجذوری محض معرفی شده و جواب‌های سیاه‌چاله‌ای منظم در گرانش اینشتین (برای مقایسه‌های بعدی) نیز آورده شده است. در بخش سوم، جواب‌های فضا-زمانی منظم در گرانش تعمیم یافته مجذوری محض به دست آورده می‌شود. در بخش چهارم با استفاده از نتایج بخش سوم در مورد جواب‌های سیاه‌چاله‌ای مشخص شده و برخی خصوصیات اولیه آنها مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. در بخش پنجم نیز خواص ترمودینامیکی مقدماتی جواب‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش پایانی نیز، اهم نتایج آورده شده است.

۲. معرفی مدل

برای شروع بحث، ابتدا به معرفی یک کنش در گرانش تعمیم یافته مجذوری می‌پردازیم که کلی‌ترین شکل مقیاس-ناوردا در نظریه گرانش مجذوری است و به کنش وایل-ادینگتون مشهور است [۴-۶]:

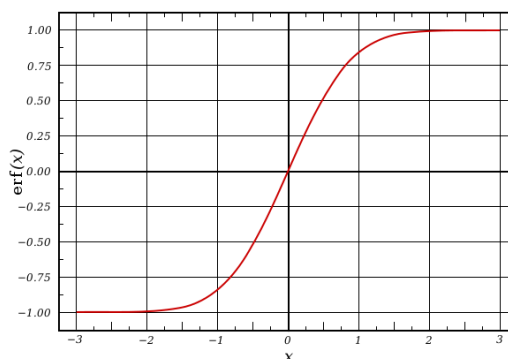
$$S = \int (\alpha C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} + \beta R^\nu) \sqrt{-g} dx^\nu, \quad (1)$$

که در آن $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ تانسور وایل، α و β ثابت و g دترمینان متریک مربوطه در شکل ماتریسی است. در کنش (۱) حالت $\beta = 0$ متناظر با گرانش وایل یا همان نظریه گرانش همدیس است که مثالی از نظریه چهار-مشتقی است. از مشکلات این نظریه می‌توان به داشتن درجات آزادی از شبیح (Ghost) اشاره

که در آن C یک ثابت انتگرال گیری است. بدیهی است برای داشتن جواب منظم (در مبدأ) این ثابت را باید برابر صفر قرار داد. همچنین در جواب (۶) تابع خطا به صورت زیر تعریف می شود:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

که تابعی پیوسته و محدود (بین منفی یک و یک) است و نمودار آن در شکل ۱ رسم شده است.



شکل ۱. نمودار تابع خطا.

۳. جواب های فضا-زمانی منظم گوسی در گرانش مجذوری محض

در اینجا ابتدا معادلات کلی میدان در گرانش تعمیم یافته $F(R)$ معرفی شده و سپس آنها را برای مدل گرانش مجذوری محض در حضور توزیع گوسی به کار گرفته و جواب های فضا-زمانی مربوطه به دست آورده می شوند. یکی از خصوصیات مهم این جواب ها این است که آنها هم می توانند مجانباً تخت و هم مجانباً دوسپته و یا پاد-دوسپته باشند. به جز این، همانند گرانش اینشتین جواب های مذکور می توانند تکین و یا غیر تکین هم باشند ولی همچنان که خواهیم دید، برخلاف گرانش اینشتین، بدون وجود ثابت کیهان شناسی در معادلات میدان گرانش تعمیم یافته، جواب ها از تنوع بیشتر و همچنین قابلیت بالاتری در مواجهه با شرایط فیزیکی و مرزی برخوردارند.

کنش کلی در نظریه $F(R)$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$S = \int (F(R) + L_{matter}) \sqrt{-g} dx^4,$$

معادلات میدان در این گرانش تعمیم یافته با گرفتن وردش از

کنش بالا به صورت زیر به دست آورده می شوند [۲ و ۸]:

$$F'(R)R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{4} F(R)g_{\nu}^{\mu} \quad (7)$$

$$- (\nabla^{\mu} \nabla_{\nu} - g_{\nu}^{\mu} \square) F'(R) = T_{\nu}^{\mu},$$

که پریم نشان دهنده مشتق نسبت به نرده ای انحنای است. با جایگذاری تابع مجذوری کنش (۲) یعنی:

$$F(R) = \beta R^{\gamma}$$

در معادله (۷) خواهیم داشت:

۲.۱. جواب سیاه چاله منظم گوسی در گرانش اینشتین

در این زیر بخش به معرفی جواب های منظم برای توزیع گوسی در گرانش اینشتینی می پردازیم، زیرا برای مقایسه های بعدی با جواب های متناظر در گرانش تعمیم یافته به آنها نیاز داریم. جواب ها در گرانش اینشتین در حضور ثابت کیهان شناسی به دست آمده و برخی خواص ترموفیزیکی آن (در حالت پاد-دوسپته) مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. خواننده می تواند برای مطالعات بیشتر به [۷] مراجعه کند.

کنش در گرانش اینشتین به صورت:

$$S = \int (R - 2\Lambda - L_{gauss}) \sqrt{-g} dx^4,$$

است که در آن L_{gauss} چگالی لاگرانژی برای توزیع گوسی و Λ ثابت کیهان شناسی است. همانطور که می دانیم با وردش کنش معادلات میدان اینشتین به صورت زیر به دست می آیند:

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{4} Rg_{\nu}^{\mu} + \Lambda g_{\nu}^{\mu} = T_{\nu}^{\mu},$$

که مؤلفه های تانسور انرژی-تکانه در طرف راست توسط معادلات (۳) و (۴) داده می شوند. با در نظر گرفتن جواب ایستا و مقارن کروی

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (5)$$

برای متریک فضا-زمان و جایگذاری در معادلات میدان، جواب تابع مجهول متریک در (۵) به صورت زیر خواهد بود [۷]:

$$f(r) = 1 + \frac{C}{r} - \frac{1}{3} \Lambda r^2 + \frac{M}{4\pi^{3/2} \sqrt{\alpha}} e^{\frac{r^2}{4\alpha}} - \frac{M}{4\pi r} erf\left(\frac{r}{2\sqrt{\alpha}}\right), \quad (6)$$

(معادله با طرف راست صفر) را به دست آورد که با حل مستقیم و یا جایگذاری می‌توان نشان داد، دو تابع زیر جواب معادله همگن هستند:

$$f_1^h(r) = 1 + \frac{C_1}{r} + \frac{D_1}{r^2}, \quad (12)$$

$$f_2^h(r) = 1 + \frac{C_2}{r} + D_2 r^2,$$

که در آنها C_i و D_i ثابت‌های انتگرال‌گیری‌اند. شاخص h در جواب‌های (۱۲) به معنای همگن است. اکنون برای به دست آوردن جواب عمومی (۱۰) باید یک جواب خصوصی آن را نیز یافت تا به جواب همگن افزوده شود. برای یافتن جواب خصوصی، معمولاً از روش رونسکین (که با روش نرم افزاری سریع‌تر قابل انجام است) استفاده می‌شود. نهایتاً با یافتن جواب خصوصی و افزودن آنها به جواب‌های همگن، دو جواب عمومی برای ضریب متریک به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$f_1(r) = 1 + \frac{C_1}{r} + \frac{D_1}{r^2} + \frac{10M\alpha}{(4\pi\alpha)^{\frac{2}{3}}} re^{-\frac{r}{\alpha}} \quad (13)$$

$$+ \frac{40M\alpha^{\frac{1}{3}}}{(4\pi\alpha)^{\frac{2}{3}}} e^{-\frac{r}{\alpha}} - \frac{M}{4\pi} \left(1 + \frac{r}{\alpha}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{r}{\sqrt{4\alpha}}\right),$$

$$f_2(r) = 1 + \frac{C_2}{r} + D_2 r^2 + \frac{6M\alpha}{(4\pi\alpha)^{\frac{2}{3}}} re^{-\frac{r}{\alpha}} \quad (14)$$

$$+ \frac{16M\alpha^{\frac{1}{3}}}{(4\pi\alpha)^{\frac{2}{3}}} e^{-\frac{r}{\alpha}} - \frac{M}{8\pi\alpha} \left(2\alpha + \frac{r^2}{3}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{r}{\sqrt{4\alpha}}\right),$$

ثابت‌های انتگرال‌گیری C_i و D_i با استفاده از شرایط مرزی تعیین می‌شوند. این شرایط برای مسئله مورد نظر ما باید فضا-زمانی منظم (غیر تکین) در مبدأ را به دست دهد. به همین دلیل، به رفتار توابع (۱۳) و (۱۴) در نزدیکی مبدأ نیاز خواهیم داشت. برای این منظور بسط ماکلورن تابع خطا و تابع نمایی در زیر آورده شده است:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} =$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \dots \right),$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \dots$$

$$\beta \begin{pmatrix} 2RR_v'' - \frac{1}{2}R^2 g_v'' \\ -2(\nabla^{\mu}\nabla_{\nu} - g_{\nu}^{\mu}\square^2)R \end{pmatrix} = T_v^{\mu}, \quad (8)$$

همانگونه که پیداست، می‌توان طرفین معادله (۸) را بر β تقسیم کرد که با توجه به مؤلفه‌های تانسور انرژی-تکانه در (۳)، این کار معادل یک تغییر مقیاس در جرم است، یعنی $M \rightarrow \frac{M}{\beta}$ بنابراین همانگونه که گفته شد، در محاسبات بعدی β را برابر واحد فرض می‌کنیم.

در ادامه، همانند گرانش اینشتینی با در دست داشتن تانسور انرژی-تکانه گوسی و در نظر گرفتن شکل متقارن کروی (۵) برای متریک فضا-زمان، می‌توان معادلات میدان را برای تابع مجهول متریک حل کرد. برای این منظور مؤلفه صفر-صفر معادله (۸) را در نظر می‌گیریم:

$$2RR_v'' - \frac{1}{2}R^2 - 2(\nabla^{\mu}\nabla_{\nu} - \square^2)R = T_v^0. \quad (9)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود در سمت چپ معادله بالا نرده‌ای ریچی و مؤلفه صفر-صفر آن ظاهر شده‌اند که با یک محاسبه نرم افزاری (یا دستی) می‌توان آنها را برای متریک (۵) به صورت زیر به دست آورد:

$$R = \frac{2 - r^2 f'' - 4rf' - 2f}{r^2}, \quad (10)$$

$$R_v^0 = -\frac{1}{2r}(rf'' + 2f').$$

اکنون با جایگذاری آنها در سمت چپ معادله (۸) و مؤلفه صفر-صفر تانسور انرژی-تکانه (۳) در سمت راست و انجام محاسبات و ساده‌سازی به معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر برای ضریب متریک مجهول در (۵) می‌رسیم:

$$\begin{aligned} f'''' + \frac{8ff''}{r} + \frac{8f''^2}{r^2} + \frac{2ff''}{r^2} + \frac{4ff'}{r^2} \\ - \frac{2f''}{r^2} - \frac{4f'}{r^2} - \frac{r^2 f''''}{2} - 4rff'' \\ - 2ff'' + 2f'' - \frac{8ff'}{r} + \frac{8f'}{r} + \frac{4f}{r^2} \\ - 8f'' - \frac{2}{r^2} = -\frac{M}{(4\pi\alpha)^{\frac{2}{3}}} e^{-\frac{r}{\alpha}}. \end{aligned} \quad (11)$$

برای حل معادله اخیر، ابتدا باید جواب معادله همگن متناظر آن

بعد از ساده کردن عبارت فوق می‌توان دید، به جز C_1 دو ضریب دیگر از $\frac{1}{r}$ وجود دارد که ناشی از بسط تابع نمایی و تابع خطا در جملات دوم و سوم هستند. نهایتاً پس از ساده کردن، ضریب جمله $\frac{1}{r}$ برابر می‌شود با:

$$C_1 + \frac{\sqrt{2M\alpha}}{\pi^{3/2}},$$

که برای منظم بودن جواب در مبدأ باید آن را صفر کرد و در نتیجه:

$$C_1 = -\frac{\sqrt{2M\alpha}}{\pi^{3/2}}.$$

با تکرار فرایند مشابه (حدگیری در مبدأ) و استفاده از بسط‌های ماکلورن توابع خطا و نمایی، می‌توان دید که صفر کردن ضریب نهایی $\frac{1}{r}$ در جواب (۱۴) منجر به

$$C_1 = -\frac{\sqrt{2M\alpha}}{\pi^{3/2}},$$

می‌شود.

با قراردادن مقادیر ثابت‌های فوق در (۱۳) و (۱۴)، نهایتاً این جواب‌ها به شکل زیر در می‌آیند:

$$f_1(r) = 1 + \left(\frac{M\sqrt{\alpha}}{\pi^{3/2}} \right) \frac{\delta e^{-\frac{r^2}{4\alpha}} - 2}{r} + \frac{5M}{4\pi^{3/2}\sqrt{\alpha}} r e^{-\frac{r^2}{4\alpha}} \quad (15)$$

$$- \frac{M}{4\pi} \left(1 + \frac{12\alpha}{r^2} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{r}{\sqrt{4\alpha}} \right),$$

$$f_2(r) = 1 + \left(\frac{\sqrt{2M\alpha}}{\pi^{3/2}} \right) \frac{e^{-\frac{r^2}{4\alpha}} - 1}{r}$$

$$+ \frac{3M}{4\pi^{3/2}\sqrt{\alpha}} r e^{-\frac{r^2}{4\alpha}} + Dr^2 \quad (16)$$

$$- \frac{M}{8\pi\alpha} \left(12\alpha + \frac{r^2}{3} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{r}{\sqrt{4\alpha}} \right),$$

که در معادله آخر جهت اختصار $D_1 = D$ گرفته شده است. این ثابت دلخواه (همچنان که خواهیم دید)، در تعیین جمله کیهان‌شناختی (فضای مجانباً دوسپته و پاد-دوسپته) نقش مهمی خواهد داشت. قبل از پایان این بخش توجه خواننده را به نکته زیر در مورد جواب‌های (۱۵) و (۱۶) جلب می‌کنیم:

همانگونه که دیده می‌شود در حد $x \rightarrow 0$ ، تابع خطا با x متناسب است و همانطور که خواهیم دید این خاصیت در منظم سازی سیاه‌چاله نقش مهمی ایفا می‌کند. قبل از پرداختن به این موضوع یادآوری می‌شود که جواب‌های همگن در (۱۲) به ترتیب جواب‌های رایزنر-نوردشترم و دوسپته-شوارتسشیلد هستند. دقت کنید که جواب‌های فوق، جواب‌های خلأ در گرانش مجذوری محض هستند که در عین تکین بودن (که ناشی از وجود توان‌های صحیح منفی برای r است)، رفتار مجانبی آنها به ترتیب مشابه (۱۳) و (۱۴) است. در واقع یکی دیگر از مزیت‌های این مدل از گرانش مجذوری، تولید جواب‌های آشنای (۱۳) و (۱۴) بدون وجود جرم و بار (نقطه‌ای) است. برای بررسی و مطالعه بیشتر در باره جواب‌های خلأ (سیاه‌چاله‌ای) گرانش مجذوری محض می‌توان به عنوان مثال به [۴] مراجعه کرد.

جواب‌های (۱۳) و (۱۴) برای توزیع جرم نقطه‌ای در هر صورت تکین هستند ولی همانطور که انتظار می‌رود برای یک توزیع جرم پیوسته (غیر نقطه‌ای)، جواب‌ها باید غیر تکین شوند و علی‌الظاهر باید ثابت‌های مربوطه (یعنی C_1 و D_1 و C_2) را صفر کرد. ولی خواهیم دید برخلاف گرانش اینشتینی، در صورت نگاه داشتن ضرایب $\frac{1}{r}$ (یعنی C_1 و C_2)، جواب‌ها (در مبدأ) غیر تکین می‌شوند. این مطلب را با کاربست شرایط مرزی می‌توان به صورت زیر نشان داد:

ابتدا در جواب (۱۳) قرار می‌دهیم $D_1 = 0$ و سپس ملاحظه می‌کنیم که در حالت حدی $r \rightarrow 0$ سه جمله زیر در آن غالب هستند، یعنی:

$$\frac{C_1}{r} + \frac{40M\alpha^2}{(4\pi\alpha)^{3/2}} \frac{1}{r} e^{-\frac{r^2}{4\alpha}} - \frac{M}{4\pi} \left(\frac{12\alpha}{r^2} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{r}{\sqrt{4\alpha}} \right).$$

با در نظر گرفتن بسط‌های ماکلورن تابع خطا و تابع نمایی (که در پایین معادله (۱۴) داده شده‌اند) عبارت بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{C_1}{r} + \frac{40M\alpha^2}{(4\pi\alpha)^{3/2}} \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r^2}{4\alpha} + \dots \right) - \frac{M}{4\pi} \left(\frac{12\alpha}{r^2} \right) \left(\frac{r}{\sqrt{4\alpha}} + \dots \right).$$

بودن مقادیر α و M به سادگی می‌توان دریافت که این متریک می‌تواند فضا-زمانی بدون افق و یا سیاه‌چاله‌ای با یک و حداکثر دو افق را توصیف کند. شکل ۲ نمودار ضریب متریک را برای هر سه حالت متناظر با سه مقدار متفاوت M نشان می‌دهد. البته باید در نظر داشت با انتخاب هر مقدار عددی برای M و α مقدار تابع در مبدأ منظم و برابر واحد است. دقت کنید که مختصه شعاعی افق در محل برخورد منحنی با محور افقی قرار دارد.

اکنون ضریب متریک (۱۶) در شکل ۳ را در نظر می‌گیریم که بسته به انتخاب ثابت کیهان‌شناسی (۱۷) می‌تواند هر سه فضا-زمان مجانبی را نمایش دهد. اگر مقدار ثابت کیهان‌شناسی Λ مثبت در نظر گرفته شود، یک فضا-زمان مجانباً دوسپته با یک (و فقط یک) افق را نمایش می‌دهد. به عبارت دیگر اگر ثابت کیهان‌شناسی (۱۷) مثبت در نظر گرفته شود فضا-زمان منتهی جبراً سیاه‌چاله‌ای است؛ در صورتی که همانطور که خواهیم دید، برای مقادیر صفر و منفی چنین اجباری وجود ندارد. برای این منظور نمودار هر سه حالت در شکل ۳ به همراه مقادیر متناظر برای ثابت D آورده شده است، به این معنی که سه مقدار انتخاب شده برای ثابت D در (۱۷) متناظر با سه مقدار مثبت، صفر و منفی برای Λ_α شده‌اند. در ضمن مقادیر انتخاب شده برای جرم و واریانس عبارتند از: پارامتر $\alpha = 1$ و $M = 3\pi$. همانگونه که دیده می‌شود و انتظار می‌رود منحنی مربوط به فضا-زمان مجانباً تخت (منحنی آبی) از نظر کیفی مانند منحنی‌های شکل ۲ است. منحنی‌های نارنجی و سبز به ترتیب مربوط به فضا-زمان‌های مجانباً دوسپته و پاد-دوسپته هستند. همانطور که گفته شد، در حالت دوسپته همواره فضا-زمان سیاه‌چاله‌ای است، زیرا همیشه (به ازای تمام مقادیر پارامترهای موجود) یک افق وجود دارد، در صورتی که در حالت‌های تخت و پاد-دوسپته با تغییر مقدار پارامترها می‌توان فضا-زمان‌های افق دار (سیاه‌چاله‌ای) و یا بدون افق داشت. منحنی‌های نمودار به ترتیب یک فضا-زمان مجانباً دوسپته (منحنی نارنجی)، یک فضا-زمان مجانباً تخت (منحنی آبی) و یک فضا-زمان پاد-دوسپته (منحنی سبز) را نمایش می‌دهند. مقادیر پارامتر α و M به ترتیب ۱ و 3π انتخاب شده‌اند.

جواب (۱۵) مجانباً تخت و جواب (۱۶) بسته به انتخاب ثابت و پارامترهای موجود می‌تواند مجانباً تخت، دوسپته و یا پاد-دوسپته باشد. برای درک بهتر این موضوع شکل مجانبی (۱۶) را در زیر آورده‌ایم:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f_r(r) = 1 - \frac{M}{4\pi} + \left(D - \frac{M}{24\pi\alpha} \right) r^2 = 1 - \frac{M}{4\pi} - \frac{1}{3} \Lambda r^2$$

که در آن ثابت کیهان‌شناختی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\Lambda = \Lambda(\alpha, M) = \frac{M}{8\pi\alpha} - 3D. \quad (17)$$

همانطور که دیده می‌شود واریانس توزیع گوسی و جرم کل در ثابت کیهان‌شناسی (۱۷) سهم دارند. در ضمن همانطور که گفتیم ثابت D دلخواه است که در مقایسه با جواب دوم در (۱۲)، حتی با صفر کردن آن مجدداً فضا-زمانی مجانباً دوسپته حاصل می‌شود. از طرف دیگر چون جرم کل و واریانس توزیع پارامترهای مثبت مقدارند، با انتخاب ثابت D می‌توان جمله کیهان‌شناختی را صفر، مثبت و یا منفی کرد که مقدار صفر متناظر با فضا-زمانی مجانباً تخت و دو مورد آخر به ترتیب متناظر با فضا‌های مجانباً دوسپته و پاد-دوسپته است.

۴. سیاه‌چاله منظم گوسی

مطلب اصلی در بحث کنونی تا اینجا، ارائه جواب‌های منظم (۱۵) و (۱۶) برای فضا-زمانی با متریک (۵) در حضور یک تابع توزیع گوسی بوده است. اکنون بحث خود را درباره این فضا-زمان برای حالتی که یک سیاه‌چاله (منظم) را توصیف می‌کند، ادامه می‌دهیم. شرط وجود سیاه‌چاله داشتن افق است که از صفر شدن ضرایب متریک به دست می‌آید. از ظاهر ضرایب متریک (۱۵) و (۱۶) چنان برمی‌آید که احتمال صفر شدن آنها در یک مختصه شعاعی وجود دارد. به همین خاطر و برای داشتن درک مناسب‌تری از رفتار این توابع، نمودار آنها بر حسب مختصه شعاعی را در شکل‌های ۲ و ۳ رسم کرده‌ایم. در رسم نمودارها، مقدار عددی برای نصف واریانس توزیع برابر واحد فرض شده است، یعنی:

$$\alpha = 1.$$

ابتدا ضریب متریک (۱۵) در شکل ۲ را در نظر می‌گیریم که فضا-زمانی مجانباً تخت را توصیف می‌کند. با توجه به مثبت

همانگونه که دیده می‌شود و انتظار می‌رود منحنی مربوط به فضا-زمان مجانباً تخت (منحنی آبی) از نظر کیفی مانند منحنی‌های شکل ۲ است. منحنی‌های نارنجی و سبز به ترتیب مربوط به فضا-زمان‌های مجانباً دوسپته و پاد-دوسپته هستند. همانطور که گفته شد، در حالت دوسپته همواره فضا-زمان سیاه‌چاله‌ای است، زیرا همیشه (به ازای تمام مقادیر پارامترهای موجود) یک افق وجود دارد، در صورتی که در حالت‌های تخت و پاد-دوسپته با تغییر مقدار پارامترها می‌توان فضا-زمان‌های افق دار (سیاه‌چاله‌ای) و یا بدون افق داشت. منحنی‌های نمودار به ترتیب یک فضا-زمان مجانباً دوسپته (منحنی نارنجی)، یک فضا-زمان مجانباً تخت (منحنی آبی) و یک فضا-زمان پاد-دوسپته (منحنی سبز) را نمایش می‌دهند. مقادیر پارامتر M و α به ترتیب ۱ و 3π انتخاب شده‌اند.

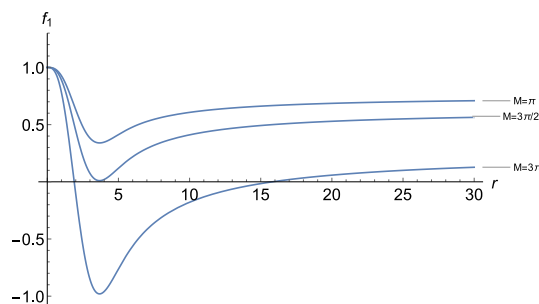
۴.۱. جرم سیاه‌چاله

همانطور که در بالا گفته شد، فضا-زمان توصیف شده توسط ضرایب متریک (۱۵) و (۱۶) زمانی سیاه‌چاله را به نمایش می‌گذارد که این ضرایب در نقطه (یا نقاطی) صفر شوند که مختصه شعاعی آن نقطه، همان افق سیاه‌چاله است که بحث آن انجام شد. همانگونه که ضرایب متریک (۱۵) و (۱۶) نشان می‌دهند، با صفر کردن آنها می‌توان جرم سیاه‌چاله را بر حسب شعاع افق نیز به دست آورد. از طرف دیگر چون جرم سیاه‌چاله یکی از پارامترهای مهم در سیاه‌چاله‌ها و به ویژه در بحث ترمودینامیکی است، بررسی رفتار آن می‌تواند مفید باشد.

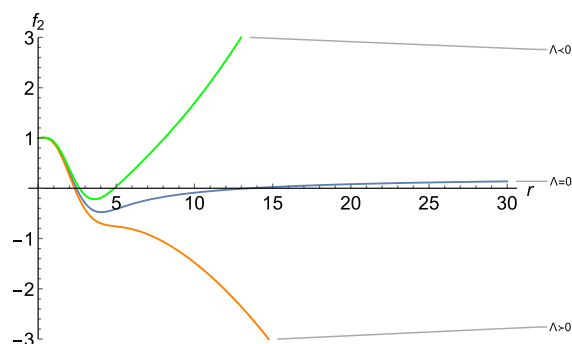
برای این منظور، اگر مختصه شعاعی افق را با r_+ نمایش دهیم، برای ضرایب متریک (۱۵) و (۱۶) داریم:

$$f(r_+) = 0.$$

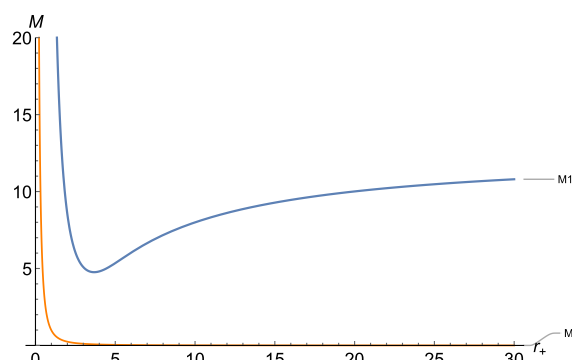
اکنون می‌توان جرم را (با انجام عملیات جبری ساده) برای هر دو ضریب متریک از معادله اخیر به صورت زیر به دست آورد. برای ضریب متریک (۱۵) نتیجه می‌شود:



شکل ۲. این شکل نمودار ضریب متریک (۱۴) بر حسب مختصه شعاعی را نمایش می‌دهد که به ازای سه مقدار جرم نشان داده شده در شکل و همچنین $\alpha = 1$ رسم شده است. محل برخورد منحنی‌ها با محور افقی همان مختصه شعاعی افق است. بنابراین ضریب متریک (۱۴) می‌تواند فضا-زمانی بدون افق ($M = \pi$) یا سیاه‌چاله‌ای با یک ($M = \frac{3\pi}{2}$) و حداکثر دو افق ($M = 3\pi$) را به نمایش بگذارد.



شکل ۳. این شکل نمودار ضریب متریک (۱۶) بر حسب مختصه شعاعی در سه حالت مقادیر مثبت، صفر و منفی برای جمله کیهان‌شناختی Λ را نشان می‌دهد که این سه مقدار متناظر با سه مقدار زیر برای ثابت D در معادله (۱۷) هستند: $(D=1/9)$ برای مثبت، $(D=1/8)$ برای صفر و $(D=1/7)$ برای مقدار منفی.



شکل ۴. این شکل نمودار دو تابع جرمی (۱۸) (منحنی آبی) و (۱۹) (منحنی نارنجی) را به ازای $\alpha=1$ نشان می‌دهد. برای تابع جرمی (۱۹) نیز مقدار $D=0$ در نظر گرفته شده است.

مشروط به فضا-زمان سیاه‌چاله‌ای است و در حالتی که ضریب متریک (۱۶) فضا-زمان بدون افق (سیاه‌چاله) را توصیف می‌کند چالشی وجود نداشته (چون ضریب متریک صفر نمی‌شود) و مباحث و نتایج بخش سوم همچنان معتبرند.

در پایان متذکر می‌شویم، تابع جرمی (۱۹) (منحنی نارنجی در شکل ۴) برای $D=0$ رسم شده است. به ازای $D > 0$ ، تابع جرم همواره منفی است که از نظر فیزیکی مردود است، ولی به ازای $D < 0$ جرم همواره مثبت و نمودار آن از نظر کیفی همانند مقدار $D=0$ است.

۵. ترمودینامیک

در این بخش به بررسی مختصری از خواص ترمودینامیکی جواب سیاه‌چاله‌ای که که توسط ضریب متریک (۱۵) بیان شده می‌پردازیم و دو مورد آنتروپی و دما را برای آن بررسی می‌کنیم.

۱.۵. آنتروپی

آنتروپی از مهم‌ترین کمیت‌ها در ترمودینامیک سیاه‌چاله‌ها است که در گرانش اینشتینی از فرمول هاوکینگ-بکنشتاین زیر به دست می‌آید:

$$S = A/4,$$

که در آن A مساحت افق سیاه‌چاله است. برای متریک‌های متقارن کروی مانند (۵)، مساحت افق برابر است با

$$A = 4\pi r_+^2,$$

که در آن r_+ شعاع افق است. در گرانش تعمیم یافته $F(R)$ فرمول آنتروپی به صورت تعمیم یافته

$$S = (A/4)F'(R) \quad (20)$$

درمی‌آید که در آن پریم نشان دهنده مشتق نسبت به نرده‌ای ریچی است. به یاد داشته باشیم در حالت کلی نرده‌ای ریچی تابعی از مختصات فضا-زمان است، ولی برای حالت متریک متقارن کروی (۵) همانگونه که در فرمول (۱۰) نشان داده شده است، تابعی از مختصه شعاعی r خواهد شد، یعنی $R=R(r)$. بنابراین از آنجایی که آنتروپی سیاه‌چاله در افق آن محاسبه می‌شود، برای مدل گرانش مجذوری، آنتروپی به صورت زیر درمی‌آید:

$$S = (A/4)(2R(r_+)) = 2\pi r_+^2 R(r_+). \quad (21)$$

$$M_1 = M_1(r_+) =$$

$$\frac{1}{\pi^{3/2} r_+} \left[2 - \delta e^{-\frac{r_+^2}{4\alpha}} + \frac{1 + \frac{1}{2}\alpha}{r_+^2} \operatorname{erf}\left(\frac{r_+}{\sqrt{4\alpha}}\right) - \frac{\delta r e^{-\frac{r_+^2}{4\alpha}}}{4\pi^{3/2} \sqrt{\alpha}} \right], \quad (18)$$

و برای ضریب متریک (۱۶) نتیجه می‌شود:

$$(19)$$

$$M_2 = M_2(r_+) =$$

$$\frac{1}{\pi^{3/2} r_+} \left[2\sqrt{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{r_+^2}{4\alpha}} \right) + \frac{2\alpha + \frac{r_+^2}{3}}{4\pi\alpha} \operatorname{erf}\left(\frac{r_+}{\sqrt{4\alpha}}\right) - D r_+^2 - \frac{3 r e^{-\frac{r_+^2}{4\alpha}}}{4\pi^{3/2} \sqrt{\alpha}} \right].$$

نمودار دو تابع جرم بالا بر حسب شعاع افق در شکل ۴ و برای $\alpha=1$ رسم شده‌اند. قبل از تجزیه و تحلیل منحنی‌ها در این قسمت، این نکته مهم را یاد آور می‌شویم که نمودار توابع (۱۸) و (۱۹) بر حسب شعاع افق بوده و از آنجایی که سیاه‌چاله‌ای با شعاع افق صفر و یا نزدیک به صفر نمی‌تواند وجود داشته باشد، پس رفتار منحنی‌ها در نزدیکی صفر نمی‌تواند مورد نظر باشد. بنابراین بدیهی است که در کمیت‌ها و منحنی‌هایی که بر حسب شعاع افق بیان می‌شوند، این نکته را بایستی در نظر داشت که برای بررسی آنها باید از یک نقطه غیر صفر برای شعاع افق شروع کرد. البته روش کلی برای این کار وجود ندارد ولی از این نکته که با افزایش شعاع افق، جرم سیاه‌چاله کاهش نمی‌یابد، می‌توان سود برد.

با این توضیح به شکل ۴ باز می‌گردیم. منحنی آبی رنگ تابع جرم (۱۸) را نمایش می‌دهد که در آغاز به شدت کاهشی بوده ولی مجدداً افزایشی و نهایتاً به مقدار حدی 4π میل می‌کند.

منحنی نارنجی رنگ، تابع جرم (۱۹) را نمایش می‌دهد که به شدت و به طور یکنوا کاهشی بوده تا به مقدار حدی صفر میل می‌کند. این می‌تواند از نظر فیزیکی چالش برانگیز باشد زیرا همانطور که گفته شد، بیانگر حالتی از سیاه‌چاله است که هر چه افق رویداد آن بزرگ‌تر می‌شود، جرم آن (بر خلاف انتظار) بیشتر کاهش می‌یابد. در اینجا چون ممکن است توضیح فیزیکی مناسبی برای این رفتار سیاه‌چاله وجود نداشته باشد، برای بررسی ترمودینامیکی که در بخش بعدی ارائه می‌شود، فقط سیاه‌چاله با ضریب متریک (۱۵) را در نظر می‌گیریم. در این ارتباط یادآوری این نکته مهم است که وجود چالش نامبرده

$$f_1'(r) = M \left[\frac{1}{\pi^{r/\gamma} \sqrt{\alpha}} \left(\frac{\gamma\alpha}{r^\gamma} - \left(\frac{\gamma}{\gamma} + \frac{\lambda\alpha}{r^\gamma} + \frac{\delta r^\gamma}{\lambda\alpha} \right) e^{-\frac{r^\gamma}{\alpha}} \right) + \frac{\epsilon\alpha}{\pi r^\gamma} \operatorname{Efr} \left(\frac{r}{\sqrt{\epsilon\alpha}} \right) \right],$$

$$f_1''(r) = M \left[\frac{1}{\pi^{r/\gamma} \sqrt{\alpha}} \left(\frac{\gamma\alpha}{r^\gamma} + \frac{\epsilon}{r} + \frac{\delta r^\gamma}{\gamma\alpha} - \frac{r}{\gamma\alpha} \right) e^{-\frac{r^\gamma}{\alpha}} + \frac{\gamma\alpha}{\pi r^\gamma} \operatorname{Efr} \left(\frac{r}{\sqrt{\epsilon\alpha}} \right) \right].$$

برای استفاده از فرمول (۱۹) مشتق‌های فوق و جرم M موجود در آنها، باید بر روی افق محاسبه شوند. پس باید مقدار جرم از فرمول (۱۶) در مشتق‌های به‌دست آمده جایگذاری شود و بنابراین مقادیر مشتق‌ها بر روی افق به صورت زیر درخواهند آمد:

$$f_1'(r_+) = \frac{1}{\pi^{r_+/\gamma} \sqrt{\alpha}} \left(\frac{\gamma\alpha}{r_+^\gamma} - \left(\frac{\gamma}{\gamma} + \frac{\lambda\alpha}{r_+^\gamma} + \frac{\delta r_+^\gamma}{\lambda\alpha} \right) e^{-\frac{r_+^\gamma}{\alpha}} \right) + \frac{\epsilon\alpha}{\pi r_+^\gamma} \operatorname{Efr} \left(\frac{r_+}{\sqrt{\epsilon\alpha}} \right), \quad (24)$$

$$f_1''(r_+) = \frac{1}{\pi^{r_+/\gamma} \sqrt{\alpha}} \left(\frac{\gamma\alpha}{r_+^\gamma} + \frac{\epsilon}{r_+} + \frac{\delta r_+^\gamma}{\gamma\alpha} - \frac{r_+}{\gamma\alpha} \right) e^{-\frac{r_+^\gamma}{\alpha}} + \frac{\gamma\alpha}{\pi r_+^\gamma} \operatorname{Efr} \left(\frac{r_+}{\sqrt{\epsilon\alpha}} \right).$$

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi^{r_+/\gamma}} \frac{\gamma - \delta e^{-\frac{r_+^\gamma}{\alpha}}}{r_+} + \frac{1 + \frac{\gamma\alpha}{r_+^\gamma}}{4\pi} \operatorname{Erf} \left(\frac{r_+}{\sqrt{\epsilon\alpha}} \right) - \frac{\delta r_+ e^{-\frac{r_+^\gamma}{\alpha}}}{4\pi^{r_+/\gamma} \sqrt{\alpha}}$$

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi^{r_+/\gamma}} \frac{\gamma - \delta e^{-\frac{r_+^\gamma}{\alpha}}}{r_+} + \frac{1 + \frac{\gamma\alpha}{r_+^\gamma}}{4\pi} \operatorname{Erf} \left(\frac{r_+}{\sqrt{\epsilon\alpha}} \right) - \frac{\delta r_+ e^{-\frac{r_+^\gamma}{\alpha}}}{4\pi^{r_+/\gamma} \sqrt{\alpha}} \quad (25)$$

نهایتاً با بردن دو مشتق بالا در آنتروپی (۲۳)، آن را به صورت تابعی از شعاع افق به صورت زیر به‌دست می‌دهد:

$$S = 2\pi \left(\gamma - r_+^\gamma f_1''(r_+) - \epsilon r_+ f_1'(r_+) \right) =$$

$$2\pi \left[\gamma - r_+^\gamma \frac{1}{\pi^{r_+/\gamma} \sqrt{\alpha}} \left(\frac{\gamma\alpha}{r_+^\gamma} + \frac{\epsilon}{r_+} + \frac{\delta r_+^\gamma}{\gamma\alpha} - \frac{r_+}{\gamma\alpha} \right) e^{-\frac{r_+^\gamma}{\alpha}} + \frac{\gamma\alpha}{\pi r_+^\gamma} \operatorname{Efr} \left(\frac{r_+}{\sqrt{\epsilon\alpha}} \right) - \epsilon r_+ \left(\frac{1}{\pi^{r_+/\gamma} \sqrt{\alpha}} \left(\frac{\gamma\alpha}{r_+^\gamma} - \left(\frac{\gamma}{\gamma} + \frac{\lambda\alpha}{r_+^\gamma} + \frac{\delta r_+^\gamma}{\lambda\alpha} \right) e^{-\frac{r_+^\gamma}{\alpha}} \right) + \frac{\epsilon\alpha}{\pi r_+^\gamma} \operatorname{Efr} \left(\frac{r_+}{\sqrt{\epsilon\alpha}} \right) \right) \right]$$

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi^{r_+/\gamma}} \frac{\gamma - \delta e^{-\frac{r_+^\gamma}{\alpha}}}{r_+} + \frac{1 + \frac{\gamma\alpha}{r_+^\gamma}}{4\pi} \operatorname{Erf} \left(\frac{r_+}{\sqrt{\epsilon\alpha}} \right) - \frac{\delta r_+ e^{-\frac{r_+^\gamma}{\alpha}}}{4\pi^{r_+/\gamma} \sqrt{\alpha}}$$

که بعد از ساده کردن می‌شود:

$$S = S(r_+) = 2\pi \left[\gamma - \frac{\lambda\alpha}{r_+} - \left(\gamma r_+ + \frac{\gamma\alpha}{r_+} + \frac{\gamma r_+^\gamma}{\alpha} + \frac{\delta r_+^\gamma}{\gamma\alpha} \right) e^{-\frac{r_+^\gamma}{\alpha}} + \frac{\epsilon\gamma\alpha^{r_+/\gamma} \sqrt{\pi}}{r_+^\gamma} \operatorname{Efr} \left(\frac{r_+}{\sqrt{\epsilon\alpha}} \right) \right]. \quad (26)$$

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi^{r_+/\gamma}} \frac{\gamma - \delta e^{-\frac{r_+^\gamma}{\alpha}}}{r_+} + \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{4} \left(1 + \frac{\gamma\alpha}{r_+^\gamma} \right) \operatorname{Erf} \left(\frac{r_+}{\sqrt{\epsilon\alpha}} \right) - \frac{\delta r_+ e^{-\frac{r_+^\gamma}{\alpha}}}{4}$$

اکنون فرمول (۱۰) برای نرده‌ای ریچی را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$R = R(r) = \frac{\gamma}{r^\gamma} (1 - f(r)) - f''(r) - \frac{\epsilon f'(r)}{r}, \quad (22)$$

قبل از درج فرمول اخیر در آنتروپی (۲۱)، باید دو نکته مهم زیر را در نظر داشت:

نخست این که بر روی افق، ضریب متریک صفر می‌شود یعنی

$$f(r_+) = 0 \text{ و در نتیجه (۲۲) می‌شود:}$$

$$R(r_+) = \frac{\gamma}{r_+^\gamma} - f''(r_+) - \frac{\epsilon f'(r_+)}{r_+},$$

و متعاقب آن (۲۳) می‌شود:

$$S = 2\pi r_+^\gamma R(r_+) = 2\pi \left(\gamma - r_+^\gamma f_1''(r_+) - \epsilon r_+ f_1'(r_+) \right). \quad (23)$$

دوماً مشتق‌های اول و دوم ضریب متریک (۱۵) نسبت به مختصه شعاعی عبارتند از:

که با افزایش شعاع افق به بی نهایت میل می کند، می تواند منطقی تر باشد.

۲.۵. دما

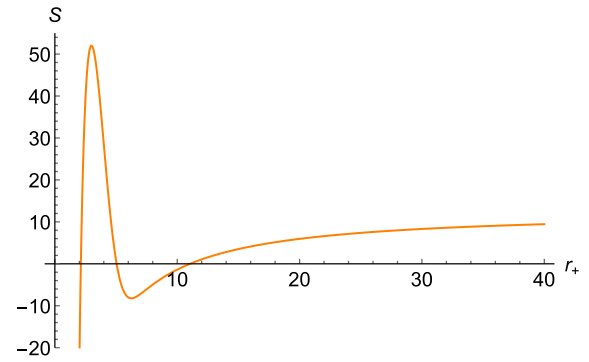
دمای افق سیاه چاله در گرانش تعمیم یافته $F(R)$ همانند گرانش اینشتین برای متریک کروی (۵) از فرمول

$$T = \frac{f'(r_+)}{4\pi},$$

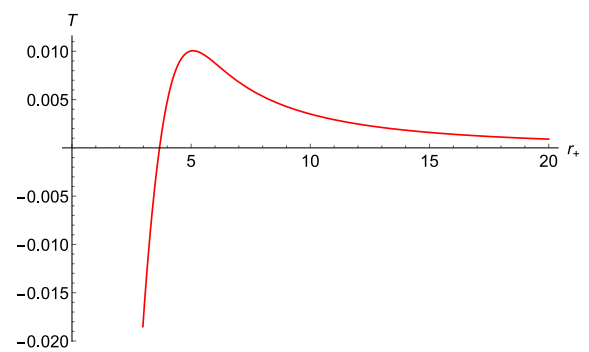
به دست می آید. همانند آنتروپی، دما نیز بر روی افق محاسبه می شود و بنابراین مشتق موجود در فرمول دما را باید از رابطه (۲۴) جایگذاری کرد. با انجام این کار، دما نیز تابعی صریح از شعاع افق به صورت زیر است:

$$T = T(r_+) = \frac{\frac{1}{\pi^{3/2} \sqrt{\alpha}} \left(\frac{\gamma \alpha}{r_+^2} - \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\lambda \alpha}{r_+^2} + \frac{\delta r_+^2}{\lambda \alpha} \right) e^{-\frac{r_+^2}{2\alpha}} \right) + \frac{\epsilon \alpha}{\pi r_+^2} \operatorname{erf} \left(\frac{r_+}{\sqrt{4\alpha}} \right)}{\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{\gamma - \delta e^{-\frac{r_+^2}{2\alpha}}}{r_+} + \left(1 + \frac{\gamma \alpha}{r_+^2} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{r_+}{\sqrt{4\alpha}} \right) - \frac{\delta r_+^2}{\sqrt{\pi \alpha}}}, \quad (27)$$

نمودار تابع دمای (۲۷) برحسب شعاع افق و به ازای $\alpha=1$ در شکل ۶ رسم شده است. چون طبق قانون سوم ترمودینامیک سیاه چاله ها، دمای یک سیاه چاله نمی تواند صفر شود، پس بدون در نظر گرفتن قسمت دمای صفر و منفی نمودار می توان نتیجه گرفت، ابتدا با افزایش شعاع افق دمای سیاه چاله نیز به میزان کمی افزایش یافته و به یک بیشینه می رسد. سپس با افزایش بیشتر شعاع افق، دما به طور یکنوا به مقدار مجانبی صفر کاهش پیدا می کند که در این مورد مشابه دمای سیاه چاله شوارتزشیلد است. البته به یاد داشته باشیم که دمای شوارتزشیلد با عکس شعاع افق متناسب بوده و برای شعاع های افق کوچک، دما بسیار بزرگ می شود و در نتیجه رفتار دما در مدل گرانش مجذوری می تواند مقبول تر باشد.



شکل ۵. این شکل نمودار تابع آنتروپی (۲۶) بر حسب شعاع افق سیاه چاله را نشان می دهد که برای $\alpha=1$ رسم شده است. با افزایش شعاع افق، آنتروپی نهایتاً به مقدار حدی 4π میل می کند.



شکل ۶. این شکل نمودار تابع دمای (۲۶) بر حسب شعاع افق سیاه چاله را نشان می دهد که برای $\alpha=1$ رسم شده است. همانگونه که مشاهده می شود، در ابتدا با افزایش شعاع افق، دما تا رسیدن به یک بیشینه افزایش یافته و سپس به مقدار حدی صفر میل می کند.

نمودار تغییرات تابع آنتروپی (۲۶) برحسب شعاع افق برای $\alpha=1$ در شکل ۵ رسم شده است. همانطور که دیده می شود برای شعاع های افق نزدیک صفر، آنتروپی به بی نهایت منفی میل می کند که طبق آنچه گفته شد از لحاظ فیزیکی جای بحث ندارد. البته به جز این می توان با توجه به قانون ترمودینامیک سیاه چاله ها که تغییر آنتروپی منفی را غیر مجاز می کند، قسمت هایی از نمودار با این ویژگی (تغییر منفی آنتروپی) را در نظر نگرفت و بنابر آنچه گفته شد قسمت (یا قسمت های) مجاز نمودار را از یک شعاع افق حداقلی به بعد مورد توجه قرار داد. همانگونه که شکل نشان می دهد در نهایت با افزایش شعاع افق، آنتروپی به مقدار حدی 4π میل می کند و این در مقایسه با آنتروپی سیاه چاله شوارتزشیلد یعنی:

$$S = \pi r_+^2,$$

۶. نتیجه گیری

در این نوشتار وجود فضا-زمان‌های ناشی از حضور یک منبع مادی با توزیع گوسی، در گرانس مجذوری محض، مورد بررسی قرار گرفته است. در میان این فضا-زمان‌ها، توجه خود را به فضا-زمان‌های افق دار (سیاه‌چاله) معطوف کرده و به جز بررسی خواص مقدماتی آنها، برخی دیدگاه‌های مقایسه‌ای آنها با جواب متناظر در گرانس اینشتینی نیز مورد توجه قرار گرفته اند. در این خصوص، به طور خلاصه اهم نتایج مقاله حاضر را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

۱- بر خلاف گرانس اینشتینی که شامل ثابت کیهان‌شناسی است و دو جواب مجانباً دوسیده و پاد-دوسیده است، در گرانس مجذوری محض (بدون حضور ثابت کیهان‌شناسی) جواب‌هایی شامل هر سه حالت مجانباً تخت، مجانباً دوسیده و پاد-دوسیده وجود دارند. در ضمن، جواب‌های اینشتینی بدون حضور ثابت کیهان‌شناسی، فقط فضا-زمان مجانباً تختی را نمایش می‌دهد که (بسته به انتخاب جرم و واریانس توزیع) می‌تواند افق داشته باشد یا نداشته باشد.

۲- هر دو جواب عمومی گرانس اینشتینی و گرانس مجذوری محض شامل جمله متناسب با $\frac{1}{r}$ هستند که برای داشتن جواب منظم در گرانس اینشتینی باید ثابت دلخواه مربوط را صفر کرد، در صورتی که با حذف این جمله در گرانس مجذوری این امر محقق نمی‌شود و در واقع وجود این جمله است که سبب منظم شدن جواب می‌شود.

۳- در فضای مجانباً دوسیده (ثابت کیهان‌شناسی مثبت) به ازای هر مقدار از پارامترهای موجود، فضا-زمان همواره سیاه‌چاله‌ای

مراجع

است (فضا- زمان افق دار)، در صورتی که در دو حالت دیگر (پاد-دوسیده و تخت) چنین الزامی وجود ندارد و فضا-زمان می‌تواند افق دار یا بدون افق باشد.

۴- ثابت کیهان‌شناسی که در جواب گرانس مجذوری ظاهر می‌شود به جرم کل و واریانس توزیع گوسی و هم به یک ثابت دلخواه وابسته است که وجود این ثابت امکان انطباق جواب با در دست داشتن داده‌های (مشاهداتی یا محاسباتی) احتمالی را فراهم می‌کند.

۵- یکی از مهم‌ترین نتایج قابل ذکر در این مدل گرانس مجذوری، پیش‌بینی منشأ هندسی برای ثابت کیهان‌شناسی ظاهر شده در جواب‌های مربوطه است و شاید این مسئله بتواند راهی به سوی یافتن معمای مرموز منشأ این ثابت باشد.

۶- نمودارهای ترمودینامیکی جرم و آنتروپی که در آنها این دو متغیر با افزایش شعاع افق به حد ثابتی میل می‌کنند، در مقایسه با نمودارهای مربوطه برای سیاه‌چاله شوارتزشیلد که در آنها برای این دو متغیر حد بالایی وجود ندارد، می‌تواند اعتبار بیشتری داشته باشد.

۷- قسمت مجاز نمودار ترمودینامیک دما نشان می‌دهد که تا شعاع افق مشخصی، دما (هر چند اندک) افزایش می‌یابد و سپس با افزایش بیشتر شعاع افق، دما به طور مجانبی به سمت صفر میل می‌کند. از نظر مقایسه‌ای، قسمت کاهشی به سمت صفر نمودار از نظر کیفی مانند دمای سیاه‌چاله شوارتزشیلد است. البته همانطور که می‌دانیم دمای سیاه‌چاله شوارتزشیلد در تمامی نمودار مربوطه کاهشی است و در شعاع‌های افق کوچک، دما بسیار بزرگ می‌شود.

1. B P Abbott *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 061102.
2. A Felice and S Tsujikawa, *Living Rev. Relativ.* **13** (2010) 3.
3. A A Starobinsky, *Phys. Lett. B* **91** (1980) 99.
4. A Kehagias, C Kounnas, D Lüst and A Riotto, *J. High Energy Phys.* **1505** (2015) 143.
5. A Salvio and A Strumia, *J. High Energy Phys.* **06** (2014) 080.
6. M Rinaldi, G Cognola, L Vanzo, and S Zerbini, *Phys. Rev. D* **91** (2015) 123527.
7. A M Frassino, *Proc. Phys.* **208** (2018) 133.
8. T P Sotiriou and V Faraoni, *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 451