

اثر درهم‌تنیدگی و چهارچوب نالخت در بازی کوانتومی چهارکیوبیتی

سیده سکینه رشیدی و هادی گودرزی

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه، ارومیه

پست الکترونیکی: h.goudarzi@urmia.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۴/۳؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۴/۱۰/۱۶)

چکیده

تأثیر افزایش بیت‌های کوانتومی و اثر آنرو بر بازی کوانتومی معمای زندانی برای دو حالت اولیه درهم‌تنیده و غیردرهم‌تنیده مطالعه می‌شود. تعادل نش به عنوان یک نتیجه مهم نظریه بازی کوانتومی از نتایج متعدد حاصل از اتخاذ راهبردهای مختلف استخراج می‌شود. نشان داده می‌شود که وجود چهارچوب غیرلخت تقارن بازی را از بین می‌برد. درحقیقت، انتخاب راهبرد اولیه کوانتومی توسط بازیکنان و محاسبه نتیجه بازی از طریق ماتریس چگالی حالت‌های چهار کیوبیتی می‌تواند مقیاسی برای میزان نفوذ درهم‌تنیدگی در یک دستگاه کوانتومی را ارائه دهد.

واژه‌های کلیدی: بازی کوانتومی، درهم‌تنیدگی، تعادل نش، بهینگی پارتو، دستگاه نالخت

۱. مقدمه

نظریه بازی در سال ۱۹۲۱ به عنوان یک نظریه کاربردی در ریاضیات مطرح شد [۱]. میر^۱ [۲] با استفاده از تعریف یک فضای راهبردی کوانتومی، نظریه بازی کلاسیکی را تحت عنوان بازی کوانتومی مطرح کرد.

بعد از این، توسط محققین زیادی [۳-۱۴] نشان داده شد که بازیکنان کوانتومی با انتخاب راهبرد کوانتومی قادر هستند بر حریفان کلاسیکی فایز آیند. در واقع، نظریه بازی شامل دو

حرکت مشارکتی^۲ و تدافعی^۳ است. معمای زندانی که نمونه‌ای از یک بازی غیرمشارکتی است، با تعمیم به فضای درهم‌تنیده کوانتومی می‌تواند به نتیجه یک بازی معمای زندانی کوانتومی منجر شود. به واسطه انتخاب راهبرد فرار یا همکاری توسط هر بازیکن، نتیجه کسب شده حاصل تضاد بین تعادل نش^۴ و بهینگی پارتو^۵ خواهد بود. در حقیقت، منظور از تعادل نش،

۲. Cooperation

۳. Defection

۴. Nash

۵. Pareto

۱. D A Meyer

نهایی در پایان آورده می‌شود.

۲. مدل معمای زندانی در بازی کوانتومی

بازی زندانی به عنوان یک بازی با مجموع غیر صفر شناخته شده است که کاربرد همه جانبه‌ای در حیطه بیشتر علوم دارد. ما این مدل را برای بازی کوانتومی با چهار کیوبیت استفاده می‌کنیم. در این دستگاه آلیس بازیکن (A) در چهارچوب شتاب‌دار یکنواخت قرار دارد و سه بازیکن دیگر (B) و (C) کالین و (D) دنی دارای سرعت ثابتی هستند. هر یک از بازیکنان می‌توانند بر اساس جدول ۱، تابع اولیه خود را از میان تمام حالت‌های مختلف انتخاب نمایند تا با تأثیر پارامترهای شتاب و درهم‌تنیدگی نتیجه نهایی بازی آنها معین شود. سه راهبرد برای قرار گرفتن هریک از بازیکنان در وضعیت دینامیکی مختلف بازی می‌تواند وجود داشته باشد، که هر بازیکن به اختیار فقط یکی از راهبردها را می‌تواند انتخاب کند. این راهبردها به ترتیب همکاری (C)، فرار (D) و راهبرد مربوط به فضای کوانتومی (Q) می‌باشند. البته که نتیجه نهایی یک بازیکن تنها به راهبرد انتخابی او بستگی ندارد، بلکه به راهبرد انتخابی رقبای او نیز بستگی خواهد داشت.

تابع حالت اولیه درهم‌تنیده چهار کیوبیتی هریک از بازیکنان $|\Psi_{iM}\rangle = \hat{J} |0000\rangle_{A,B,C,D}$ در یک نقطه در چهارچوب فضا-زمان مینکوفسکی لخت را در نظر می‌گیریم. شاخص‌های A, B, C, D به ترتیب مربوط به آلیس، باب، کالین، و دنی می‌باشد. عملگر درهم‌تنیدگی \hat{J} عملگری یکانی است که درگاه درهم‌تنیدگی بازی است و برای بازیکنان یک دسترسی بر اصول کوانتومی در حالت اولیه را فراهم می‌کند، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{J} = \exp\left(i\frac{\pi}{4} \hat{f}_x \otimes \hat{f}_x \otimes \hat{f}_x \otimes \hat{f}_x\right), \quad (1)$$

که در آن X درجه درهم‌تنیدگی در حالت اولیه است، $[\frac{\pi}{4}, 0]$ بنابراین وقتی $X = 0$ بازی کلاسیکی غیردرهم‌تنیده می‌باشد، وقتی

$\frac{\pi}{4}$ = بازی کوانتومی بیشترین حد درهم‌تنیدگی را نخواهد داشت. \hat{f}_x مؤلفه اول ماتریس پاولی است. بردار پایه این ذرات در

بهترین نتیجه‌ای است که یک بازیکن با تغییر راهبرد خود به آن دست می‌یابد، در حالی که راهبرد سایر بازیکنان ثابت می‌باشد و بهینگی پارتو بهترین نتیجه از بازی است که بازیکن می‌تواند بدون اشتباه بازیکنان دیگر به دست آورد.

در سال‌های اخیر، بازی کوانتومی نسبی نیز مورد بررسی قرار گرفته است [۱۵-۲۰]. نقش و رفتار درهم‌تنیدگی بین ذرات جدا از هم در حالت نسبی در چهارچوب نالخت می‌تواند کمک زیادی در بررسی فرآیندهای شامل اطلاعات کوانتومی و محاسبات کوانتومی بنماید. بعنوان مثال، وابستگی صریح نتایج بازی معمای زندانی در دو حالت دو کیوبیتی و سه کیوبیتی در چهارچوب نالخت به شتاب دستگاه و تأثیر آن بر درهم‌تنیدگی کوانتومی اخیراً در مراجع [۲۱-۲۳] مورد بررسی قرار گرفته است. پاسخ به این سؤال که افزایش تعداد بیت‌های کوانتومی چه تأثیری بر درهم‌تنیدگی و نتیجه نهایی بازی کوانتومی خواهد گذاشت، از نظر اصول سازوکار کوانتومی می‌تواند حائز اهمیت باشد. از این رو، آلسینگ^۱ [۱۵] و همکارانش نشان داده‌اند که درهم‌تنیدگی بین دو مد از شکل دیراک به واسطه اثر آنرو^۲ به کمترین مقدار غیر صفر در ناحیه شتاب نامحدود کاهش می‌یابد. در رابطه با اثر آنرو که در واقع یک آشکارساز شتاب‌دار است که حالت خلاء مینکوفسکی را با دمای ترمودینامیکی (دمای آنرو) مرتبط می‌کند در بخش بعدی کمی بحث خواهد شد. در این تحقیق، تعادل نش و مقادیر بهینه پارتو را برای دستگاه چهار کیوبیتی که بردار حالت یک ذره در ناحیه ریندلر^۳ متأثر از شتاب چهارچوب می‌باشد، بررسی کرده و با استفاده از سازوکار محاسبه بردارهای پایه و تبدیل یکانی، تابع نتایج را به طور صریح محاسبه می‌کنیم. رفتار تابع نتایج جدید به طور عددی محاسبه شده و وابستگی نتایج بازی به درهم‌تنیدگی کوانتومی و شتاب چهارچوب بررسی می‌شود. نتایج حاصله از تحقیق حاضر با کارهای انجام گرفته قبلی مقایسه شده و حرکت معجزه آسای آیزرت^۴ در این دستگاه تحلیل می‌شود. در نهایت، نتیجه‌گیری

۱. Alsing

۲. Unruh

۳. Rindler

۴. Eisert

جدول ۱. ماتریس راهبرد اولیه که بازیکنان با تعداد شانزده حالت ممکن می‌توانند انتخاب کنند (از اعداد ذکر شده عدد اول مربوط به آلیس، عدد دوم مربوط به باب، عدد سوم مربوط به کالین و عدد چهارم مربوط به دنی می‌باشد).

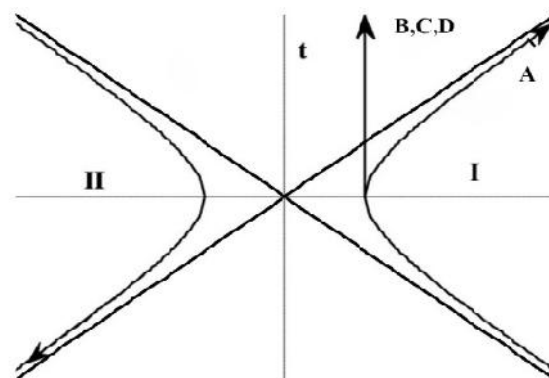
		C : دنی		D : دنی	
		C : کالین		C : کالین	
		C : باب	D : باب	C : باب	D : باب
C	آلیس	(۳, ۳, ۳, ۳)	(۲, ۵, ۲, ۲)	(۲, ۲, ۲, ۵)	(۲, ۴, ۲, ۴)
D	آلیس	(۵, ۲, ۲, ۲)	(۴, ۴, ۲, ۲)	(۴, ۲, ۲, ۴)	(۳, ۳, ۱, ۳)
		C : دنی		D : دنی	
		D : کالین		D : کالین	
		C : باب	D : باب	C : باب	D : باب
C	آلیس	(۲, ۲, ۵, ۲)	(۲, ۴, ۴, ۲)	(۲, ۲, ۴, ۴)	(۱, ۳, ۳, ۳)
D	آلیس	(۴, ۲, ۴, ۲)	(۳, ۳, ۳, ۱)	(۳, ۱, ۳, ۳)	(۱, ۱, ۱, ۱)

دستگاه فرمیونی استفاده می‌شود، فرمیون‌ها می‌توانند شامل نوارهای انرژی مثبت و منفی معادل ذره و پادذره باشند. این بدان معناست که دو ناحیه I و II ریندلر در چهارچوب فضا-زمان نسبیتی مینکوفسکی برای فرمیون‌ها و پادفرمیون‌ها وجود دارد.

در واقع حل معادله دیراک برای فرمیون‌ها در ناحیه I همان گونه است که برای پادفرمیون‌ها در ناحیه II. مدهای کوانتومی در هر ناحیه‌ای برای ارتباط با ناحیه دیگر از عملگرهای نردبانی استفاده می‌کند، به طوری که عملگرهای خلق فرمیون و نابودی پادفرمیون (a_k^\dagger, b_k) برای مدهای کوانتومی در چهارچوب فضا-زمان مینکوفسکی با عملگر c_k در ناحیه I و عملگر b_k^\dagger در ناحیه II ریندلر متناظر است و به وسیله تبدیلات باگالیویاف بهم مرتبطاند [۲۴ و ۲۵]:

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos r & -e^{-i\ell} \sin r \\ e^{i\ell} \sin r & \cos r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k^I \\ d_k^{II} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

به طوری که k اشاره به تک مد کوانتومی در هر ناحیه دارد، $\{r$ و ℓ پارامتر شتاب است که با رابطه زیر مشخص می‌شود:



شکل ۱. دیاگرام فضای ریندلر که باب، کالین و دنی سرعت ثابتی دارند و آلیس با شتاب یکنواخت در حال حرکت می‌باشد.

فضای مینکوفسکی بعد از استفاده از عملگر درهم تنیدگی بدین شکل می‌باشد:

$$|iM = \hat{J}| \circ \circ \circ \circ A, B, C, D = \cos \frac{r}{\gamma} | \circ_A | \circ_B | \circ_C | \circ_D + i \sin \frac{r}{\gamma} | \circ_A | \circ_B | \circ_C | \circ_D. \quad (2)$$

همان طور که در شکل ۱ دیده می‌شود در دستگاه نسبیتی نالخت، از یک چهارچوب فضا-زمان (۱+۳) بعدی مینکوفسکی استفاده می‌شود. در معادله دیراک که برای تشریح

بالا را تنها برای ناحیه I به ترتیب زیر حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \dots_{A, B, C, D} = & \cos^2 \frac{\chi}{\psi} \cos^2 r |0000\rangle\langle 0000| \\ & + i \sin \frac{\chi}{\psi} \cos \frac{\chi}{\psi} \cos r |0000\rangle\langle 1111| \\ & + \cos^2 \frac{\chi}{\psi} \sin^2 r |1000\rangle\langle 1000| \quad (8) \\ & + i \sin \frac{\chi}{\psi} \cos \frac{\chi}{\psi} \cos r |1111\rangle\langle 0000| \\ & - \sin^2 \frac{\chi}{\psi} |1111\rangle\langle 1111|. \end{aligned}$$

در معمای زندانی کوانتومی حرکت‌های راهبردی بازیکنان به‌وسیله عملگر یکانی دو پارامتری که با انتخاب مقادیر معین برای $\{N, \chi\}$ می‌توان زیرفضای راهبردی مختلف را بر بازیکنان حاکم کرد، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$U_N(\chi, \{N\}) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\chi N}{2} & e^{i\chi N} \sin \frac{\chi N}{2} \\ -e^{-i\chi N} \sin \frac{\chi N}{2} & \cos \frac{\chi N}{2} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

که شاخص $N = A, B, C, D$ مربوط به هر یک از چهار بازیکن است و داریم، $\chi \in [0, \pi/2]$ و $N \in [0, f]$. حالت‌های همکاری و تدافعی را با دو حالت $|0\rangle$ و $|1\rangle$ در فضای هیلبرت چهار کیوبیتی مربوط می‌سازیم. استفاده از راهبرد همکاری $C = U_N(\pi, 0)$ ، عملگر معادله (۹) یک ماتریس واحد می‌شود و راهبرد تدافعی $D = U_N(\pi/2, \pi/2)$ یک ماتریس بیت فیلپ خواهد بود. ماتریس چگالی تحت تبدیل یکانی در حالت نهایی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \dots_f = & \hat{J}^\dagger (U_A \otimes U_B \otimes U_C \otimes U_D) \\ & \dots_{A, B, C, D} (U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger \otimes U_C^\dagger \otimes U_D^\dagger) \hat{J}, \quad (10) \end{aligned}$$

برای به دست آوردن تابع نتیجه از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$P_N^{j_1 j_2 j_3 j_4} = \sum_i \$_N^{j_1(i) j_2(i) j_3(i) j_4(i)} (\dots_f)_{ii} \quad (11)$$

به طوری که $\$_N^{j_1(i) j_2(i) j_3(i) j_4(i)}$ با $(j_1(i) j_2(i) j_3(i) j_4(i) \in [C, D])$ از نتایج کلاسیکی جدول انتخاب می‌شوند و همچنین $(j_1(i) j_2(i) j_3(i) j_4(i) \in [Q])$ وقتی هر کدام از چهار بازیکن با راهبرد کوانتومی بازی می‌کنند به این معنا که پارامتر درهم‌تنیدگی مخالف صفر است $\chi \neq 0$ و $(\dots_f)_{ii}$ ($i \in [0, 1]$) عناصر قطری ماتریس چگالی نهایی هستند.

$$\cos r_i = \left(1 + e^{-\frac{\chi \$_i c}{a_i}}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq r \leq \frac{f}{\psi}, \quad (4)$$

که i متعلق به بازیکن چهارچوب نالخت (آلیس) است. ثابت‌های $\$_i$ ، c و a_i در تابع نمایی به ترتیب برای بسامد ذره دیراک، سرعت نور در خلاء و شتاب مشاهده‌گر می‌باشند. پارامتر شتاب دستگاه صفر خواهد بود وقتی $r = 0$ باشد و به ازای $r = \frac{f}{\psi}$ ، شتاب a بی‌نهایت (ناحیه شتاب نامتناهی) می‌شود. در واقع ناظر دستگاه نالخت که با یک شتاب ثابت در ناحیه I ریندلر حرکت می‌کند، یک کت حالت وابسته به دما را خواهد داشت. این همان اثر آنرو است [۲۶]، و مقدار $T = \frac{ha}{\psi f c k_B}$ دمای آنرو می‌باشد (k_B ثابت بولتزمن است).

برای سادگی یک تک مد کوانتومی تنها در ناحیه I را در نظر می‌گیریم. در صورت تکفام بودن آشکارسازهای ناظر تمام دستگاه‌ها، در این صورت می‌توان در تبدیلات باگالیوف معادله (۳) تقریب خوبی به کار برد:

$$\$_D \cong \$_C \cong \$_B \cong \$_A = \$_S \quad [15].$$

حالت خلاء مینکوفسکی برای ساختار ما یک حالت فشرده^۱ دو مدی به شکل زیر خواهد بود:

$$|^0 \$_i \rangle_M = \cos r_i |^0 \$_i \rangle_I + \sin r_i |^1 \$_i \rangle_I |^1 \$_i \rangle_{II}. \quad (5)$$

همچنین حالت برانگیخته در چهارچوب فضا-زمان مینکوفسکی مرتبط با مدهای ریندلر خواهد بود:

$$|^1 \$_i \rangle_M = |^1 \$_i \rangle_I |^0 \$_i \rangle_{II} \quad (6)$$

با استفاده از معادلات (۵) و (۶)، معادله (۲) را برحسب مدهای فضای مینکوفسکی برای آلیس و مدهای ریندلر برای باب، کالین و دنی می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} |^0 \rangle_{A_I, A_{II}, B, C, D} = & \cos \frac{r}{\psi} \cos r |^0 \rangle_{A_I} |^0 \rangle_{A_{II}} |^0 \rangle_B |^0 \rangle_C |^0 \rangle_D \\ & + \cos \frac{r}{\psi} \sin r |^1 \rangle_{A_I} |^1 \rangle_{A_{II}} |^0 \rangle_B |^0 \rangle_C |^0 \rangle_D \quad (7) \\ & + i \sin \frac{r}{\psi} |^1 \rangle_{A_I} |^0 \rangle_{A_{II}} |^1 \rangle_B |^1 \rangle_C |^1 \rangle_D, \end{aligned}$$

که در آن r شتاب مربوط به آلیس می‌باشد. از آنجایی که ناظر شتاب‌دار ناحیه I ریندلر بطور سببی (رابطه علی) از ناظر ناحیه II منفک می‌باشد، ماتریس چگالی دستگاه چهار کیوبیتی با مشخصات

جدول ۲. ماتریس نتایج بازیکنان که بر اساس شتاب r بوده و نشان دهنده حرکت شتاب دار آلیس است.

		دنی : C		دنی : C	
		کالین : D		کالین : C	
		باب : C	باب : D	باب : C	باب : D
C	آلیس	$\sqrt{2}\cos^2 r + \sqrt{2}\sin^2 r$	$\sqrt{2}\cos^2 r + \sqrt{2}\sin^2 r$	$\sqrt{2}\cos^2 r + \sqrt{2}\sin^2 r$	$\sqrt{2}\cos^2 r + \sqrt{2}\sin^2 r$
	آلیس	$\sqrt{2}\cos^2 r + \sqrt{2}\sin^2 r$	$\sqrt{2}\cos^2 r + \sqrt{2}\sin^2 r$	$\sqrt{2}\cos^2 r + \sqrt{2}\sin^2 r$	$\sqrt{2}\cos^2 r + \sqrt{2}\sin^2 r$
	آلیس	$\sqrt{2}\cos^2 r + \sqrt{2}\sin^2 r$	$\sqrt{2}\cos^2 r + \sqrt{2}\sin^2 r$	$\sqrt{2}\cos^2 r + \sqrt{2}\sin^2 r$	$\sqrt{2}\cos^2 r + \sqrt{2}\sin^2 r$
	آلیس	$\sqrt{2}\cos^2 r + \sqrt{2}\sin^2 r$	$\sqrt{2}\cos^2 r + \sqrt{2}\sin^2 r$	$\sqrt{2}\cos^2 r + \sqrt{2}\sin^2 r$	$\sqrt{2}\cos^2 r + \sqrt{2}\sin^2 r$
D	آلیس	$\sqrt{2}\sin^2 r + \sqrt{2}\cos^2 r$	$\sqrt{2}\sin^2 r + \sqrt{2}\cos^2 r$	$\sqrt{2}\sin^2 r + \sqrt{2}\cos^2 r$	$\sqrt{2}\sin^2 r + \sqrt{2}\cos^2 r$
	آلیس	$\sqrt{2}\sin^2 r + \sqrt{2}\cos^2 r$	$\sqrt{2}\sin^2 r + \sqrt{2}\cos^2 r$	$\sqrt{2}\sin^2 r + \sqrt{2}\cos^2 r$	$\sqrt{2}\sin^2 r + \sqrt{2}\cos^2 r$
	آلیس	$\sqrt{2}\sin^2 r + \sqrt{2}\cos^2 r$	$\sqrt{2}\sin^2 r + \sqrt{2}\cos^2 r$	$\sqrt{2}\sin^2 r + \sqrt{2}\cos^2 r$	$\sqrt{2}\sin^2 r + \sqrt{2}\cos^2 r$
	آلیس	$\sqrt{2}\sin^2 r + \sqrt{2}\cos^2 r$	$\sqrt{2}\sin^2 r + \sqrt{2}\cos^2 r$	$\sqrt{2}\sin^2 r + \sqrt{2}\cos^2 r$	$\sqrt{2}\sin^2 r + \sqrt{2}\cos^2 r$

		دنی : D	
		کالین : D	
		باب : C	باب : D
C	آلیس	$\sqrt{2}\cos^2 r + \sqrt{2}\sin^2 r$	$\cos^2 r + \sin^2 r$
	آلیس	$\sqrt{2}\cos^2 r + \sqrt{2}\sin^2 r$	$\sqrt{2}\cos^2 r + \sqrt{2}\sin^2 r$
	آلیس	$\sqrt{2}\cos^2 r + \sqrt{2}\sin^2 r$	$\sqrt{2}\cos^2 r + \sqrt{2}\sin^2 r$
	آلیس	$\sqrt{2}\cos^2 r + \sqrt{2}\sin^2 r$	$\sqrt{2}\cos^2 r + \sqrt{2}\sin^2 r$
D	آلیس	$\sqrt{2}\sin^2 r + \sqrt{2}\cos^2 r$	$\sin^2 r + \cos^2 r$
	آلیس	$\sqrt{2}\sin^2 r + \sqrt{2}\cos^2 r$	$\sqrt{2}\sin^2 r + \sqrt{2}\cos^2 r$
	آلیس	$\sqrt{2}\sin^2 r + \sqrt{2}\cos^2 r$	$\sqrt{2}\sin^2 r + \sqrt{2}\cos^2 r$
	آلیس	$\sqrt{2}\sin^2 r + \sqrt{2}\cos^2 r$	$\sqrt{2}\sin^2 r + \sqrt{2}\cos^2 r$

برای بازیکنان می باشد برای آلیس راهبرد غالب بوده و دارای بهینگی پارتو با مقادیر بالاتر از ۲٫۵ برای بازیکنان است. اگر آلیس راهبرد C را انتخاب کند و بازیکنان دیگر نیز راهبرد C را انتخاب کنند، آلیس همواره برنده خواهد بود ولی اگر بازیکنان دیگر راهبرد D را انتخاب کنند، آلیس همواره بازنده خواهد بود. نیز اگر بازیکنان دیگر مجاز به انتخاب راهبرد C و D باشند، بازیکن دستگاه لختی که راهبرد D را انتخاب کرده همواره برنده و بازیکن دستگاه لختی که راهبرد C را انتخاب کرده، همواره بازنده خواهد بود.

اگر آلیس راهبرد D را انتخاب کند و بازیکنان دیگر نیز راهبرد D را انتخاب کنند، آلیس همواره بازنده خواهد بود. ولی اگر بازیکنان دیگر راهبرد C را انتخاب کنند آلیس همواره برنده خواهد بود. اگر بازیکنان دیگر مجاز به انتخاب راهبرد C و D

۳. نتیجه و بحث

۳.۱. حالت غیردرهم تنیده در حد شتاب صفر

برای بررسی حالت غیردرهم تنیده، پارامتر درهم تنیدگی $X = 0$ می باشد و بازیکنان می توانند یکی از دو راهبرد C و D را انتخاب کنند که نتایج بازیکنان در جدول ۲ آمده است. مقادیر به دست آمده برای نتایج به پارامتر شتاب بستگی دارد و در حد شتاب صفر نتایج جدول ۲ به نتایج کلاسیکی جدول ۱ تبدیل می شود.

۳.۲. حالت غیردرهم تنیده در حد شتاب بی نهایت

نتایج تحلیلی محاسبات تابع نتایج رابطه (۱۱) نشان می دهد که به ازای $X = 0$ و $r = f/4$ ، نمایه های (C, C, C, C) و (D, C, C, C) که به ترتیب دارای مقادیر $(4, 2.5, 2.5, 2.5)$ و $(4, 2.5, 2.5, 2.5)$

(C, C, C, C) ، در شتاب صفر مطابق رابطه (۱۲) نتایج به دست آمده برای بازیکنان برابر $(۳, ۳, ۳, ۳)$ است که همانند نتایج جدول ۱ می‌باشد.

$$P_A^{CCCC} = 1/4[3(\cos r + 1)^2 + 2(\cos r - 1)^2 + 6\sin^2 r], \quad (12)$$

$$P_{B,C,D}^{CCCC} = 1/4[(\cos r + 1)^2 + 5(\cos r - 1)^2 + 6\sin^2 r].$$

۳.۴. حالت بیشینه درهم‌تنیده در حد شتاب بی‌نهایت

برای حالت بیشینه درهم‌تنیده در حد شتاب بی‌نهایت نمایه (D, C, C, C) برای آلیس، همانند حالت غیردرهم‌تنیده راهبرد غالب بوده و دارای بهینگی با مقادیر بالاتر از ۲ برای بازیکنان است، که این حالت، بهینگی پارتو بوده و مقادیر به دست آمده برای بازیکنان مطابق رابطه (۱۳) بصورت $(۲, ۲, ۲, ۴)$ خواهد بود. مشاهده می‌شود در این حالت خاص درهم‌تنیدگی تأثیری در نتیجه بازیکنان دستگاه نالخت (آلیس) ندارد ولی باعث شده که نتایج بازیکنان دستگاه لخت افزایش یابد

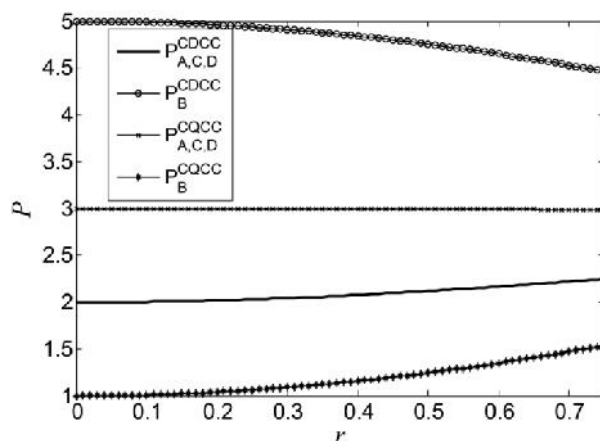
$$P_A^{DCCC} = 1/4[5(\cos r + 1)^2 + (\cos r - 1)^2 + 4\sin^2 r], \quad (13)$$

$$P_{B,C,D}^{DCCC} = 1/4[2(\cos r + 1)^2 + 3(\cos r - 1)^2 + 4\sin^2 r].$$

اگر آلیس راهبرد C را انتخاب کند و بازیکنان دیگر هم راهبرد C را انتخاب کنند آلیس همواره برنده خواهد بود و نتایج بازیکنان برای نمایه (C, C, C, C) طبق رابطه (۱۲) بصورت $(۲, ۲, ۲, ۸)$ راهبرد D را انتخاب کنند آلیس همواره بازنده خواهد بود. همچنین اگر بازیکنان دستگاه لخت مجاز به انتخاب هر دو راهبرد C و D باشند بازیکنان دستگاه لختی که راهبرد D را انتخاب کرده‌اند همواره برنده و بازیکنان دستگاه لختی که راهبرد C را انتخاب کرده‌اند همواره بازنده خواهند بود. مثلاً برای نمایه (D, C, C, C) طبق رابطه (۱۴) نتایج به دست آمده برای بازیکنان به صورت $(۲, ۹, ۲, ۹, ۱, ۶, ۲, ۹)$ است. همان طور که در شکل ۲ می‌بینیم شتاب تأثیر زیادی در نتایج بازیکنان ندارد. این نتایج نسبتاً شبیه نتایج غیردرهم‌تنیده می‌باشد، با این تفاوت که برای همه بازیکنان چه شتاب‌دار، چه بدون شتاب در حالت درهم‌تنیده راهبرد D ، یک راهبرد غالب است

$$P_{A,B,D}^{DDCD} = 1/4[3(\cos r + 1)^2 + 2(\cos r - 1)^2 + 6\sin^2 r], \quad (14)$$

$$P_C^{DDCD} = 1/4[(\cos r + 1)^2 + 5(\cos r - 1)^2 + 6\sin^2 r].$$



شکل ۲. تابع نتایج برحسب شتاب دستگاه برای حالتی که بازیکنان راهبرد کلاسیکی را بازی کنند.

باشند، بازیکن دستگاه لختی که راهبرد D را انتخاب کرده همواره برنده، و بازیکن دستگاه لخت که راهبرد C را انتخاب کرده همواره بازنده خواهد بود. یعنی در این موارد نوع راهبرد آلیس تأثیری در نتیجه بازی ندارد و نتیجه بازی از روی راهبرد بازیکنان دستگاه لخت تعیین می‌شود. عملاً این نتایج بیان‌کننده یک نتیجه منطقی بازی کلاسیکی است با این تفاوت که در صورت همکاری همه بازیکنان با هم، بازیکنی که در دستگاه نالخت واقع است همواره برنده خواهد بود. در مقایسه با حالت غیردرهم‌تنیده در حد شتاب صفر، می‌توان گفت در حد شتاب بی‌نهایت اگر آلیس راهبرد C را انتخاب کند، تابع نتیجه آن افزایش می‌یابد ولی اگر آلیس راهبرد D را انتخاب کند، تابع نتیجه آن کاهش خواهد یافت، و نیز برای بازیکنان غیرشتاب‌دار اگر نتیجه آلیس کاهش یابد نتایج بازیکنان غیرشتاب‌دار افزایش می‌یابد، و اگر نتیجه آلیس افزایش یابد نتایج سایر بازیکنان کاهش خواهد یافت.

۳.۳. حالت بیشینه درهم‌تنیده در حد شتاب صفر

برای بیشینه درهم‌تنیدگی $(x = \frac{f}{p})$ در حد شتاب صفر، همانند حالت غیردرهم‌تنیده نتایج به دست آمده برای بازیکنان به ازای نمایه‌های متفاوت برابر نتایج کلاسیکی جدول ۱ خواهد بود. این روش آزمونی برای درست بودن نتایج به دست آمده برای بازیکنان در حالت بیشینه درهم‌تنیده می‌باشد. مثلاً برای نمایه

$$P_A^{DDDD} = \frac{1}{4}[(\cos r + 1)^2 + 3(\cos r - 1)^2 + 6\sin^2 r], \quad (16)$$

$$P_{B,C,D}^{DDDD} = \frac{1}{4}[(\cos r + 1)^2 + 3(\cos r - 1)^2 + 5\sin^2 r].$$

در حالت بیشینه درهم تنیده راهبرد D بازیکنان دستگاه لخت نسبت به راهبرد C بازیکنان دستگاه لخت و راهبرد D و C بازیکن نالخت راهبرد غالب می باشد.

۳.۵. مقایسه حالت درهم تنیده و غیردرهم تنیده

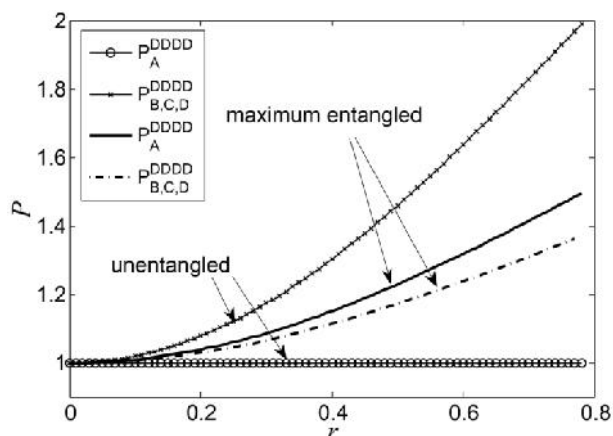
در مقایسه نتایج بازیکنان در حالت درهم تنیده و حالت غیردرهم تنیده به این نتیجه می رسیم که در حالت درهم تنیده، بازیکن دستگاه نالخت تمایل دارد راهبرد C را انتخاب کند و در حالت غیردرهم تنیده تمایل دارد راهبرد D را انتخاب کند. همچنین در حالت درهم تنیده برای مواردی که بازیکنان دستگاه لخت راهبرد C را انتخاب کنند آیس نیز تمایل دارد راهبرد C را انتخاب کند و برای مواردی که بازیکنان دستگاه لخت راهبرد D را انتخاب کنند آیس نیز تمایل دارد راهبرد D را انتخاب کند. نیز برای حالت غیردرهم تنیده، اگر آیس راهبرد D را انتخاب کند بازیکنان دستگاه لخت تمایل دارند راهبرد D را انتخاب کنند و برای حالت درهم تنیده، اگر آیس راهبرد D را انتخاب کند بازیکنان بدون شتاب تمایل دارند راهبرد C را انتخاب کنند.

۳.۶. حالت بیشینه درهم تنیده در حضور راهبرد کوانتومی

حال شرایطی را در نظر می گیریم که بازیکنان از راهبرد فضای کوانتومی استفاده کنند. در این صورت ماتریس تبدیل $Q = U(f, \theta)$ بدین صورت خواهد بود:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

نتایج نشان می دهد وقتی راهبرد کوانتومی وارد بازی می شود، بازیکن دستگاه نالخت با انتخاب راهبرد Q نسبت به انتخاب راهبرد C ، D و یا Q توسط سایر بازیکنان همواره غالب است به شرطی که بازیکنان دستگاه لخت راهبرد یکسانی را انتخاب کنند. به عنوان مثال، برای نمایه (Q, D, D, D) مقادیر به دست آمده برای بازیکنان طبق رابطه (۱۸) به صورت



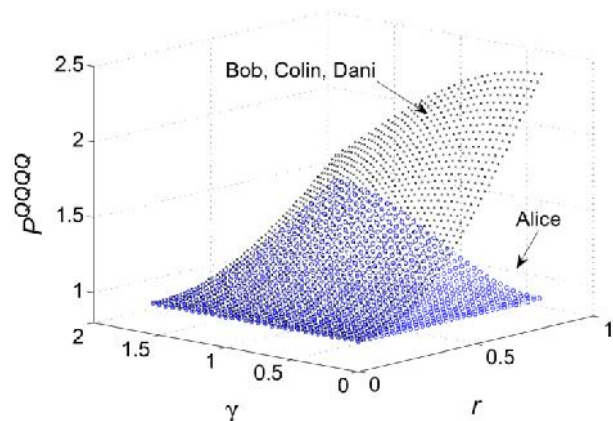
شکل ۳. تابع نتایج بر حسب پارامتر شتاب دستگاه برای حالتی که بازیکنان راهبرد کلاسیکی D را بازی کنند.

همچنین شکل ۲ رفتار توابع زیر را بر حسب r نشان می دهد:

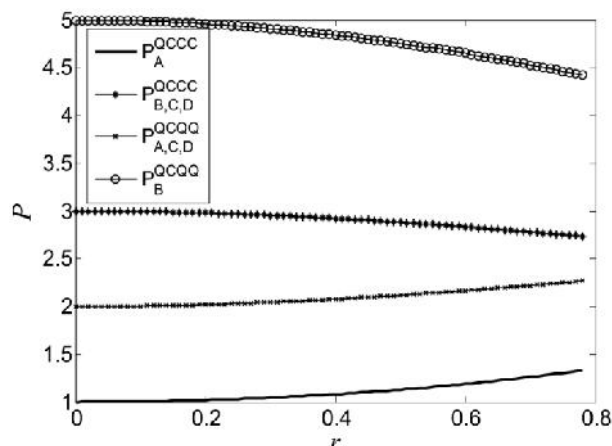
$$P_{A,C,D}^{CDCC} = \frac{1}{4}[2(\cos r + 1)^2 + 3(\cos r - 1)^2 + 6\sin^2 r], \quad (15)$$

$$P_B^{CDCC} = \frac{1}{4}[5(\cos r + 1)^2 + (\cos r - 1)^2 + 6\sin^2 r].$$

همچنین شکل ۳ نشان می دهد که در حالت بیشینه درهم تنیدگی در حد شتاب بی نهایت اگر آیس راهبرد D را انتخاب کند و بازیکنان دیگر نیز راهبرد D را انتخاب کنند، آیس همواره برنده خواهد بود و نیز اگر بازیکنان دیگر راهبرد C را انتخاب کنند، آیس همواره برنده خواهد بود، که درهم تنیدگی عاملی شده است که در این موارد نوع راهبرد بازیکنان دستگاه لخت تأثیری در نتیجه آیس نداشته باشد. و نیز شکل ۳ نشان می دهد در حالت غیردرهم تنیده در حد شتاب بی نهایت اگر همه بازیکنان راهبرد D را انتخاب کنند، آیس همواره بازنده خواهد بود. به جز تابع مربوط به آیس در حالت غیردرهم تنیده، توابع مربوط به بازیکنان در حالت درهم تنیده طبق رابطه (۱۶) و تابع مربوط به باب، کالین و دنی در حالت غیردرهم تنیده با افزایش شتاب سیر صعودی خواهند داشت. همچنین نمایه (C, C, C, C) و (D, D, D, D) برای بازیکنان نقطه مقابل تعادل نش می باشد و بازیکنان به یک حالت بی تفاوتی می رسند، که مقادیر به دست آمده برای بازیکنان طبق شکل (۱۲) و (۱۶) به ترتیب برابر $(2/9, 2/8, 2/8, 2/8)$ و $(1/5, 1/4, 1/4, 1/4)$ می باشند. در این موارد بازیکنان تمایل دارند که راهبرد خود را تغییر دهند، چون نتیجه بهتری به دست می آورند



شکل ۵. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تابع نتایج برای حالتی که بازیکنان راهبرد Q را بازی کنند.



شکل ۴. تابع نتایج برای حالتی که بازیکنان راهبرد کلاسیکی و کوانتومی را بازی کنند.

$$\begin{aligned}
 P_{A,C,D}^{QCCQ} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[2(\cos r + 1)^2 + n(\cos r - 1)^2 + 6\sin^2 r], \\
 P_A^{QCCQ} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[2(\cos r + 1)^2 + 3(\cos r - 1)^2 + 5\sin^2 r], \\
 P_B^{QCCC} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[3(\cos r + 1)^2 + n(\cos r - 1)^2 + 4\sin^2 r].
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

همچنین شکل ۵ نشان می‌دهد در حالت غیردرهم‌تنیده با افزایش شتاب، تابع نتیجه آلیس تغییر نمی‌کند ولی تابع نتیجه باب، کالین و دنی شیب صعودی دارد، و در حد شتاب بی‌نهایت به بیشینه مقدار، یعنی ۲ می‌رسد. همچنین با افزایش درهم‌تنیدگی در حد شتاب صفر نتایج بازیکنان تغییر نمی‌کند. در حد شتاب بی‌نهایت با افزایش درهم‌تنیدگی تابع نتیجه آلیس افزایش می‌یابد، ولی تابع نتایج باب، کالین و دنی کاهش می‌یابد تا این که به یک حالت بی‌تفاوتی می‌رسند.

در حالت بیشینه درهم‌تنیده در حد شتاب بی‌نهایت نتایج به دست آمده برای بازیکنان به ازای نمایه‌های (Q, Q, Q, Q) و (D, Q, Q, D) و (D, D, D, D) طبق رابطه (۲۰) برابر $(1/5, 1/4, 1/4, 1/4)$ است. این نقطه، نقطه مقابل تعادل نش است. در این حالت، بازیکنان به یک حالت بی‌تفاوتی می‌رسند که همه بازیکنان تمایل دارند راهبرد خود را تغییر دهند چون با تغییر راهبرد خود نتایج بهتری به دست می‌آورند. می‌بینیم که وقتی راهبرد کوانتومی وارد بازی می‌شود، تمایزی بین راهبرد D و Q بازیکنان چه شتاب‌دار و چه لخت وجود ندارد، یعنی بازیکنان هر انتخاب متفاوتی از D و Q داشته باشند نتایج یکسانی به دست می‌آورند:

$(2/9, 2/8, 2/8, 2/8)$ است که نقطه مقابل تعادل نش می‌باشد و بازیکنان به یک حالت بی‌تفاوتی می‌رسند

$$\begin{aligned}
 P_A^{QDDD} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[3(\cos r + 1)^2 + (\cos r - 1)^2 + 6\sin^2 r], \\
 P_{B,C,D}^{QDDD} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[3(\cos r + 1)^2 + (\cos r - 1)^2 + 5\sin^2 r].
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

اگر بازیکنان دستگاه لخت مجاز به انتخاب راهبردهای D, C و Q باشند بازیکن دستگاه لخت که راهبرد D را انتخاب کرده است نسبت به بازیکن دستگاه لخت که راهبرد Q را انتخاب کرده نتیجه بهتری به دست می‌آورد. همچنین بازیکن دستگاه لخت که راهبرد C را انتخاب کرده است نسبت به بازیکن دستگاه لخت که راهبرد Q را انتخاب کرده نتیجه کمتری به دست می‌آورد. اگر آلیس راهبرد Q را انتخاب کند و بازیکنان لخت هرکدام راهبرد C, D و Q را انتخاب کنند بازیکنی که راهبرد C را انتخاب کرده بازنده و بازیکنان دیگر برنده خواهند بود که بیانگر این است که انتخاب راهبرد کوانتومی برای بازیکنان دستگاه لخت و بازیکن شتاب‌دار باعث می‌شود که بازیکنی که راهبرد کوانتومی را انتخاب کرده است برنده باشد. شکل ۴ نشان می‌دهد طبق توابع نتایج رابطه (۱۹) وقتی آلیس راهبرد کوانتومی را انتخاب می‌کند، اگر بازیکنان دستگاه لخت راهبرد کوانتومی را انتخاب کنند شیب شکل تابع نتایج آنها با افزایش شتاب افزایش می‌یابد، ولی اگر بازیکنان دستگاه لخت راهبرد C را انتخاب کنند شیب شکل تابع نتایج آنها با افزایش شتاب کاهش می‌یابد.

ذره‌ای که تأثیر شتاب در نتایج دیده نمی‌شود ولی در دستگاه چهار ذره‌ای تأثیر شتاب در نتایج بازیکنان شایان توجه است و با اتخاذ راهبردهای کلاسیکی و کوانتومی یکسان برای بازیکنان، بازیکنان شتاب‌دار همواره بازنده خواهند بود. صرف نظر از این نتیجه اتخاذ راهبرد کوانتومی برای بازیکنان نتایج یکسانی نسبت به راهبرد D و نتایج کمتری نسبت به راهبرد C خواهد داشت.

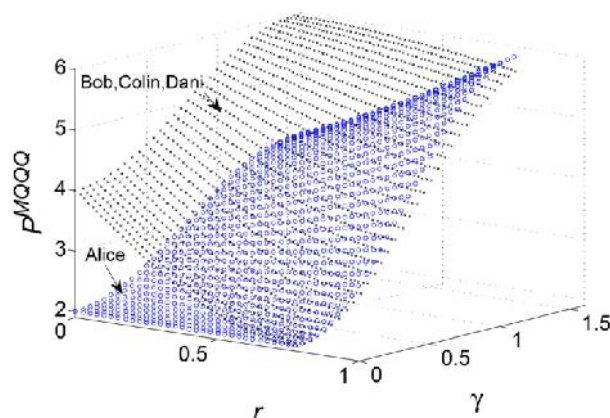
۳.۸ حرکت معجزه‌آسای آیزرت

در نهایت، تأثیر دستگاه نالخت روی نتایج بازیکنان زمانی که یک بازیکن به فضای راهبردی کلاسیکی محدود می‌شود و سایر بازیکنان اجازه می‌یابند تا هر حرکتی از فضای راهبردی کوانتومی را انتخاب نمایند را در نظر می‌گیریم. این انتخاب فضاهای راهبردی بازی غیرمنصفانه‌ای را هم برای بازیکن دستگاه نالخت و هم بازیکنان لخت سبب می‌شود. حرکتی برای بازیکنان کوانتومی وجود دارد تا از بازیکنان کلاسیکی پیشی بگیرند این حرکت در مرجع [۳] بعنوان حرکت معجزه‌آسا که منجر به نتیجه بهتر می‌شود شناخته شده است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M = U \left(-\frac{f}{\sqrt{2}}, \frac{f}{\sqrt{2}} \right) = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

شکل ۶ نشان می‌دهد در حالت غیردرهم تنیده، با افزایش شتاب تابع نتیجه آلیس تغییر نمی‌کند ولی تابع نتایج باب، کالین و دنی کاهش می‌یابد و در حد شتاب بی‌نهایت به مقدار ۲ می‌رسد. همچنین با افزایش درهم تنیدگی در حد شتاب صفر تابع نتایج بازیکنان افزایش می‌یابد، در حد شتاب بی‌نهایت با افزایش درهم تنیدگی تابع نتایج بازیکنان افزایش می‌یابد، تا این که به یک حالت بی‌تفاوتی می‌رسند.

در حد شتاب بی‌نهایت نمایه (M, Q, Q, Q) طبق رابطه (۲۲) برابر $(6/9, 6/7, 6/7, 6/7)$ است که برای بازیکنان نقطه مقابل تعادل نش می‌باشد. می‌بینیم که حرکت معجزه‌آسای آیزرت باعث شده نه تنها تابع نتیجه آلیس سیر صعودی داشته باشد، بلکه بازیکنان دستگاه لخت نیز مقادیر قابل توجهی را اخذ کنند:



شکل ۶. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تابع نتایج برای حالتی که آلیس راهبرد M و بازیکنان دیگر راهبرد Q را بازی کنند.

$$\begin{aligned} P_A^{QQQQ} &= P_A^{DDDD} = P_A^{DQQD} = P_A^{QDDQ} = P_A^{QDQD} \\ &= 3 \sin^2 \frac{\chi}{\psi} \cos^2 \frac{\chi}{\psi} [1 - \cos r]^2 + [\sin^2 \frac{\chi}{\psi} + \cos^2 \frac{\chi}{\psi} \cos r]^2 \\ &\quad + \cos^2 \frac{\chi}{\psi} \sin^2 r + 2 \sin^2 \frac{\chi}{\psi} \cos^2 \frac{\chi}{\psi} \sin^2 r, \\ P_{B,C,D}^{QQQQ} &= P_{B,C,D}^{DDDD} = P_{B,C,D}^{DQQD} = P_{B,C,D}^{QDDQ} = P_{B,C,D}^{QDQD} \\ &= 3 \sin^2 \frac{\chi}{\psi} \cos^2 \frac{\chi}{\psi} [2 - \cos r]^2 + [\sin^2 \frac{\chi}{\psi} + \cos^2 \frac{\chi}{\psi} \cos r]^2 \\ &\quad + 3 \cos^2 \frac{\chi}{\psi} \sin^2 r + 2 \sin^2 \frac{\chi}{\psi} \cos^2 \frac{\chi}{\psi} \sin^2 r. \end{aligned} \quad (20)$$

۳.۷ مقایسه با نتایج بازی دو و سه کیوبیتی در دستگاه نالخت

برای حالت غیردرهم تنیده، با مقایسه دستگاه چهار ذره‌ای با سه ذره‌ای به این نتیجه می‌رسیم که بازیکنان شتاب‌دار تأثیری در نتیجه بازی ندارند و نتیجه بازی فقط از روی راهبرد بازیکنان ثابت تعیین می‌شود. برای دستگاه سه ذره‌ای که باب و کالین شتاب‌دار هستند نمایه (C, C, D) برابر $(2/6, 2/6, 2/8)$ می‌باشد. ولی در مقایسه با دستگاه چهار ذره‌ای با یک ذره شتاب‌دار می‌بینیم که راهبرد بازیکن شتاب‌دار تأثیر مستقیم بر روی نتایج بازیکنان دیگر دارد. در دستگاه چهار ذره‌ای با یک ذره شتاب‌دار بازیکنان در حضور راهبرد کوانتومی تمایل دارند شتاب‌دار باشند. برای دستگاه چهار ذره‌ای که آلیس شتاب‌دار است نمایه (Q, Q, Q, Q) برابر $(1/4, 1/4, 1/4, 1/5)$ می‌باشد. برخلاف دستگاه دو

شد که نتایج بازیکنان چه شتاب‌دار چه بدون شتاب وابستگی مستقیم با نحوه انتخاب راهبردهای اولیه و نتایج بازیکنان دیگر داشته باشد. همچنین در حالت غیردرهم‌تنیده نمایه‌های (C,C,C,C) ، (D,D,D,D) ، (Q,Q,Q,Q) ، (D,Q,Q,D) ، (D,D,D,D) برای بازیکنان نقاط مقابل تعادل نش می‌باشند. برای حالت غیردرهم‌تنیده با مقایسه دستگاه چهار ذره‌ای با سه‌ذره‌ای به این نتیجه می‌رسیم که بازیکنان شتاب‌دار تأثیری در نتیجه بازی ندارند و نتیجه بازی فقط از روی راهبرد بازیکنان لخت تعیین می‌شود. در ناحیه شتاب نامحدود در حالت غیردرهم‌تنیده تقارن بازی از بین می‌رود. در دستگاه چهار ذره‌ای با یک ذره شتاب‌دار وقتی راهبرد کوانتومی وارد بازی می‌شود بازیکنان تمایل دارند شتاب‌دار باشند، زیرا وقتی راهبرد کوانتومی وارد بازی می‌شود بازیکنان شتاب‌دار نسبت به بازیکنان دستگاه لخت نتایج بهتری به دست می‌آورند. حرکت معجزه‌آسای آیزرت باعث شد که همه بازیکنان نتایج در خور توجهی را اخذ کنند و نمایه (M,Q,Q,Q) برای بازیکنان نقطه مقابل نش می‌باشد. برخلاف دستگاه دو ذره‌ای که تأثیر شتاب در نتایج دیده نمی‌شود، در دستگاه چهار ذره‌ای تأثیر شتاب در نتایج بازیکنان شایان توجه است و با اتخاذ راهبردهای کلاسیکی و کوانتومی یکسان برای بازیکنان، بازیکنان شتاب‌دار همواره بازنده خواهند بود. این که بتوان رابطه صریحی برای میزان درهم‌تنیدگی با افزایش بیت‌های کوانتومی به دست آورد می‌تواند از اهمیت ویژه‌ای برخوردار باشد.

$$P_A^{MQQQ} = \mathcal{V} \left[\sin \frac{\chi}{\mathcal{V}} \cos \frac{\chi}{\mathcal{V}} [\cos r + \sin r + 1] \right]^2 + \left[\sin^2 \frac{\chi}{\mathcal{V}} - \cos^2 \frac{\chi}{\mathcal{V}} [\cos r + \sin r] \right]^2 + [\cos^2 \frac{\chi}{\mathcal{V}} [\cos r - \sin r] + \sin^2 \frac{\chi}{\mathcal{V}}]^2 + 5 \left[\sin \frac{\chi}{\mathcal{V}} \cos \frac{\chi}{\mathcal{V}} [\sin r - \cos r + 1] \right]^2, \quad (22)$$

$$P_{B,C,D}^{MQQQ} = \mathcal{V} \left[\sin \frac{\chi}{\mathcal{V}} \cos \frac{\chi}{\mathcal{V}} [\cos r + \sin r + 1] \right]^2 + \left[\sin^2 \frac{\chi}{\mathcal{V}} - \cos^2 \frac{\chi}{\mathcal{V}} [\cos r + \sin r] \right]^2 + \mathcal{V} [\cos^2 \frac{\chi}{\mathcal{V}} [\cos r - \sin r] + \sin^2 \frac{\chi}{\mathcal{V}}]^2 + \mathcal{V} \left[\sin \frac{\chi}{\mathcal{V}} \cos \frac{\chi}{\mathcal{V}} [\sin r - \cos r + 1] \right]^2.$$

۴. نتیجه‌گیری

در این تحقیق، مسئله بازی کوانتومی دستگاه چهار ذره‌ای با یک ذره شتاب‌دار بررسی شد. اساساً بازیکنان تمایل به ادامه بازی با تعداد بازیکنان زیاد دارند، زیرا صرف نظر از اتخاذ راهبردهای کوانتومی و کلاسیکی متفاوت، به جز موارد خاص، نسبت به دستگاهی که تعداد بازیکنان کمتر است نتایج خوبی به دست می‌آورند. در این دستگاه با توجه به افزایش تعداد بازیکنان نسبت به دستگاه دو ذره‌ای و سه‌ذره‌ای، شرایط بازی بسیار پیچیده‌تر شد و نتوانستیم به نقطه تعادل نش جدیدی برسیم ولی نقش درهم‌تنیدگی در نتایج بازیکنان شفاف‌تر بود، به خصوص برای بازیکنان دستگاه لخت که درهم‌تنیدگی نتایج بازیکنان دستگاه لخت را تقویت کرد. نیز درهم‌تنیدگی باعث

مراجع

1. D A Meyer, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 1052.
2. J von Neumann, O Morgenstern, "The Theory of Games and Economic Behavior", Princeton University Press (1944).
3. J Eisert, J Wilkens, and M Lewenstein, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3077.
4. L Marinatto and T Weber, *Phys. Lett. A* **272** (2000) 291.
5. H Li, J Du, and S Massar, *Phys. Lett. A* **306** (2002) 73.
6. C F Lo and D Kiang, *Phys. Lett. A* **321** (2004) 94.
7. A P Flitney and D Abbott, *Phys. Rev. A* **65** (2002) 062318.
8. A Iqbal and A H Toor, *Phys. Rev. A* **65** (2002) 052328.
9. A P Flitney, J Ng and D Abbott, *Physica A* **314** (2002) 35.
10. L Goldenberg, L Vaidman, and S Wiesner, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 3356.
11. S Khan, M Ramzan, and M K Khan, *Chin. Phys. Lett.* **27** (2010) 080302.
12. L K Chen, H Ang, D Kiang, L C Kwek, and C F Lo, *Phys. Lett. A* **316** (2003) 317.

21. H Goudarzi and S Beyrami, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** (2012) 225301.
22. M Kh Salman khan, *Quantum Inf. Process* **12** (2013) 1351.
23. H Goudarzi and S Birami, *Iranian Journal of Physics Research* **12**, 4 (2013) 387.
۲۳. ه گودرزى و س بیرامى، مجله پژوهش فیزیک ایران ۱۲، ۴ (۱۳۹۱) ۳۸۷.
24. P C W Davies, *J. Phys. A: Math. Gen.* **8** (1975) 609.
25. S Takagi, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **88** (1986) 1.
26. W Unruh, and R Wald, *Phys. Rev. D* **29** (1984) 1047.
13. A P Flitney and D Abbott, *J. Phys. A Math. Gen.* **38** (2005) 449.
14. S Khan, M Ramzan, and M K. Khan *Int. J. Theo Phys.* **49** (2010) 31.
15. P M Alsing, I Fuentes-Schuller, R B Mann, and T E Tessier, *Phys. Rev. A* **74** (2006) 032326.
16. Y Ling, S He, W Qiu and H Zhang, *J. Phys. A Math. Theor.* **40** (2007) 9025.
17. R M Gingrich and C Adami, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 270402.
18. Q Pan and J Jing, *Phys. Rev. A* **77** (2008) 024302.
19. I Fuentes-Schuller and R B Mann, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 120404.
20. H Terashima and M Ueda, *Int. J. Quantum Inf.* **1** (2003) 93.