

## دینامیک مدهای لبه‌ای در مدل کیتائف بلندبرد

سعید انصاری<sup>۱</sup> و روح ا... جعفری<sup>۲</sup>

۱. گروه علوم مهندسی و فیزیک، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره) - مرکز آموزش عالی فنی و مهندسی بوین‌زهره، بوین‌زهره

۲. دانشکده فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان

پست الکترونیکی: ansari@bzte.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۸/۳۰؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۰۹/۱۲)

### چکیده

در این مقاله دینامیک زنجیره ابرسانایی موج  $p$  با برهمکنش و جنبش بلندبرد را پس از دگرگونی ناگهانی پتانسیل شیمیایی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. نشان داده‌ایم که اگر دگرگونی ناگهانی به نقطه بحرانی سیستم انجام شود گذار فاز کلاسیکی - کوانتومی رخ می‌دهد و پژواک لاشمیت رفتار کاملاً تناوبی خواهد داشت. همچنین گذار فاز دینامیکی را برای دگرگونی در عبور از نقطه بحرانی مورد بررسی قرار دادیم. تحلیل‌های ما نشان می‌دهد که گذار فاز دینامیکی هنگامی روی می‌دهد که حالت اولیه سیستم مد لبه‌ای بدون جرم باشد. در حالی که اگر حالت اولیه مدهای لبه‌ای جرم‌دار باشند، حتی اگر دگرگونی از نقطه بحرانی عبور کند، سیستم دیگر گذار فاز دینامیکی نشان نخواهد داد.

**واژه‌های کلیدی:** ابرسانایی موج  $p$ ، زنجیره کیتائف بلند برد، مدهای لبه‌ای مایورانا، گذار فاز دینامیکی

### ۱. مقدمه

متفاوت در این سیستم به واسطه وجود یا عدم وجود مدهای مایورانای بدون جرم در لبه‌های یک زنجیره بلند با شرایط مرزی باز تعیین می‌شوند. فازهایی که مدهای مایورانای بدون جرم دارند را فاز غیر بدیهی توپولوژیکی و بقیه را فاز بدیهی می‌نامند. تعداد این مدها ناوردا توپولوژیکی است، به این معنی که مقدار آن تغییر نخواهد کرد مگر این که سیستم به نحوی دچار تحول شود که از مرز بین فازهای توپولوژیکی و بدیهی عبور کند.

از جمله سیستم‌هایی که در آنها فرمیون‌های مایورانا به صورت مدهای لبه‌ای عمل می‌کنند می‌توان به ابرسانای سه‌گانه

ویژگی‌های توپولوژیکی ابرسانای بدون اسپین موج  $p$  که توسط کیتائف معرفی شد [۱]، از جنبه‌های گوناگونی مورد مطالعه قرار گرفته است [۲-۸]. ابرسانای موج  $p$  یک سیستم توپولوژیکی است که حاوی مدهای مایورانای لبه‌ای به شکل برانگیختگی‌های گاف میانی<sup>۱</sup> بوده و این مدها به دلیل وجود تقارن ذره-حفره در سیستم حفظ می‌شوند. در واقع جمله مربوط به جفت‌شدگی ابرسانایی در هامیلتونی، عامل ایجاد برانگیختگی‌های بدون جرم در این سیستم است. فازهای

۱. Midgap

[۱۹-۲۱]. از جمله، رفتار مدهای لبه‌ای تحت تأثیر دگرگونی کوانتومی برای یک عایق توپولوژیک دوبعدی مورد بررسی قرار گرفته [۲۲] و مشخص شده است که در اثر دگرگونی ناگهانی، حالت اولیه سیستم احیاء خواهد شد [۲۳]. در تحقیق دیگری به پایداری فرمیون‌های مایورانا در لبه یک ابررسانای توپولوژیک دوبعدی با جفت‌شدگی اسپین-مدار و در حضور اثر زیمان پرداخته شده است [۲۴]. نتایج مشابهی نیز در مطالعه بر روی مدل کیتائف یک‌بعدی به دست آمده است [۲۵].

طبق مطالعات اولیه ای که در این زمینه انجام شده است در دگرگونی ناگهانی ناشی از تغییر یک پارامتر در هامیلتونی اگر مقدار اولیه و نهایی پارامتر در دو فاز تعادلی مختلف باشد، تابع نرخ پژواک لاشمیت رفتار غیر تحلیلی خواهد داشت که آن را گذار فاز دینامیکی می‌نامند [۲۶-۳۹]. همچنین اگر سیستم به صورت ناگهانی در نقطه بحرانی‌اش واقع شود پژواک لاشمیت رفتار تناوبی بسیار جالبی از خود بروز می‌دهد که به گذار فاز کلاسیکی-کوانتومی معروف است [۴۵-۳۸].

ما در این مقاله دینامیک مد مایورانای لبه‌ای بدون جرم را در زنجیره ابررسانای موج  $p$  بلندبرد که طول متناهی دارد، پس از ایجاد دگرگونی ناگهانی در سیستم، مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

## ۲. دگرگونی کوانتومی ناگهانی و پژواک لاشمیت

یک سیستم کوانتومی بسته را در نظر می‌گیریم که هامیلتونی آن،  $H(\lambda)$ ، به پارامتر  $\lambda$  بستگی دارد.  $\lambda$  می‌تواند مشخص‌کننده کمیت‌های مختلفی از جمله میزان جفت‌شدگی برهمکنش‌ها و میدان‌های خارجی مؤثر بر سیستم باشد. به منظور ایجاد دگرگونی کوانتومی ناگهانی در سیستم باید مقدار یک یا چند پارامتر در هامیلتونی به صورت آنی تغییر کند. فرض کنید سیستم کوانتومی  $H(\lambda)$  که در زمان  $t < 0$  توسط پارامتر  $\lambda$  با مقدار اولیه  $\lambda_1 = \lambda$  و ویژه‌حالت اولیه  $|\psi_0(\lambda_1)\rangle$  توصیف می‌شود. در زمان  $t = 0$  مقدار  $\lambda$  به طور ناگهانی از  $\lambda_1$  به  $\lambda_2$  تغییر می‌کند. در اثر این تغییر سریع، سیستم تحت تأثیر

دوبعدی [۹]، زنجیره مارپیچ [۱۰] و شبکه دوبعدی شیب [۱۱]، صفحه ابررسانایی رشب [۱۲] و همچنین سیستم‌های مختلف دیگری اشاره کرد که در آنها پارامتر نظم ابررسانایی با میدان زیمان و یا جفت‌شدگی اسپین-مدار ترکیب شده باشد [۱۳]. این سیستم‌ها به دو دلیل مورد توجه قرار گرفته‌اند، اول به عنوان بستری برای بررسی آزمایشگاهی و آشکارسازی فرمیون‌های مایورانا [۱۴] و دوم به این دلیل که ابررساناهای توپولوژیک به دلیل پایدار بودن در مقابل اختلالات کوانتومی [۱۴ و ۱۵] می‌توانند به عنوان المان‌های محاسبات کوانتومی مورد استفاده قرار گیرند [۱۶-۱۸].

پایداری سیستم‌های توپولوژیک یکی از ویژگی‌های کلیدی آنها است و بنابراین مطالعه میزان پایداری آنها در مقابل اختلالات گوناگون حائز اهمیت خواهد بود. به ویژه می‌توان واکنش این سیستم‌ها را نسبت به اختلالات کوانتومی و از جمله دگرگونی کوانتومی<sup>۱</sup> مورد بررسی قرار داد. میزان تحول سیستمی که دگرگونی ناگهانی در آن رخ داده است توسط کمیتی به نام پژواک لاشمیت<sup>۲</sup> (که میزان همپوشانی بین ویژه‌حالت اولیه هامیلتونی و ویژه‌حالت تحول‌یافته بعد از دگرگونی ناگهانی را اندازه‌گیری می‌کند) قابل محاسبه است. از جمله مواردی که می‌توان در نظر گرفت، تأثیر دگرگونی ناگهانی پارامترهایی در هامیلتونی است که ویژگی توپولوژیک سیستم را کنترل می‌کنند به خصوص، می‌توان نحوه تأثیر این دسته از دگرگونی‌های ناگهانی را بر ویژگی‌های توپولوژیک و مدهای لبه‌ای و همچنین میزان پایداری<sup>۳</sup> آنها مورد بررسی قرار داد. برای مثال، در تحقیقات صورت گرفته بر روی مدل کد چنبره<sup>۴</sup> نشان داده شده است که سیستم‌های توپولوژیک در مقابل دگرگونی کوانتومی پایدار هستند [۱۴ و ۱۵].

دینامیک ایجاد شده بعد از دگرگونی کوانتومی، یکی از روش‌های به وجود آمدن فرمیون‌های مایورانا در یک سیستم است که بستر مناسبی برای مطالعه بر روی آنها ایجاد می‌کند

۱. Quantum quench

۲. Loschmidt echo

۳. Robustness

۴. Toric code model

می‌شود. این ویژگی را احیای<sup>۴</sup> حالت اولیه می‌نامند که وقوع آن را می‌توان با بررسی پژواک لاشمیت تعیین کرد. این نوع رفتار پژواک لاشمیت را که فقط برای دگرگونی به نقطه بحرانی قابل مشاهده است گذار فاز کلاسیکی - کوآتومی نامیده‌اند. در حالتی که دگرگونی ناگهانی به نقطه‌ای به جز نقطه بحرانی انجام شود رفتار پژواک لاشمیت تناوبی نبوده و نوسانی سریع حول مقدار میانگین خواهد داشت.

### ۳. مدل زنجیره کیتائف تعمیم یافته

در مدل تعمیم یافته کیتائف، جملات مربوط به جنبش فرمیون‌ها و برهم‌کنش آنها بلندبرد هستند به نحوی که فرمیون‌ها می‌توانند به هر نقطه از شبکه جابه‌جا شوند و همچنین با تمام فرمیون‌های دیگر، در هر مکانی در زنجیره که باشند، برهم‌کنش داشته باشند. هامیلتونی این مدل در حضور پتانسیل شیمیایی  $\mu$  به شکل زیر داده می‌شود [۵۱]:

$$H = \sum_{j=1}^N \left[ \Delta \sum_{l=1}^{N/r} l^{-\alpha_p} (c_j^\dagger c_{j+l}^\dagger - c_j c_{j+l}) + w \sum_{l=1}^{N/r} l^{-\alpha_h} (c_j^\dagger c_{j+l} - c_j c_{j+l}^\dagger) \right] + \mu \sum_{j=1}^N \left( c_j^\dagger c_j - \frac{1}{r} \right), \quad (4)$$

که در آن  $c_j^\dagger$  و  $c_j$  عملگرهای خلق و فنا هستند و در روابط پادجابه‌جایی فرمیونی  $\{c_i, c_j\} = 0$  و  $\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij}$  صدق می‌کنند. ضرایب جملات مربوط به جنبش و جفت‌شدگی را به نحوی در نظر می‌گیریم که متناسب با فاصله بین دو نقطه شبکه به صورت قاعده توانی کاهش پیدا کنند که در آن  $l$  فاصله بین دو نقطه زنجیره و توان‌های  $\alpha_p$  و  $\alpha_h$  اعداد غیرمنفی هستند که مقدار آنها، به ترتیب، مشخص کننده میزان افت شدت برهم‌کنش و جنبش فرمیون‌ها است.  $w$  و  $\Delta$  نیز اعداد حقیقی هستند که به ترتیب نرخ تونل زنی و شدت جفت‌شدگی موج  $p$  فرمیونی نامیده می‌شوند. واضح است که اگر مقادیر  $\alpha_p$  و  $\alpha_h$  به سمت بی‌نهایت بروند در این صورت همان مدل کیتائف کوتاه برد را خواهیم داشت.

هامیلتونی تغییر یافته،  $H(\lambda_r)$ ، دچار تحول زمانی یکانی<sup>۱</sup> می‌شود. از آنجا که هامیلتونی جملات درجه دوم دارد، ویژه‌حالت‌های آن را می‌توان به راحتی با حل مدهای تک - ذره‌ای توسط معادلات بوگولیوف - دو ژن به دست آورد. با توجه به تغییر هامیلتونی، در زمان  $t \geq 0$ ، حالت اولیه دیگر ویژه‌حالت  $H(\lambda_r)$  نیست و به صورت زیر دچار تحول زمانی می‌شود

$$|\psi_r(\lambda_r, t)\rangle = e^{-iH(\lambda_r)t} |\psi_r(\lambda_r)\rangle, \quad (1)$$

اگر ویژه‌حالت‌های هامیلتونی  $H(\lambda_r)$  را با  $|\psi_m(\lambda_r)\rangle$  و ویژه مقادیر آن را با  $E_m(\lambda_r)$  نمایش دهیم، در این صورت حالت تحول یافته را می‌توان از رابطه

$$|\psi_r(\lambda_r, t)\rangle = \sum_m e^{-iE_m(\lambda_r)t} |\psi_m(\lambda_r)\rangle \langle \psi_m(\lambda_r) | \psi_r(\lambda_r) \rangle, \quad (2)$$

تعیین کرد. به منظور بررسی تحول زمانی ویژه‌حالت‌ها می‌توان از پژواک لاشمیت (LE) [۴۶] استفاده کرد که در فیزیک سیستم‌های بس‌ذره‌ای کاربرد بسیاری دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L}(\lambda_r, \lambda_r, t) = \left| \langle \psi_r(\lambda_r) | e^{iH(\lambda_r)t} | \psi_r(\lambda_r) \rangle \right|^2, \quad (3)$$

پژواک لاشمیت در واقع میزان همپوشانی بین حالت اولیه و حالت تحول یافته زمانی آن است. هر چه مقدار پژواک لاشمیت بزرگ‌تر باشد به این معنی است که سیستم به حالت اولیه خود نزدیک‌تر شده است. در حالت کلی بزرگی پژواک لاشمیت در مدت زمان کوتاهی، که آن را زمان واهلش<sup>۲</sup> ( $T_{\text{Rel}}$ ) می‌نامند، به صورت نمایی، از مقدار واحد (در زمان  $t=0$ ) به یک مقدار میانگین کاهش می‌یابد و حول مقدار میانگینی افت و خیر خواهد داشت [۴۷].

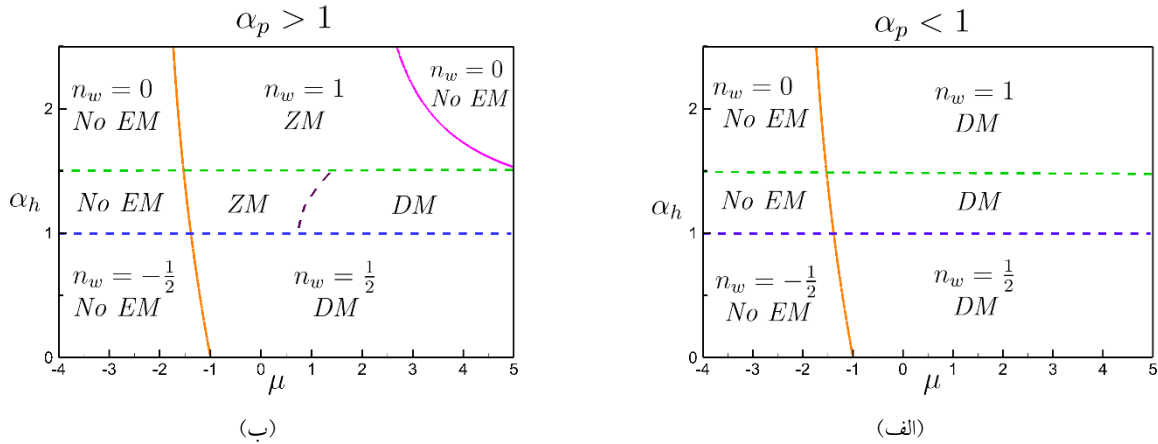
در سیستم متناهی اگر دگرگونی ناگهانی به نقطه بحرانی انجام شود، تحول زمانی سیستم رفتار شبه-تناوبی<sup>۳</sup> خواهد داشت [۴۵، ۴۸-۵۰] و سیستم در دوره‌های زمانی مشخصی که به اندازه سیستم وابسته است، دوباره به حالت اولیه نزدیک

۱. Unitarily time evolution

۲. Relaxation time

۳. Quasi-periodic

۴. Revival



شکل ۱. نمودار فاز توپولوژیکی مدل کیتائف تعمیم یافته برای (الف)  $\alpha_p < 1$  و (ب)  $\alpha_p > 1$  [۵۲]. مدهای جرم‌دار دیراک، ZM: مدهای مایورانا، EM: مدهای لبه‌ای.

دارد که به معنی وجود مدهای بدون جرم مایورانا است. برای  $\alpha_h < 1$ ، مدل حاوی مد جرم‌دار دیراک<sup>۲</sup> (MDM) خواهد بود که با عدد پیچش<sup>۳</sup> نیم-صحیح مشخص می‌شوند اما محدوده بین این دو ناحیه یعنی  $1 < \alpha_h < 3/2$  فاقد عدد پیچش معین است.

در بخش بعد با استفاده از قطری‌سازی دقیق [۵۲] می‌توانیم ویژه‌حالت‌ها و ویژه‌بردارهای هامیلتونی را در فضای حقیقی به دست بیاوریم و سپس سیستم را در لحظه  $t = 0$  در حالت اولیه یکی از مدهای لبه‌ای آماده می‌کنیم. با تغییر ناگهانی مقدار پتانسیل شیمیایی در لحظه  $t > 0$  سیستم به دلیل تغییر ناگهانی توانایی گذار به حالت پایه هامیلتونی تغییر یافته را نخواهد داشت. به همین دلیل سیستم در حالت اولیه (مد لبه‌ای) باقی می‌ماند اما تحول زمانی سیستم با هامیلتونی تغییر یافته انجام خواهد شد.

#### ۴. گذار فاز کلاسیکی - کوانتومی

به منظور بررسی دینامیک مدهای لبه‌ای، فرض می‌کنیم حالت اولیه سیستم ویژه‌بردار متناظر با مدهای لبه‌ای باشد. برای ایجاد دینامیک در سیستم، مقدار پتانسیل شیمیایی را در زمان  $t = 0$  به طور ناگهانی تغییر داده و مقدار آن از  $\mu_i$  به  $\mu_f$  تبدیل می‌کنیم.

همچنین اگر در هامیلتونی جفت‌شدگی کوتاه‌برد باشد و فقط نزدیک‌ترین همسایه‌ها برهمکنش داشته باشند، در این صورت هامیلتونی معادل با هامیلتونی مدل اسپینی XY در حضور پتانسیل شیمیایی است، اما در شرایطی که مدل تعمیم‌یافته را در نظر بگیریم دیگر چنین مشابهتی وجود ندارد.

نمودار فاز توپولوژیکی مدل کیتائف بلندبرد در شکل ۱ رسم شده است [۵۲]. وجود گذار فاز توپولوژیکی با محاسبه کمیتی به نام عدد پیچش<sup>۱</sup> ( $n_w$ ) تعیین می‌شود. همان‌طور که دیده می‌شود در شرایطی که  $\alpha_p < 1$  باشد فقط یک خط بحرانی وجود دارد که تابعی از نرخ تونل‌زنی،  $\alpha_h$ ، است. اگر  $\alpha_p > 1$  باشد، دو خط بحرانی خواهیم داشت که یکی از آنها دقیقاً همان خط بحرانی در حالت  $\alpha_p < 1$  و دیگری صرفاً برای مقادیر  $\alpha_h > 3/2$  رخ می‌دهد. در هر حالت نقطه بحرانی ( $\mu_c$ ) به بزرگی  $\alpha_h$  بستگی دارد. برای مثال برای محدوده  $\alpha_p < 1$  و با فرض  $\alpha_h = 0$ ، گذار فاز در  $\mu_c = -1$  رخ می‌دهد. مقادیر بحرانی در حالت کلی با استفاده از تابع زتای ریمان و تابع اتای دیریکله به صورت زیر مشخص می‌شوند:

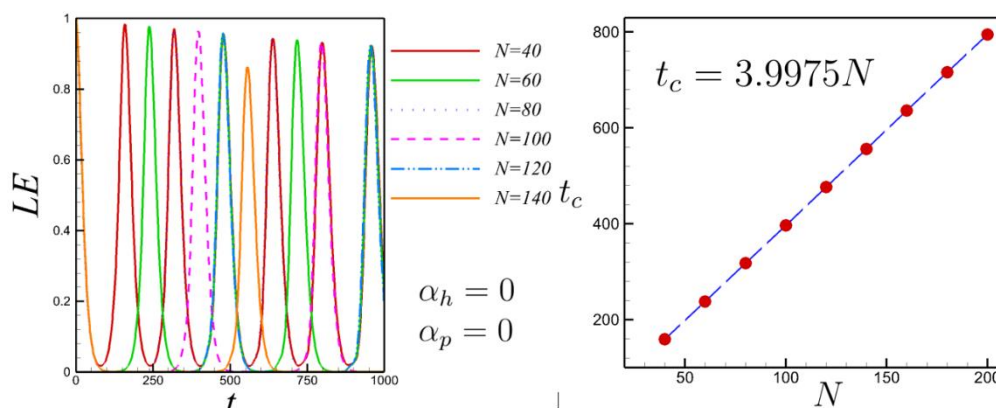
$$\begin{aligned} \mu_{c_1} &= -2w\eta(\alpha_h) = 2w(2^{1-\alpha_h} - 1)\zeta(\alpha_h), \\ \mu_{c_2} &= 2w\zeta(\alpha_h), \end{aligned} \quad (5)$$

اگر  $\alpha_h > 3/2$  باشد، نمودار فاز این مدل معادل با نمودار فاز زنجیره کیتائف معمولی است. در این ناحیه اگر مقدار  $\mu$  بین دو نقطه بحرانی قرار داشته باشد، سیستم در فاز توپولوژیک قرار

۲. Massive Dirac mode

۳. Winding number

۱. Winding number

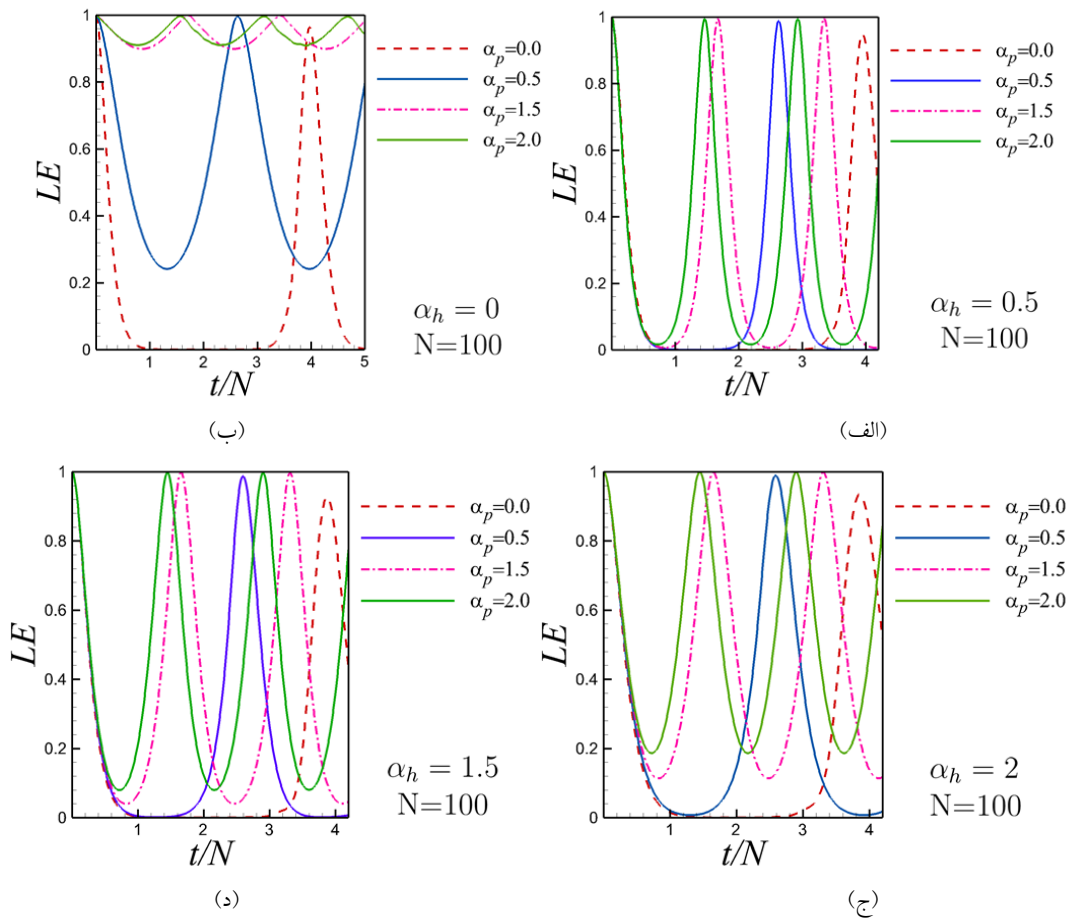


شکل ۲. نمایش رفتار خطی زمان رخ دادن گذار فاز دینامیکی در مقابل اندازه سیستم ( $\alpha_p = \alpha_h = 0$ ).

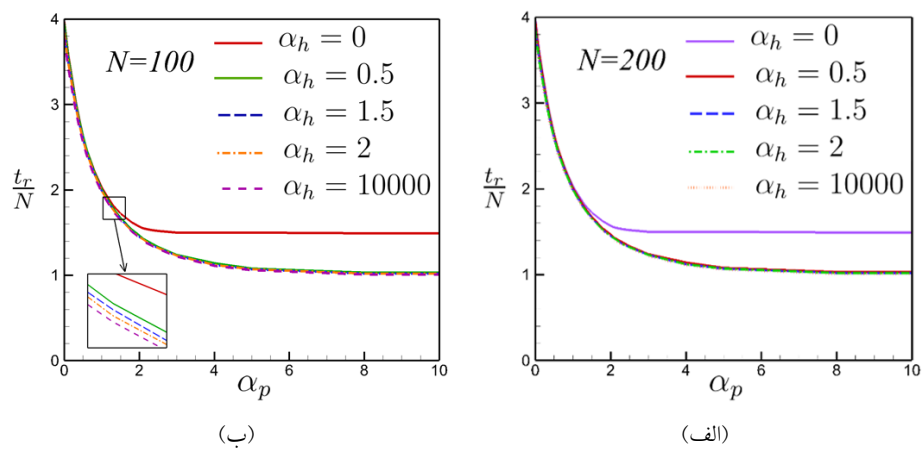
رسم شده‌اند. در هر نمودار، برای  $\alpha_p$  مقادیر ۰، ۰/۵ (ناحیه  $\alpha_p < 1$ )، ۱/۵ و ۲ (ناحیه  $\alpha_p > 1$ ) انتخاب شده‌اند. همان طور که مشاهده می‌شود، هنگامی که  $\mu$  را به نحوی تغییر دهیم که مقدار نهایی آن برابر  $\mu_c$  باشد، در این صورت پژواک لاشمیت در زمان‌های مشخصی و به صورت کاملاً تناوبی احیاء می‌شود که این زمان را زمان احیاء می‌نامیم.

در شکل ۴ زمان احیاء بهنجار شده،  $t_p/N$ ، نسبت به  $\alpha_p$  رسم شده است. در این نمودار دو زنجیره به اندازه‌های  $N=100$  و  $N=200$  و  $\alpha_h$ ‌های متفاوت انتخاب شده‌اند. طبق نمودار، با افزایش  $\alpha_p$  زمان احیاء به سرعت کاهش یافته و برای  $\alpha_p$ ‌های بزرگ به یک مقدار حدی می‌رسد. به عبارت دیگر، اگر قدرت جفت‌شدگی فرمیون‌ها کوتاه‌برد باشد ( $\alpha_p$  بزرگ)، زمان احیاء برای سیستم‌های با نرخ تونل‌زنی متفاوت یکسان خواهد بود. همچنین برای  $\alpha_p$ ‌های محدود زمان احیاء به هر دو مقدار  $\alpha_p$  و  $\alpha_h$  وابسته هست. نکته جالب توجه در این زمینه، نحوه تغییرات زمان احیاء برای سیستمی است که تونل‌زنی فرمیون‌ها در آن کاملاً بلندبرد است. در حالتی که  $\alpha_h$  برابر صفر باشد زمان احیاء در  $\alpha_p$  بزرگ برای این حالت از زمان احیاء برای حالت‌های  $\alpha_h$  مخالف صفر بزرگ‌تر است. نکته مهمی که در دگرگونی کوانتومی سیستم باید به آن اشاره کنیم این است که اگر دگرگونی به نقطه بحرانی باشد، تحول زمانی حالت اولیه سیستم (مدهای مایورانا) تأثیری در جایگزیدگی مدهای مایورانا ندارد. در این حالت تحول زمانی

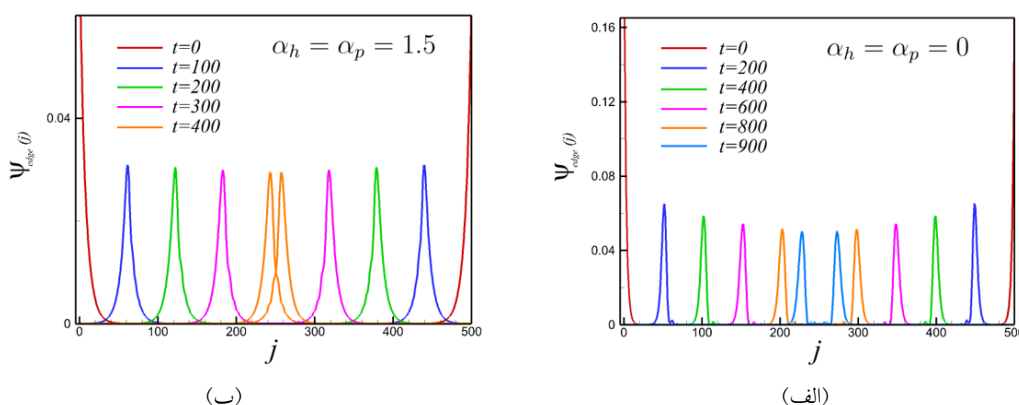
در ابتدا به منظور بررسی تأثیر اندازه زنجیره بر روی دینامیک سیستم، زمان وقوع گذار کلاسیکی-کوانتومی مربوط به زنجیره‌های با طول متفاوت را بررسی می‌کنیم. این کار را برای سیستم کاملاً بلندبرد یعنی  $\alpha_p = \alpha_h = 0$  و برای دگرگونی به نقطه بحرانی،  $\mu_f = \mu_c = -1/0$ ، و با فرض  $\mu_i = -0/1$  انجام می‌دهیم. در شکل ۲ الف پژواک لاشمیت برای سیستم با اندازه‌های مختلف رسم شده است. در شکل ۲ زمان اولین احیاء سیستم (نزدیک شدن پژواک لاشمیت به مقدار اولیه ۱) بر حسب اندازه سیستم نمایش داده شده است. همان طور که در شکل ۲ دیده می‌شود، رابطه خطی به شکل  $t_c(N) = \tau N$  با اندازه زنجیره دارد، که مقیاس نسبی آن ۳/۹۹۷۵ به دست می‌آید. این رفتار نشان از مقیاس‌پذیر بودن زمان احیاء پژواک لاشمیت بر حسب اندازه سیستم برای دگرگونی ناگهانی به نقطه بحرانی است. در واقع شیب خط در شکل ۲ برابر با سرعت گروه شبه-ذرات در نقطه بسته شدن گاف انرژی است که با محاسبه مشتق انرژی حالت پایه نسبت به تکانه به دست می‌آید [۴۲ و ۴۴]. برای بررسی مقیاس‌بندی رفتار دینامیکی سیستم بر حسب نماهای تونل‌زنی و جفت‌شدگی، زنجیره‌ای با طول  $N=100$  را در نظر می‌گیریم و پژواک لاشمیت حالت لبه‌ای را برای دگرگونی به نقطه بحرانی رسم می‌کنیم. در شکل ۳ نتایج برای مقادیر مختلف  $\alpha_p$  و  $\alpha_h$  نشان داده شده است. با توجه به این نکته که نقطه بحرانی بسته به مقدار  $\alpha_h$  تعیین می‌شود، نمودارها برای مقادیر ثابت  $\alpha_h$



شکل ۳. پژواک لاشمیت مد لبه‌ای برای دگرگونی به نقطه بحرانی با فرض مقادیر متفاوت  $\alpha_p$  و  $\alpha_h$  برای زنجیره‌ای با طول  $N=100$ . (الف)  $\alpha_h = 0$ ،  $\mu_i = -1/4 \rightarrow \mu_c = -1/5$ ،  $\alpha_h = 1/5$  (ج)،  $\mu_i = -1/1 \rightarrow \mu_c = -1/21$ ،  $\alpha_h = 0/5$  (ب)،  $\mu_i = -1/9 \rightarrow \mu_c = -1/10$ ،  $\alpha_h = 0$  (د)  $\mu_i = -1/1 \rightarrow \mu_c = -1/21$



شکل ۴. زمان احیاء نسبت به  $\alpha_p$  برای مقادیر مختلف  $\alpha_h$  (الف)  $N=100$  و (ب)  $N=200$ .



شکل ۵. تحول زمانی مدهای لبه‌ای در نتیجه دگرگونی به نقطه بحرانی برای زنجیره‌ای به بزرگی  $N=500$  (الف)  $\mu_c = -1/0$  و (ب)  $\mu_c = -1/531$ .

طول  $N=500$  که تحت تأثیر دگرگونی کوانتومی ناشی از تغییر پتانسیل شیمیایی قرار گرفته، در شکل ۶ رسم شده است. در هر بخش با فرض مقدار ثابت برای  $\alpha_h$ ، نمودارهای مربوط به مقادیر مختلف  $\alpha_p$  نمایش داده شده است. همان طور که در شکل دیده می‌شود، تابع نرخ پژواک لاشمیت در دوره‌های زمانی متناوب، رفتار غیر تحلیلی دارد که این واگرایی وابسته به زمان گذار فاز دینامیکی نامیده می‌شود.

البته باید به این نکته مهم توجه داشت که شرط وجود رفتار غیر تحلیلی در تابع نرخ پژواک لاشمیت این است که مدهای لبه‌ای بدون جرم باشند و مدهای جرم‌دار چنین ویژگی از خود نشان نمی‌دهند [۵۲]. به این منظور و برای نمونه طیف جرمی مدهای لبه‌ای برای  $\alpha_h = 0/5$  و چند مقدار مختلف  $\alpha_p$  در شکل ۷ آورده شده است. در این شکل در صورتی که  $\alpha_p$  برابر  $0/5$ ،  $1/5$  و یا  $2$  باشد، مد لبه‌ای بدون جرم است و به ازای همین مقادیر تابع نرخ (شکل ۶. ب) رفتار غیر تحلیلی دارد، اما برای  $\alpha_p = 0$  که در آن مد لبه‌ای جرم‌دار است رفتار غیر تحلیلی در تابع نرخ دیده نمی‌شود.

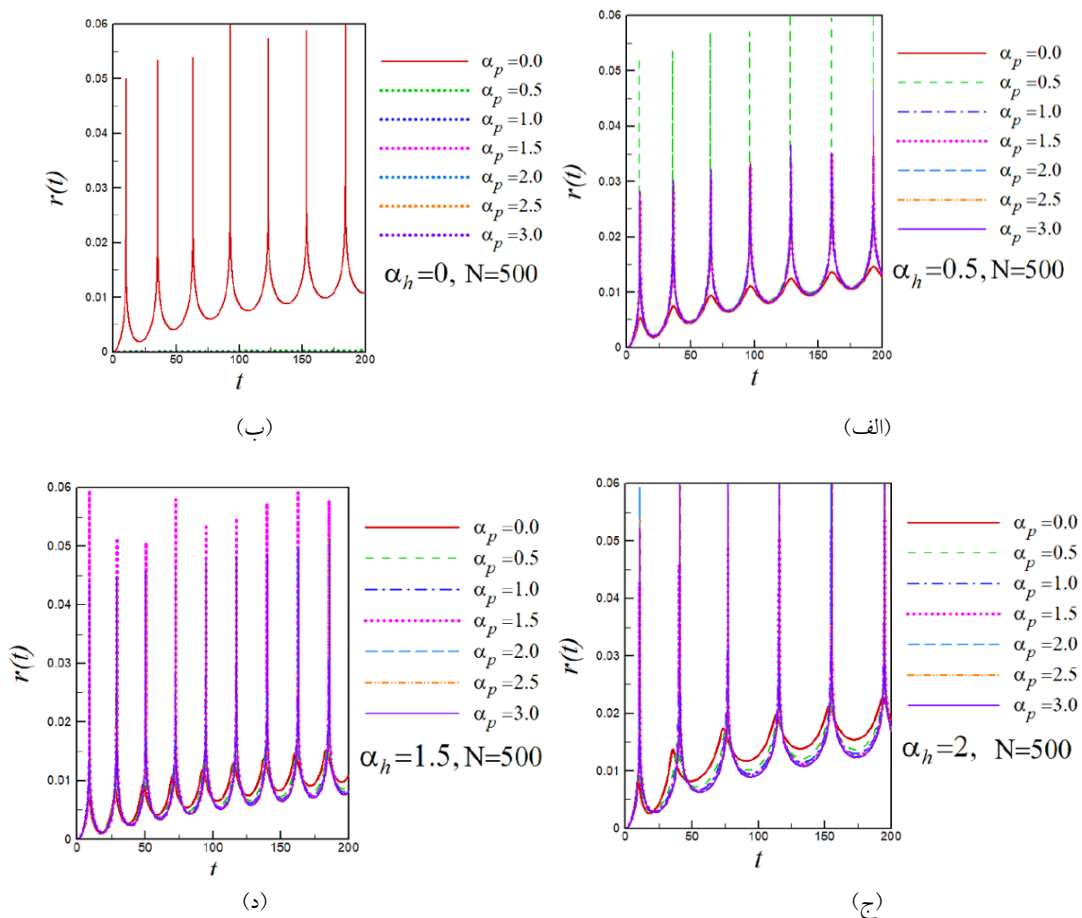
## ۵. نتیجه‌گیری

ما در این مقاله دینامیک مدهای لبه‌ای در زنجیره کیتائف تعمیم یافته در حضور پتانسیل شیمیایی را مورد بررسی قرار دادیم که در آن تونل‌زنی و جفت‌شدگی فرمیون‌ها بلند برد بوده و شدت

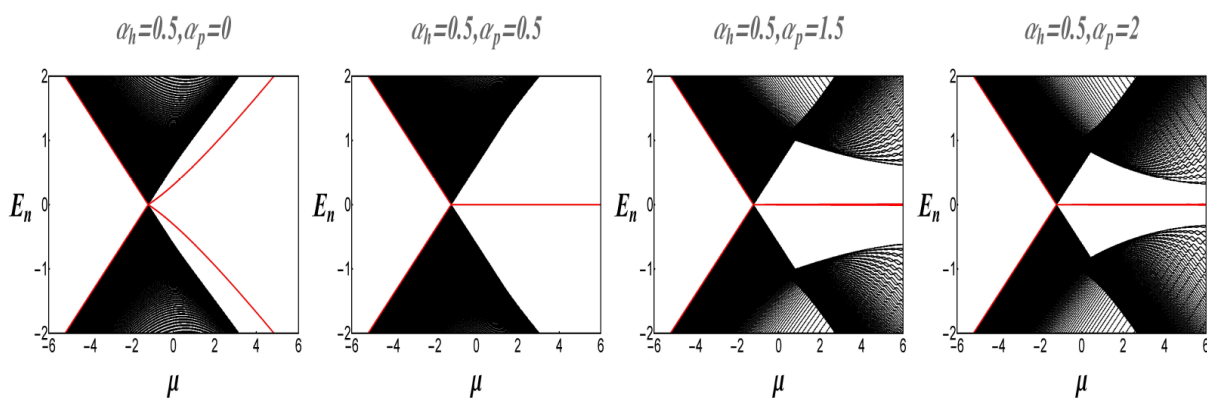
توابع موج جایگزیده اولیه به گونه‌ای است که این توابع موج به صورت جایگزیده باقی مانده و از دو انتهای زنجیره به سمت انتهای دیگر حرکت می‌کنند و بدون تداخل (مشابه با رفتار سالیتون‌ها) از هم عبور کرده و به صورت نوسانی در طول زنجیره رفت و برگشت انجام می‌دهند [۵۳]. دوره تناوبی این نوسان‌ها به صورت خطی به اندازه سیستم بستگی دارد. اما اگر دگرگونی به نقطه‌ای غیر از نقطه بحرانی باشد، با تحول زمانی توابع موج جایگزیده اولیه به تدریج در کل سیستم گسترده شده و با هم تداخل خواهند داشت. برای نمایش این ویژگی در شکل ۵ تحول زمانی مدهای لبه‌ای ناشی از دگرگونی به نقطه بحرانی برای زنجیره‌ای به بزرگی  $N=500$  رسم شده است. چون در حالت  $\alpha_h = \alpha_p$  سیستم حتماً مدهای لبه‌ای بدون جرم دارد [۵۲] برای نمایش تحول زمانی توابع موج اولیه حالت  $\alpha_h = \alpha_p$  را در نظر گرفته‌ایم.

## ۴. گذار فاز دینامیکی برای مدهای لبه‌ای

طبق آنچه در مقدمه گفته شد، اگر تغییر پارامتر هامیلتونی به نحوی باشد که مقدار اولیه و نهایی آن در دو فاز تعادلی متفاوت باشد، انتظار داریم تابع نرخ پژواک لاشمیت،  $r(t)$ ، رفتار غیر تحلیلی متناوب داشته باشد. به منظور بررسی این موضوع، به حل عددی [۵۲] تابع نرخ پژواک لاشمیت مربوط به مدهای لبه‌ای می‌پردازیم. تابع نرخ پژواک برای زنجیره‌ای با



شکل ۶. تابع نرخ پژواک لاشمیت مربوط مدهای لبه‌ای برای دگرگونی به نقطه بحرانی، با فرض زنجیره‌ای با طول  $N = 500$  و برای مقادیر مختلط  $\alpha_p$  و  $\alpha_h$ .  $N = 100$ . (الف)  $\alpha_h = 0$ ,  $\mu_i = -0.4 \rightarrow \mu_c = -1/0$ ,  $\alpha_p$  و  $\alpha_h$  (ب)  $\alpha_h = 0/5$ ,  $\mu_i = -1/1 \rightarrow \mu_c = -1/21$ ,  $\alpha_p$  و  $\alpha_h$  (ج)  $\alpha_h = 1/5$ ,  $\mu_i = -1/51 \rightarrow \mu_c = -1/645$ ,  $\alpha_p$  و  $\alpha_h$  (د)  $\alpha_h = 2$ ,  $\mu_i = -1/25 \rightarrow \mu_c = -1/531$ .



شکل ۷. طیف انرژی برحسب پتانسیل شیمیایی برای زنجیره‌ای به بزرگی  $N = 500$ ,  $\alpha_h = 0/5$  و مقادیر مختلف  $\alpha_p$  [۵۲].

است که می‌تواند حاوی مدهای مایورنای لبه‌ای باشد. ویژگی مهم این مدها این است که در مقابل اختلالات پایدار هستند.

آنها بسته به فاصله بین دو نقطه از زنجیره به صورت نمایی کاهش پیدا می‌کند. ابررسانای موج  $p$  یک سیستم توپولوژیکی



سیستم از یک فاز به فاز دیگر دچار دگرگونی ناگهانی می‌شود تابع نرخ پژواک لاشمیت رفتار غیر تحلیلی متناوب خواهد داشت که نمایانگر گذار فاز دینامیکی است و این گذار فاز دینامیکی در حالتی اتفاق می‌افتد که سیستم مدهای مایورانای بدون جرم داشته باشد، اما در صورتی که مدهای مایورانا جرم داشته باشند گذار فاز دینامیکی مشاهده نمی‌شود. مدل‌های فرمیونی با جفت‌شدگی و تونل‌زنی بلندبرد وجود دارند که در آنها عدد پیچش بزرگ تر از ۱ است [۵۴ و ۵۵] که به معنی وجود بیش از یک زوج فرمیون مایورانا در سیستم است. مطالعه دینامیکی این سیستم‌ها نیز می‌تواند نتایج قابل توجهی داشته باشد.

برای مطالعه دینامیک مدهای لبه‌ای از دگرگونی کوانتومی استفاده کردیم که در آن مقدار پتانسیل شیمیایی به‌طور آنی تغییر می‌کند. با رسم نمودار پژواک لاشمیت، رفتار آن را برای حالت‌های مختلفی که شدت برهمکنش و یا جنبش فرمیون‌ها مقادیر متفاوتی دارد محاسبه و نمودار آن را رسم کردیم. نشان دادیم هنگامی که دگرگونی کوانتومی ناگهانی به نقطه بحرانی باشد در این صورت نمودار پژواک لاشمیت بر حسب زمان رفتار تناوبی خواهد داشت که مشخص می‌کند در زمان‌های معینی سیستم به حالت اولیه‌ای که در آن آماده‌سازی شده بود، نزدیک می‌شود. به این زمان‌ها زمان احیاء گفته می‌شود که تابعی خطی از اندازه سیستم و نیز تابعی از نماهای جفت‌شدگی و تونل‌زنی فرمیون‌ها است. همچنین نشان دادیم در حالتی که

## مراجع

1. A Y Kitaev, *Phys. Usp* **44** (2001) 131.
2. I C Fulga, F Hassler, A R Akhmerov, and C W J Beenakker, *Scatt, Phys. Rev. B* **83** (2011) 155429.
3. J. D Sau and S Das Sarma, *Nat Commun.* **3** (2012) 964.
4. R. M Lutchyn and M P A Fisher, *Phys. Rev. B* **84** (2011) 214528.
5. W DeGottardi, D Sen, and S Vishveshwara, *New J. Phys.* **13** (2011) 065028.
6. W DeGottardi, D Sen, and S Vishveshwara, *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 146404.
7. M Thakurathi, A A Patel, D Sen, and A Dutta, *Phys. Rev. B* **88** (2013) 155133.
8. W DeGottardi, M Thakurathi, S Vishveshwara, and D Sen, *Phys. Rev. B* **88** (2013) 165111.
9. N Read and D Green, *Phys. Rev. B* **61** (2000) 10267.
10. F Pientka, L I Glazman, and F von Oppen, *Phys. Rev. B* **88** (2013) 155420.
11. J Li, T Neupert, Z Wang, A H MacDonald, A Yazdani, and B A Bernevig, *Nat Commun.* **7** (2016) 12297.
12. A Heimes, D Mendler, and P Kotetes, *New J. Phys.* **17** (2015) 023051.
13. M Sato and S Fujimoto, *Phys. Rev. B* **79** (2009) 094504.
14. V Mourik, K Zuo, S M Frolov, S R Plissard, E P A M Bakkers, and L P Kouwenhoven, *Science* **336** (2012) 1003.
15. D I Tsomokos, A Hamma, W Zhang, S Haas, and R Fazio, *Phys. Rev. A* **80** (2009) 060302(R).
16. G B Halász and A Hamma, *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 170605.
17. A Y Kitaev, *Annals Phys.* **303** (2003) 2.
18. C Nayak, S Simon, A Stern, M Freedman, and S Das Sarma, *Rev. Mod. Phys.* **80** (2008) 1083.
19. S Tewari, S Das Sarma, C Nayak, C Zhang, and P Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 010506.
20. N H Lindner, G Refael, and V Galitski, *Nat. Phys.* **7** (2011) 490.
21. D E Liu, A Levchenko, and H U Baranger, *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 047002.
22. M Thakurathi, A A Patel, D Sen, and A Dutta, *Phys. Rev. B* **88** (2013) 155133.
23. B Bernevig, T Hughes, and S Zhang, *Science* **314** (2006) 1757.
24. A A Patel, S Sharma, and A Dutta, *Eur. Phys. J. B* **86** (2013) 367.
25. P D Sacramento, *Phys. Rev. E* **90** (2014) 032138.
26. A Rajak and A Dutta, *Phys. Rev. E* **89** (2014) 042125.
27. M Heyl, A Polkovnikov, S Kehrein, *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 135704.
28. S Vajna and B Dóra, *Phys. Rev. B* **89** (2014) 161105.
29. F Andraschko, J Sirker, *Phys. Rev. B* **89** (2014) 125120.
30. M Heyl, *Rep. Prog. Phys.* and **81** (2018) 054001.
31. S Sharma, S Suzuki, and A Dutta, *Phys. Rev. B* **92** (2015) 104306.
32. J Lang, B Frank, and J C Halimeh, *Phys. Rev. Lett.* **121** (2018) 130603.
33. J Lang, B Frank, and J C Halimeh, *Phys. Rev. B* **97** (2018) 174401.
34. R Jafari, *Sci. Rep.* **9** (2019) 2871.
35. S Zamani, R Jafari, and A Langari, *Phys. Rev. B* **102** (2020) 144306.

47. T Gorin, T Prosen, T H Seligman, and M Znidaric, *Phys. Rep.* **435** (2006) 33-156.
48. L Campos Venuti, N T Jacobson, S Santra, and P Zanardi, *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011) 010403.
49. Z G Yuan, P Zhang, and S-S Li, *Phys. Rev. A* **75** (2007) 012102.
50. J Häppölä, G B Halász, and A Hama, *Phys. Rev. A* **85** (2012) 032114.
51. S Montes and A Hama, *Phys. Rev. E* **86** (2012) 021101.
52. D Vodola, L Lepori, E Ercolessi, and A V Gorshkov, *Phys. Rev. Lett.* **113** (2014) 156402.
۵۳. س انصاری، ر جعفری، مجله پژوهش فیزیک ایران ۲۰، ۲ (۱۳۹۹) ۲۱۵.
53. S Ansari and R Jafari, *Iran. J. Phys. Res.* **20**, 2 (2020) 215.
54. P D Sacramento, *Phys. Rev. E* **93** (2016) 062117.
55. A Habibi, S A Jafari, and S Rouhani, *Phys. Rev. B* **95** (2018) 035142.
56. S A Jafari and F Shahbazi, *Sci. Rep.* **6** (2016) 32720.
36. R Jafari and A Akbari, Floquet dynamical phase transition and entanglement spectrum, arXiv 2009.09484.
37. U Mishra, R Jafari, and A Akbari, *J. Phys. A Math. Theor.* **53** (2020) 375301.
۳۸. س انصاری، ر جعفری، مجله پژوهش سیستم‌های بس‌ذره‌ای ۹، ۳ (۱۳۹۸) ۲۹.
39. R Jafari, H Johannesson, A Langari, and M A Martin-Delgado, *Phys. Rev. B* **99** (2018) 054302.
40. R Jafari and A Akbari, *Phys. Rev. A* **101** (2020) 062105.
41. P Urich, N Defenu, R Jafari, and J C Halimeh, *Phys. Rev. B* **101** (2020) 245148.
42. U Mishra, H Cheraghi, and S Mahdavi, R Jafari, and A Akbari, *Phys. Rev. A* **98** (2018) 052338.
43. R Jafari and H Johannesson, *Phys. Rev. B* **96** (2017) 224302.
44. R Jafari, *J. Phys. A Math. Theor.* **49** (2016) 185004.
45. R Jafari and H Johannesson, *Phys. Rev. Lett.* **118** (2017) 015701.
46. H T Quan, Z Song, X F Liu, P Zanardi, and C P Sun, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 140604.