

## پارامتر نظمی غیر موضعی برای گذار فاز توپولوژیکی در کد کوانتومی چنبره

محمد حسین زارعی

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز، شیراز

پست الکترونیکی: mzarei92@shirazu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۴/۰۶؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۰۳/۰۲)

### چکیده

این یک موضوع شناخته شده است که با جایگزین کردن وزن های بولتزمنی مدل آیزینگ کلاسیکی در دامنه های تابع موج حالت پایه کد چنبره ای، گذار فاز کلاسیکی در مدل آیزینگ به یک گذار فاز توپولوژیکی در یک مدل کوانتومی مختل شده از کد چنبره ای نگاشته می شود. از آنجایی که چنین گذار فازهای توپولوژیکی بر خلاف گذار فاز های معمولی توسط یک پارامتر نظم موضعی قابل توصیف نیستند، بررسی این که چه پارامتر نظمی می تواند گذار فاز توپولوژیکی بالا را توصیف کند، چالش مهمی است. در این مقاله، به کمک تکنیکی ساده مبتنی بر نگاشت بین مدل آیزینگ کلاسیکی و حالت پایه کد چنبره ای، پارامتر نظمی غیر موضعی برای گذار فاز توپولوژیکی پیدا خواهیم کرد که به خوبی ماهیت توپولوژیک گذار را آشکار می کند. نشان می دهیم که این پارامتر در واقع یک نوع پارامتر نظم ریسمانی است که در برخی دیگر از مدل ها نیز به عنوان مشخصه گذار فازهای توپولوژیکی پیشنهاد شده است.

**واژه های کلیدی:** گذار فاز توپولوژیکی، کد کوانتومی چنبره، پارامتر نظم غیر موضعی، مدل آیزینگ

### ۱. مقدمه

تقارن قادر است تمام فاز های مواد را توضیح دهد، خیلی زود فیزیکدانان فازهای جدیدی از ماده را پیش بینی و سپس مشاهده کردند که از نظریه فوق تبعیت نمی کردند و فازهای توپولوژیکی نام گرفتند [۳]. نمونه هایی از این فازها در دستگاه های مغناطیسی، اثر کوانتومی هال و مایع های اسپینی کوانتومی مورد بررسی قرار گرفته اند [۴-۱۲]. در واقع، در حالی که دو فاز توپولوژیکی مختلف تقارن های یکسانی دارند اما فیزیک متفاوتی را از خود نشان می دهند که ناشی از نظم غیر موضعی و متمایز موجود در آنها است.

شناخت فاز های مختلف مواد یکی از جذاب ترین موضوعات در فیزیک ماده چگال است که از دیرباز مورد توجه فیزیکدانان بوده است [۱]. یکی از مهم ترین نظریه ها در توصیف فاز های مختلف مواد، نظریه شکست تقارن است که توسط لاندائو ارائه شد [۲]. بر اساس این نظریه، فازهای مختلف یک ماده به تقارن های مختلف در سازماندهی آن ماده مربوط می شوند و یک گذار فاز با شکست یک تقارن بزرگ تر به تقارنی کوچک تر همراه خواهد بود. در حالی که به نظر می رسید، نظریه شکست

نظم ریسمانی نامیده می‌شود. به این ترتیب نشان می‌دهیم که گذار فاز توپولوژیکی مذکور توسط این پارامتر نظم غیر موضعی شناسایی می‌شود. علاوه بر آن، اخیراً نشان داده شده است که همین پارامتر نظم برای مطالعه کد چنبره‌ای در حضور میدان مغناطیسی یکنواخت نیز مناسب است [۳۷] که نشان می‌دهد پارامتر نظم ریسمانی قابلیت بررسی گذار فاز توپولوژیکی در کد چنبره‌ای، نسبت به اختلالات متنوعی را دارد.

در بخش دوم مروری به کد چنبره و به ویژه خواص توپولوژیک آن خواهیم داشت. در بخش سوم کد چنبره در حضور اختلال را معرفی کرده و ارتباط آن با مدل آیزینگ را شرح خواهیم داد. در بخش چهارم نتیجه اصلی مقاله را ارائه خواهیم کرد آنجا که پارامتر نظم متناظر با مغناطش در مدل آیزینگ را به کمک تناظر مذکور به دست می‌آوریم.

## ۲. مروری بر کد چنبره و ویژگی‌های توپولوژیکی آن

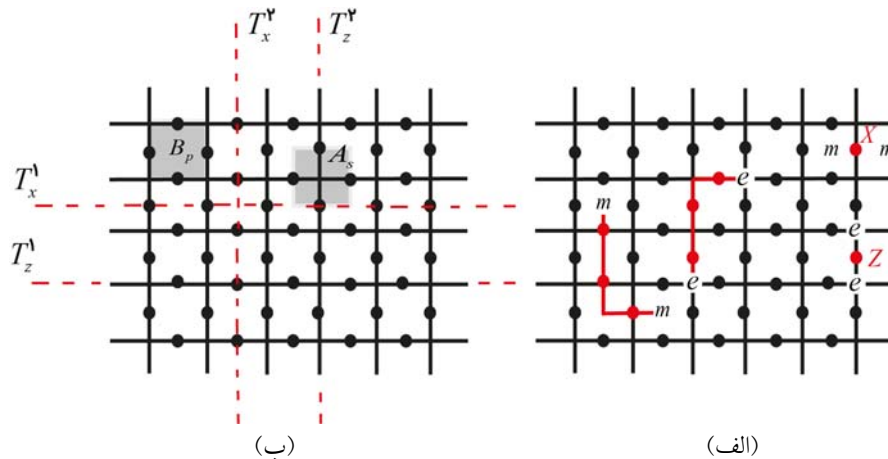
کد چنبره یکی از انواع کدهای کوانتومی است که در نظریه تصحیح خطای کوانتومی به عنوان یک کد پایدارساز معرفی شده است. کدهای پایدارساز با یک زیر گروه از گروه پائولی ساخته می‌شوند. گروه پائولی روی  $n$  کیوبیت به صورت ضرب تانسوری از ماتریس‌های پائولی تک کیوبیتی و ماتریس واحد با مضارب  $\pm 1$  و  $\pm i$  تعریف می‌شود. یک زیر گروه از گروه پائولی که اعضای آن با یکدیگر جابه‌جا شوند گروه پایدارساز را تشکیل می‌دهند. اگر تعداد مولدهای این گروه  $k \leq N$  باشد آنگاه این گروه یک زیر فضای  $2^{N-k}$  بعدی را پایدار می‌کند که اطلاعات در این زیرفضا کد خواهد شد.

برای تعریف کد چنبره یک شبکه مربعی را در نظر بگیرید که کیوبیت‌هایی روی یال‌های آن قرار داده شده‌اند. مطابق شکل ۱ دو گونه عملگر پایدارساز متناظر با هر وجه و هر رأس از این شبکه به صورت زیر تعریف می‌کنیم که به ترتیب عملگرهای وجه و رأس نامیده می‌شوند:

به دلیل ماهیت غیر موضعی فازهای توپولوژیکی، شناسایی آنها و ارائه مشخصه‌هایی که بتواند فازهای مختلف و همچنین گذار فاز بین آنها را توضیح دهد چالشی جدی به حساب می‌آید [۱۳ و ۱۴]. وجود یک تبهگنی وابسته به شرایط مرزی، گاف پایدار و درهم‌تیدگی توپولوژیکی معیارهایی برای این منظور هستند [۱۵ و ۱۶]. اخیراً یک پارامتر نظم غیر موضعی که اصطلاحاً پارامتر نظم ریسمانی نامیده می‌شود نیز معرفی شده است که برای بعضی از مدل‌ها می‌تواند گذار فازهای توپولوژیکی را توضیح دهد [۱۷].

علاوه بر آن، به دلیل کاربردهایی که فازهای توپولوژیکی می‌توانند در رایانه‌های کوانتومی داشته باشند، بررسی آنها اهمیت ویژه‌ای در حوزه نظریه اطلاعات کوانتومی دارد [۱۸-۲۵]. یکی از مدل‌های توپولوژیکی معروف که به عنوان حافظه کوانتومی ایمن از خطا مورد توجه قرار گرفته است، کد چنبره نام دارد که توسط آ. کیتائف ارائه شد [۲۶]. سادگی این مدل، آن را ابزار خوبی برای بررسی ویژگی‌های مختلف فازهای توپولوژیکی کرده است. به ویژه استحکام این کد در برابر انواع اختلال و نوفه مورد بررسی قرار گرفته است [۲۷-۳۵].

در میان مطالعات صورت گرفته بر کد چنبره‌ای، در این مقاله توجه ما به یک مورد بسیار ویژه است که به ارتباطی بین این مدل کوانتومی و مدل آیزینگ کلاسیکی منجر می‌شود [۳۵]. ایده اصلی پشت چنین تناظری، کد کردن وزن‌های بولتزمنی مدل کلاسیکی در دامنه‌های تابع موج حالت پایه مدل کوانتومی است که گذار فاز کلاسیکی را به یک گذار فاز توپولوژیکی مرتبط می‌کند [۳۶]. به ویژه، این تناظر به ما این امکان را می‌دهد که به کمک دانسته‌هایمان از مدل آیزینگ، گذار فاز توپولوژیکی در کد چنبره‌ای را بهتر بفهمیم. به طور خاص در این مقاله، ما به جستجوی یک پارامتر نظم غیر موضعی مناسب برای گذار فاز توپولوژیکی به کمک تناظر مذکور خواهیم پرداخت. به این منظور از پارامتر نظم مدل آیزینگ شروع کرده و به کمک تناظر مذکور معادل کوانتومی آن را به دست می‌آوریم. نشان می‌دهیم که آن یک پارامتر نظم غیر موضعی متناظر با یک ریسمان در کد چنبره‌ای است که پارامتر



شکل ۱. (الف) اثر عملگر  $Z$  ( $X$ ) روی یک ریسمان از کیوبیت‌ها معادل با وجود برانگیختگی‌هایی در دو سر ریسمان خواهد بود که آنیون‌های بار (شار) نامیده می‌شوند و (ب) کیوبیت‌ها روی یال‌های شبکه مربعی قرار می‌گیرند. متناظر با هر وجه شبکه عملگر  $B_p$  و متناظر با هر رأس عملگر  $A_v$  تعریف می‌شود. در هر یک از دو جهت روی شبکه، دو گونه عملگر حلقه متناظر با حلقه‌های غیر بدیهی حول چنبره تعریف می‌شود.

تعداد عملگرهای رأس و وجه نیز همین خواهد بود. با این حال با توجه به شرط مرزی دوره‌ای چنبره این عملگرها در روابط  $\prod_p B_p = 1$  و  $\prod_v A_v = 1$  صدق می‌کنند و بنابراین فقط  $2 - 2L^2$  تا عملگر مستقل خواهیم داشت. در نتیجه بعد فضای پایدار شده برابر با چهار خواهد بود و بایستی چهار ویژه پایه سازنده این فضا را بیابیم. این ویژه پایه‌ها باید به گونه‌ای تعیین شوند که در شرایط  $A_v |\psi\rangle = |\psi\rangle$  و  $B_p |\psi\rangle = |\psi\rangle$  صدق کنند. به این ترتیب به سادگی می‌توان چک کرد که یکی از این ویژه پایه‌ها حالت کوانتومی زیر است:

$$|\psi_{0,0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_v (1 + A_v) |0\rangle^{\otimes N}, \quad (2)$$

در واقع حاصل ضرب  $\prod_v (1 + A_v)$  معادل با مجموع هم عملگرهای پایدارساز از نوع  $X$  است. از آنجا که این عملگرها معادل با حلقه‌هایی روی شبکه دوگان بودند، نتیجه می‌شود که حالت ۱ ترکیب خطی از همه پیکربندی‌های تشکیل شده از حلقه‌های ۱ در دریایی از حالت‌های صفر است که به همین دلیل این حالت را چگالیده‌ای از حلقه‌ها نیز می‌نامند. با این حال، باید دقت کرد که روی یک چنبره قادر هستیم حلقه‌هایی کاملاً متفاوت را تعریف کنیم به طوری که عملگرهای از نوع  $X$  متناظر با آنها معادل با حاصل ضربی از  $A_v$  ها نباشد. چنین

$$B_p = \prod_{i \in \partial p} Z_i, \quad A_v = \prod_{i \in v} X_i, \quad (1)$$

که  $X$  و  $Z$  ماتریس‌های پائولی  $\sigma_x$  و  $\sigma_z$  هستند. منظور از  $i \in v$  همه کیوبیت‌هایی است که به رأس  $v$  وارد می‌شوند و منظور از  $i \in \partial p$  همه کیوبیت‌هایی است که وجه  $p$  را احاطه کرده‌اند. واضح است که یک عملگر وجه و یک عملگر رأس یا در هیچ کیوبیتی مشترک نیستند و یا دو کیوبیت مشترک دارند و از این رو با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند. همان گونه که در شکل ۱ مشخص است، از نظر هندسی عملگرهای وجه را به صورت یک حلقه کوچک روی شبکه و عملگرهای رأس را نیز به صورت یک حلقه کوچک روی شبکه دوگان نمایش می‌دهیم. حال اگر عملگرهای وجه را در یکدیگر ضرب کنیم عضوی از گروه پایدارساز را خواهیم ساخت که متناظر با حلقه بزرگ‌تری در شبکه اصلی خواهد بود. به همین دلیل تمام پایدارسازهای از نوع  $Z$  متناظر با تمام حلقه‌های ممکن روی شبکه مربعی خواهند بود. به همین ترتیب عملگرهای پایدارساز از نوع  $X$  با حاصل ضرب عملگرهای رأس ساخته شده و متناظر با حلقه‌های ممکن روی شبکه دوگان هستند.

با این مجموعه از پایدارسازها می‌توانیم زیرفضای پایدار شده را بیابیم. اگر شبکه را  $L \times L$  در نظر گرفته و روی یک چنبره قرار دهیم، تعداد  $N = 2L^2$  کیوبیت خواهیم داشت و

با توجه به این روابط، معلوم می‌شود که مقدار چشمداشتی عملگرهای  $T_z'$  و  $T_x'$  می‌تواند چهار پایه (۳) را از یکدیگر تمیز دهد. در واقع این عملگرها نقش پارامتر نظم را بازی می‌کنند و ماهیت غیر موضعی آنها نشانه‌ای دیگر از نظم توپولوژیک در کد چنبره است.

علاوه بر حالت پایه، نشانه‌های وجود نظم توپولوژیک در کد چنبره را می‌توان در برانگیختگی‌های آن نیز مشاهده کرد. یک برانگیختگی در این مدل را می‌توان با اعمال یک عملگر  $X$  یا  $Z$  روی یک کیوبیت دلخواه از شبکه ایجاد کرد. چنین عملگرهایی به ترتیب با دو عملگر وجه یا رأسی که در آن کیوبیت مشترک هستند پادجابه‌جا می‌شوند و در نتیجه انرژی را بالا خواهند برد. همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است چنین برانگیختگی‌هایی را می‌توان با قرار دادن شبه‌ذراتی که آنیون نامیده می‌شوند در وجوه یا رئوس که برانگیخته شده‌اند نمایش داد. آنیون‌هایی را که درون وجوه زندگی می‌کنند، آنیون‌های شار و آنیون‌هایی را که روی رئوس قرار می‌گیرند، آنیون‌های بار می‌نامند. این آنیون‌ها را می‌توان با اعمال زنجیره‌وار عملگرهای پائولی در شبکه حرکت داد که ریسمان‌هایی را درون شبکه به وجود می‌آورد. به این ترتیب یک عملگر حلقه را می‌توان به صورت تولید دو آنیون، حرکت آنها و در نهایت ادغامشان در یکدیگر تفسیر کرد. اگر یک آنیون بار حول یک آنیون شار بچرخد، از آنجایی که عملگر حلقه متناظر با آن با ریسمان متناظر با آنیون شار پادجابه‌جا می‌شود، یک فاز  $-1$  در تابع موج ایجاد می‌کند. تولید این فاز غیر بدیهی خاصیتی است که به عنوان نشانه‌ای از نظم توپولوژیک در کد چنبره تلقی می‌شود. در واقع آنیون‌های شار نسبت به هم بوزون ولی نسبت به آنیون‌های بار فرمیون هستند و به دلیل همین رفتار عجیب نام آنها را آنیون انتخاب کرده‌اند.

در ادامه این مقاله قصد داریم که کد چنبره را در حضور یک اختلال مطالعه کنیم. برای سادگی با کد چنبره روی یک شبکه با شرایط مرزی باز کار می‌کنیم. همان‌طور که در شکل ۲ نشان داده‌ایم، عملگرهای رأس و وجه مانند قبل تعریف می‌شوند با این تفاوت که عملگر رأس متناظر با مرز شبکه روی

حلقه‌هایی را در شکل ۱ نشان داده‌ایم، عملگرهای متناظر با آنها را با  $T_x'$  و  $T_z'$  نمایش می‌دهیم که به ترتیب حلقه‌های جمع‌ناپذیر در دو راستای ۱ و ۲ حول چنبره متناظر هستند. به کمک این دو عملگر می‌توانیم دیگر ویژه پایه‌های زیر فضای پایدارساز را بسازیم که عبارتند از:

$$|\psi_{ij}\rangle = (T_x')^i (T_z')^j |\psi_{00}\rangle, \quad (3)$$

که به ازای مقادیر مختلف صفر یا ۱ برای  $i, j$  چهار ویژه پایه متعامد ساخته خواهد شد.

چهار حالت معادله (۳) دارای این ویژگی مهم هستند که به صورت موضعی قابل تمیز از یکدیگر نیستند؛ به این معنی که نمی‌توان یک عملگر موضعی یافت که مقدار چشمداشتی آن در چهار حالت مذکور با یکدیگر متفاوت باشد. این یک ویژگی برای فازهای توپولوژیکی است و نشان از نظم توپولوژیک در کد چنبره دارد. به منظور درک بهتر این مسئله، اول باید توجه داشت که زیر فضای پایدار شده در بالا را می‌توان به عنوان زیر فضای تبهگن برای حالت پایه یک مدل کوانتومی با هامیلتونی زیر در نظر گرفت:

$$H_{TC} = -\sum_p B_p - \sum_v A_v, \quad (4)$$

به وضوح می‌توان دید که تبهگنی حالت پایه به هیچ وجه ارتباطی با تقارن‌های هامیلتونی بالا ندارد و فقط به توپولوژی چنبره بستگی دارد. به عنوان مثال اگر شبکه مربعی را روی چنبره‌ای با دو حفره قرار دهید، تبهگنی تغییر کرده و ۱۶ گانه خواهد شد. این تغییر در تبهگنی در حقیقت به دلیل وجود حلقه‌های غیر جمع‌پذیر متنوع‌تر است. تبهگنی وابسته به توپولوژی از دیگر ویژگی‌هایی است که نشانه نظم توپولوژیک به حساب می‌آید.

مشابه با عملگرهای  $T_x'$  و  $T_z'$  می‌توان عملگرهایی از نوع  $Z$  نیز تعریف کرد که متناظر با حلقه‌های غیر جمع‌پذیر روی شبکه هستند (شکل ۱). اگر این عملگرها را  $T_z'$  و  $T_x'$  بنامیم، روابط جابه‌جایی و پادجابه‌جایی زیر را با عملگرهای حلقه از نوع  $X$  خواهند داشت:

$$\{T_z', T_x'\} = 0, [T_z', T_x'] = 0, \{T_z', T_x'\} = 0, [T_z', T_x'] = 0, \quad (5)$$

حالت توپولوژیکی به یک حالت بدیهی کاملاً مغناطیده را مطالعه کنیم.

هامیلتونی به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$H = -\sum_p B_p - \sum_v A_v + \sum_v e^{-\beta \sum_{i \in v} Z_i} \quad (6)$$

اختلال وارد شده در اینجا به صورت یک جمله نمایی است که اگر آن را به ازای  $\beta$  های کوچک بسط دهیم همان میدان مغناطیسی در راستای  $Z$  خواهد بود. این شکل نمایی به دلیل خاصی انتخاب شده است که ما را قادر می سازد حالت پایه مدل را به ازای هر  $\beta$  دلخواه به دست آوریم. به این منظور، هامیلتونی را به صورت  $H = -\sum_p B_p + \sum_v Q_v$  می نویسیم که عملگر  $Q_v$  عبارت است از:

$$Q_v = e^{-\beta \sum_{i \in v} Z_i} - A_v \quad (7)$$

این عملگر یک ویژگی بسیار جالب دارد که  $Q_v^2 = 2 \cosh(\beta) Q_v$  بر اساس این ویژگی و از آنجا که عملگر  $Q_v$  عملگری مثبت است، نتیجه می شود که عملگر  $Q_v$  نیز یک عملگر مثبت خواهد بود. مثبت بودن این عملگر برای ما بسیار اهمیت دارد چراکه معنایش این است که کمترین ویژه مقدار آن صفر خواهد بود. از طرف دیگر واضح است که عملگر های وجه  $B_p$  با  $Q_v$  جابه جا می شوند و بنابراین اگر ویژه حالتی با ویژه مقدار صفر از  $Q_v$  را بیابیم، آن حالت پایه هامیلتونی (۶) خواهد بود.

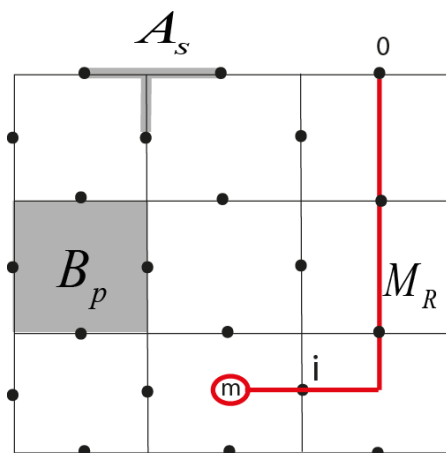
در ادامه حالت کوانتومی زیر را پیشنهاد می کنیم و نشان می دهیم که حالت پایه هامیلتونی (۶) است:

$$|G(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z}} e^{\frac{\beta}{2} \sum_i Z_i} |\psi_0\rangle \quad (8)$$

در این رابطه ضریب بهنجارش است که بعداً آن را تعیین خواهیم کرد. به منظور اثبات، کافی است به این نکته توجه کنیم که چون عملگر  $X$  و  $Z$  پادجابه جا می شوند، خواهیم داشت

$$\sum_i Z_i A_v e^{\frac{\beta}{2} \sum_{i \in v} Z_i} = e^{-\frac{\beta}{2} \sum_{i \in v} Z_i} A_v$$

نمای رابطه (۸) را به جمع روی کیوبیت هایی که عضو رأس  $v$



شکل ۲. روی یک شبکه با شرط مرزی باز، عملگر های رأس متناظر با رئوس روی مرز تنها سه کیوبیت را در بر می گیرند. ریسمانی از عملگر های  $X$  که ابتدای آن در مرز شبکه است، منجر به تولید یک تک آنیون شار در انتهای ریسمان می شود.

سه کیوبیت اثر می کند. علاوه بر آن اگر یک عملگر  $X$  روی یک کیوبیت در مرز شبکه اعمال کنیم، تنها یک وجه را برانگیخته خواهیم کرد. در واقع این بدان معنی است که بر خلاف معمول تنها یک آنیون شار تولید می شود. بنابراین در این مورد ریسمان هایی خواهیم داشت که یک سر آنها در مرز و سر دیگر آنها درون شبکه قرار دارد. عملگر های متناظر با این ریسمان ها را  $M_R$  می نامیم. البته این تفاوت تأثیری در ویژگی های توپولوژیکی کد ندارد و می تواند به این صورت تفسیر شود که یک آنیون در مرز شبکه زندگی می کند.

### ۳. کد چنبره در حضور اختلال

همان گونه که در بخش قبل به تفصیل بیان شد، کد چنبره یک نظم توپولوژیک دارد که شواهد آن از جنبه های مختلف قابل مشاهده بود. با این حال یکی از روش های مرسوم در شناسایی نوع نظم در یک سیستم کوانتومی، بررسی گذار فاز کوانتومی است. به این صورت که اگر یک حالت کوانتومی یک نظم غیر بدیهی داشته باشد بایستی علائم آن در وقوع یک گذار به بیرون از آن دیده شود. در اینجا ما کد کیتائف را در حضور یک نوع اختلال خاص در نظر می گیریم تا چگونگی وقوع گذار از یک

تابع پارش مدل آیزینگ فرومغناطیس با هامیلتونی کلاسیکی  

$$h = - \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j$$
 است و نیز این که پارامتر دما در مدل  
 کلاسیکی از رابطه  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  به پارامتر تنظیم در مدل کوانتومی  
 مربوط می‌شود. در واقع، همان گونه که در شکل ۳ نشان داده  
 شده است، در حالی که کیوبیت‌های مدل کوانتومی روی  
 یال‌های شبکه قرار دارند، اسپین‌های مدل کلاسیکی روی رئوس  
 شبکه قرار می‌گیرند. به این ترتیب، هر برهم‌کنش  $S_i S_j$  در  
 مدل آیزینگ به عملگر پائولی  $Z_e$  روی کیوبیت متناظر با یال  
 $e = \langle i, j \rangle$  نگاشته شده است.

با این تفاسیر توانسته‌ایم به طور کامل حالت پایه مدل  
 کوانتومی را بیابیم. البته باید به این نکته نیز توجه داشت که به  
 نظر می‌رسد که می‌توانستیم به جای  $\langle \psi_{00} \rangle$  در رابطه (۸) از  
 دیگر حالت‌های پایه کد چنبره نیز استفاده کنیم؛ اما می‌توان  
 نشان داد که چنین حالت‌هایی در حد  $\beta \rightarrow \infty$  حالت کاملاً  
 مغناطیده  $\langle \dots 00 \dots \rangle$  را تولید نمی‌کنند و بنابراین گذار فاز در  
 بخشی از فضای هیلبرت که با  $\langle \psi_{00} \rangle$  ساخته می‌شود اتفاق  
 می‌افتد. به همین دلیل حتی اگر کد چنبره را با شرایط مرزی باز  
 در نظر می‌گرفتیم باز هم گذار فاز کوانتومی قابل رؤیت بود و  
 وجود تبهگنی در چنین گذاری نقشی ندارد.

از آنجا که حالت پایه کد چنبره‌ای، توصیفی به صورت  
 چگالیده‌ای از لوپ‌ها دارد، این کاملاً مفید خواهد بود که گذار  
 فاز توپولوژیکی بالا را بر اساس تغییر در افت و خیز و دینامیک  
 این لوپ‌ها تفسیر کرد. به بیان دیگر اختلال اعمال شده نقش  
 یک تنش را ایجاد می‌کند که با افزایش آن، افت و خیز لوپ‌ها  
 متوقف شده و در نهایت سیستم به یک فاز کاملاً مغناطیده  
 می‌رود. به این منظور کافی است توجه کنیم که حالت پایه (۸)  
 یک ترکیب خطی از همه پیکربندی‌های لوپ است که دامنه هر  
 جمله از آن مرتبط با وزن بولتزمنی پیکربندی متناظر در مدل  
 آیزینگ کلاسیکی است. به این ترتیب به همان شکلی که با  
 کاهش دما و یا افزایش  $\beta$  در مدل آیزینگ، وزن بولتزمنی  
 مربوط به پیکربندی‌های مختلف نسبت به حالت پایه مدل  
 آیزینگ کاهش می‌یابد، در حالت کوانتومی (۸) نیز دامنه احتمال

هستند و آنهایی که عضو  $\nu$  نیستند بشکنیم، آنگاه اثر عملگر  
 $A_\nu$  روی (۸) به صورت زیر خواهد بود:

$$A_\nu |G(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z}} \left[ e^{-\frac{\beta}{2} \sum_{i \in \nu} Z_i + \frac{\beta}{2} \sum_{i \notin \nu} Z_i} \right] | \psi_{00} \rangle, \quad (9)$$

از طرف دیگر برای عملگر  $e^{-\beta \sum_{i \in \nu} Z_i}$  نیز خواهیم داشت:

$$e^{-\beta \sum_{i \in \nu} Z_i} |G(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z}} \left[ e^{-\frac{\beta}{2} \sum_{i \in \nu} Z_i + \frac{\beta}{2} \sum_{i \notin \nu} Z_i} \right] | \psi_{00} \rangle, \quad (10)$$

بنابراین واضح است که  $Q_\nu |G(\beta)\rangle = 0$  و این حالت پایه  
 هامیلتونی (۶) خواهد بود.

در ادامه باید ضریب بهنجار  $Z$  در رابطه (۸) را بیابیم. با  
 اعمال شرط بهنجارش، واضح است که این کمیت از رابطه زیر  
 به دست می‌آید:

$$Z = \langle \psi_{00} | e^{\beta \sum_i Z_i} | \psi_{00} \rangle, \quad (11)$$

نشان می‌دهیم که این عبارت تابع پارش مدل آیزینگ با  
 هامیلتونی کلاسیکی  $h = - \sum_{i,j} S_i S_j$  روی شبکه مربعی است.

به این منظور، به این نکته توجه کنید که حالت  $|\psi_{00}\rangle$  ترکیب  
 خطی از همه پیکربندی‌های حلقه روی شبکه دوگان بود. حال  
 یکی از این پیکربندی‌ها که متناظر با یک حلقه به طول  $l$  است  
 را در نظر بگیرید و عبارت  $e^{\beta \sum_i Z_i}$  را در آن اثر دهید. از آنجا  
 که  $\langle 0 | 0 \rangle = |0\rangle = -|0\rangle$  حاصل این عبارت برابر با  
 $e^{\beta(N-l)}$  خواهد شد. این کمیتی آشنا است که در بسط دمای  
 پایین مدل آیزینگ روی شبکه مربعی دیده می‌شود. در واقع

حاصل  $\langle \psi_{00} | e^{\beta \sum_i Z_i} | \psi_{00} \rangle$  ترکیب خطی از همه پیکربندی‌های  
 لوپ با دامنه احتمالی معادل با وزن بولتزمنی در مدل آیزینگ  
 است. در نتیجه، واضح خواهد بود که  $Z$  برابر با جمع این  
 وزن‌ها یعنی تابع پارش مدل آیزینگ خواهد بود. البته باید توجه  
 داشت که حالت  $\langle \psi_{00} |$  یک ضریب بهنجار  $2^{L-1}$  نیز داشت  
 که در اثر آن یک ضریب بی‌اهمیت در تابع پارش ضرب خواهد  
 شد. نهایتاً این که، ضریب بهنجار حالت کوانتومی ما، معادل با

#### ۴. تعیین نقطه گذار فاز و تعیین یک پارامتر نظم غیر

##### موضعی

از آنجا که حالت پایه مدل را در اختیار داریم، می‌توانیم وقوع گذار فاز را با بررسی تغییرات در این حالت به ازای تغییر پارامتر  $\beta$  مطالعه کنیم. در واقع گذار فازهای کوانتومی با مشاهده رفتارهایی تکین در کمیت‌هایی مانند درهم‌تنیدگی و شباهت [۳۸-۴۳] در حالت پایه آشکار می‌شوند. در اینجا از معیار شباهت در حالت پایه استفاده می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F = \langle G(\beta) | G(\beta + \delta\beta) \rangle, \quad (12)$$

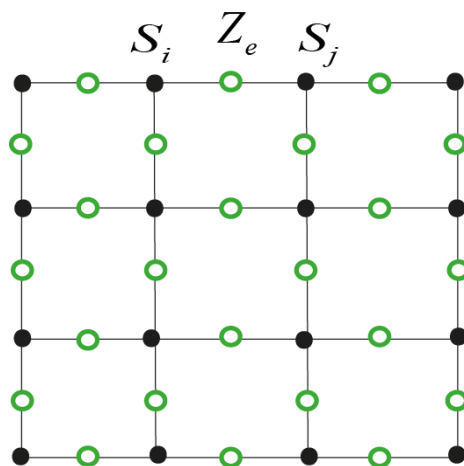
از آنجا که نظم توپولوژیک یک ویژگی تابع موج است، انتظار می‌رود که اگر یک گذار فاز توپولوژیکی رخ داده باشد، بایستی یک تغییر ناگهانی در هنگام عبور از نقطه گذار در حالت پایه رخ دهد. از آنجا که چنین تغییری خود را به صورت تکینگی در معیار شباهت نشان خواهد داد، این معیار می‌تواند جهت تعیین گذار فاز مفید باشد. با توجه به شکل دقیق حالت پایه قادر هستیم که این کمیت را به صورت تحلیلی بررسی کنیم. به این منظور از رابطه (۸) جایگذاری کرده و به عبارت زیر برای شباهت خواهیم رسید:

$$F = \frac{\langle CSS | e^{\left(\beta + \frac{\delta\beta}{r}\right) \sum_i Z_i} | CSS \rangle}{\sqrt{Z(\beta)Z(\beta + \delta\beta)}}, \quad (13)$$

با توجه به این نکته که صورت این کسر مجدداً تابع پارش مدل آیزینگ یعنی  $Z(\beta + \frac{\delta\beta}{r})$  است و با بسط این تابع بر حسب پارامتر کوچک  $\delta\beta$ ، نشان داده می‌شود که تا دومین مرتبه تقریب شباهت حالت پایه به شکل زیر خواهد بود:

$$F = 1 + \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} \delta\beta^2 = 1 - \frac{C_V}{\lambda \beta^2} \delta\beta^2, \quad (14)$$

که در اینجا  $C_V$  ظرفیت گرمایی مدل آیزینگ است. از آنجا که ظرفیت گرمایی در مدل آیزینگ در یک دمای بحرانی رفتار تکین نشان می‌دهد، نتیجه می‌گیریم که شباهت حالت پایه نیز در یک مقدار بحرانی  $\beta_c$  که به صورت  $\frac{1}{k_B T_c}$  به دمای گذار



شکل ۳. متناظر با هر برهم‌کنش در مدل آیزینگ یک کیوبیت روی یال مربوطه قرار داده می‌شود. با تبدیل جمله برهم‌کنشی  $S_i S_j$  در مدل آیزینگ به یک عملگر پائولی  $Z$  روی یال مربوطه، تابع پارش مدل آیزینگ به معادله (۱۱) نگاشته می‌شود.

مربوط به پیکربندی‌های لوپ مختلف کاهش می‌یابد. در نهایت وقتی در مدل آیزینگ در دمای صفر، فقط پیکربندی حالت پایه باقی می‌ماند، در حالت کوانتومی (۸) نیز همه پیکربندی‌های لوپ حذف می‌شوند (دینامیک لوپ‌ها متوقف می‌شود) و فقط جمله مربوط به فاز مغناطیسه باقی می‌ماند.

در نهایت، باید به این نکته نیز تأکید کنیم که همان‌گونه که حالت پایه دستگاه کوانتومی مختل شده به سادگی بر حسب حالت پایه کد چنبره قابل نوشتن بود، می‌توان حالت‌های برانگیخته مدل کوانتومی مختل شده را نیز متناظر با حالت‌های برانگیخته کد چنبره‌ای نوشت. یک نوع حالت برانگیخته از کد چنبره شامل ریسمان‌هایی باز خواهد بود که با اثر دادن عملگرهای پائولی  $\sigma_x$  روی حالت پایه تولید شده‌اند. اگر یک چنین حالتی را با  $|e\rangle$  نمایش دهیم، آنگاه به سادگی نشان داده می‌شود که صرفنظر از ضریب بهنجارش، حالتی به صورت  $e^{\frac{\beta}{r} \sum_i Z_i} |e\rangle$  حالت برانگیخته هامیلتونی مختل شده خواهد بود. جالب آن است که چنین حالتی، ترکیب خطی از ریسمان‌های باز با دامنه‌های احتمالی است که تعیین‌کننده دینامیک ریسمان‌های باز است؛ به طوری که افزایش  $\beta$  موجب متوقف شدن دینامیک ریسمان‌های باز نیز خواهد شد.

حسب ضرب تانسوری از عملگرهای پائولی  $Z$  نوشت. برای یافتن چنین تبدیلی مدل آیزینگ را با شرایط مرزی خاصی در نظر می‌گیریم؛ به این ترتیب که فرض می‌کنیم همه اسپین‌های روی مرز شبکه دو بعدی اسپین  $+1$  دارند. از آنجا که در نهایت حد ترمودینامیکی خواهیم گرفت، این فرض تأثیری بر ویژگی‌های گذار فاز نخواهد داشت. علاوه بر آن مدل آیزینگ با چنین شرایط مرزی مجدداً به کد چنبره نگاشته خواهد شد با این تفاوت که کد چنبره متناظر نیز شرایط مرزی باز خواهد داشت [۳۴].

همان‌گونه که در شکل ۴ الف نشان داده شده است، یک ریسمان دلخواه  $R$  روی شبکه مربعی در نظر می‌گیریم که یک سر آن از مرز شبکه شروع شده و سر دیگر آن به یکی از رئوس شبکه که اسپین  $S_i$  قرار دارد متصل است. از آنجا که اسپین روی مرز مقدار  $+1$  دارد و از آنجا که برای هر متغیر اسپینی داریم:  $S_k^2 = 1$ ، واضح است که می‌توانیم اسپین  $S_i$  را به صورت حاصل ضرب زیر بنویسیم.

$$(S_i S_k)(S_k S_{k-1})(S_{k-1} S_{k-2}) \dots (S_2 S_1)(S_1 \times +1), \quad (15)$$

به این ترتیب مقدار چشمداشتی اسپین  $S_i$  عبارت خواهد بود از:

$$\langle S_i \rangle = \frac{\sum_{\{S_i\}} (S_i S_k)(S_k S_{k-1})(S_{k-1} S_{k-2}) \dots (S_2 S_1)(S_1 \times +1) e^{\beta \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j}}{Z}, \quad (16)$$

در ادامه اگر نگاشت به حالت کوانتومی را با تغییر متغیر از  $S_i S_j$  به عملگر  $Z_e$ ، که  $e$  به کیوبیتی که روی یال  $\langle i, j \rangle$  قرار دارد مربوط می‌شود، اعمال کنیم عبارت بالا به شکل  $e \in R$  تبدیل می‌شود که منظور از  $\langle G(\beta) | \prod_{e \in R} Z_e | G(\beta) \rangle$

همه یال‌هایی است که روی ریسمان  $R$  قرار دارند. این کمیت در واقع مقدار چشمداشتی عملگر  $M_R = \prod_{e \in R} Z_e$  روی حالت پایه هامیلتونی کوانتومی است (شکل ۴ ب). از طرف دیگر می‌دانیم که اگر به حد ترمودینامیکی برویم مقدار متوسط  $\langle S_i \rangle$  که پارامتر نظم مدل آیزینگ است مطابق شکل ۵ الف رفتار خواهد کرد. به این ترتیب مقدار چشمداشتی عملگر  $M_R$  نیز رفتاری مشابه برای مدل کوانتومی داشته، (شکل ۵ ب) و در نتیجه پارامتر نظمی است که گذار فاز کوانتومی را مشخص می‌کند.

مدل آیزینگ مربوط می‌شود، رفتار تکین خواهد داشت. این یک علامت مشخص برای وقوع گذار فاز کوانتومی از حالت توپولوژیکی کد چنبره به حالت کاملاً مغناطیده است.

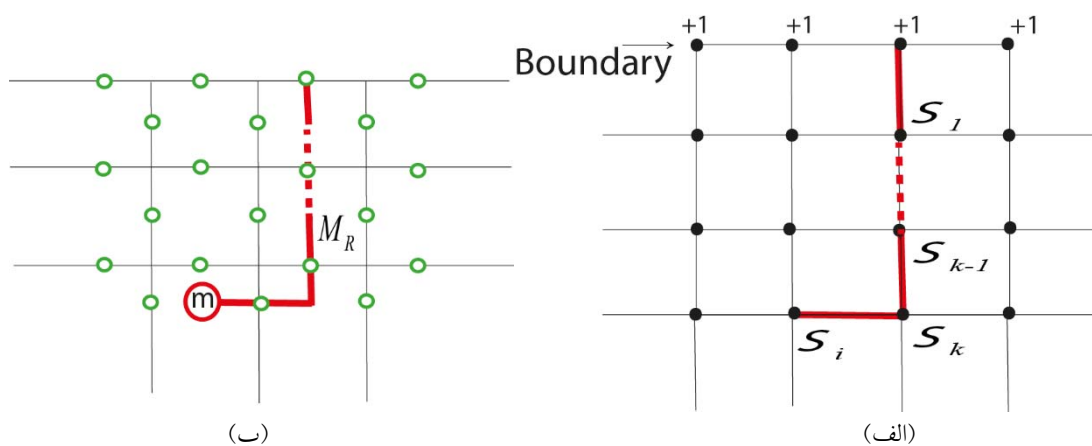
اگر چه رفتار تکین شباهت حالت پایه، به درستی وقوع گذار فاز کوانتومی و نقطه گذار را معین می‌کند، اما ماهیت توپولوژیکی گذار را تعیین نخواهد کرد. به این منظور بایستی به بررسی دیگر کمیت‌ها از جمله درهم‌تنیدگی توپولوژیک پرداخت؛ کاری که در [۳۵] انجام شده است. در این مقاله می‌خواهیم به کمک روش دیگری این ماهیت را مشخص کنیم.

یکی از مهم‌ترین مشخصه‌های فازهای توپولوژیکی، ماهیت غیر موضعی آنهاست. به همین دلیل انتظار می‌رود که یک گذار فاز توپولوژیکی به کمک یک پارامتر نظم غیر موضعی توصیف شود. در ادامه برای گذار فاز مورد مطالعه در اینجا، چنین پارامتری را معرفی می‌کنیم و به این ترتیب ماهیت توپولوژیک گذار فاز را تأیید خواهیم کرد.

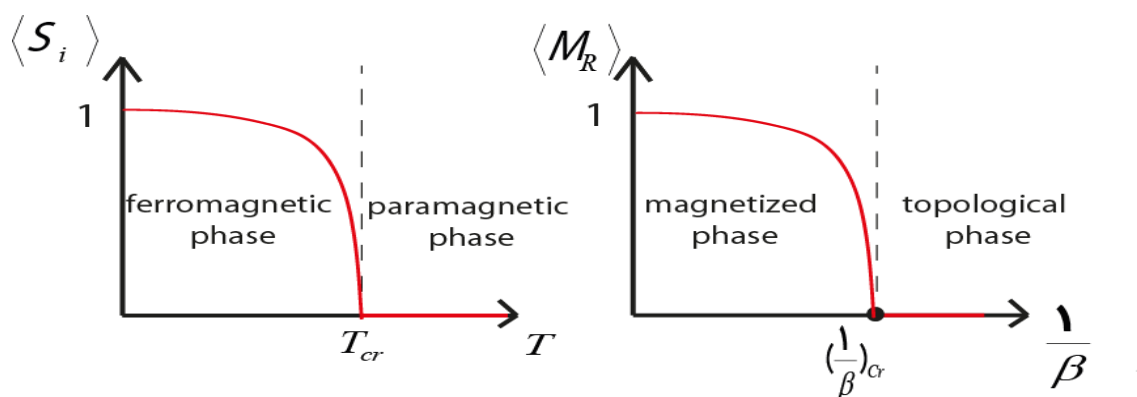
به این منظور، از نگاشتی که به مدل آیزینگ پیدا کردیم شروع می‌کنیم. می‌دانیم که در مدل آیزینگ، مغناطش پارامتر نظم است که در واقع برابر با مقدار چشمداشتی هر اسپین به صورت  $\langle S_i \rangle$  خواهد بود. بنابراین انتظار داریم که اگر پارامتری در مدل کوانتومی هم ارز با این کمیت را بیابیم، آن پارامتر نظم برای گذار فاز کوانتومی باشد؛ چرا که دقیقاً رفتاری مانند مغناطش در مدل آیزینگ را خواهد داشت.

نقطه شروع ما عبارت  $Z = \langle \psi_{\dots} | e^{\beta \sum_i Z_i} | \psi_{\dots} \rangle$  است که ارتباط بین تابع پارش مدل آیزینگ و حالت  $\langle G(\beta) |$  را مشخص می‌کند. همان‌گونه که پیش‌تر گفته شد، عبارت  $e^{\beta \sum_i Z_i}$  در واقع همان وزن بولتزمنی مربوط به مدل آیزینگ است که به جای جمله برهم‌کنشی  $S_i S_j$ ، عملگر  $Z$  نشسته است که بر کیوبیت قرار گرفته بر یال  $\langle i, j \rangle$  در مدل کد چنبره اثر می‌کند. به این ترتیب تبدیلی که مدل آیزینگ را به کد چنبره برده است چیزی نیست جز  $Z_e = S_i S_j$ . دقت کنید که چنین تبدیلی برای همه کیوبیت‌ها برقرار است و از این جهت می‌توان انتظار داشت که با یک تبدیل معکوس، متغیر اسپینی  $S_i$  را بر





شکل ۴. الف) متغیر اسپینی  $S_i$  در مدل آیزینگ را به وسیلهٔ ریسمان  $R$  به یکی از اسپین‌های مرزی می‌رسانیم و ب) با تغییر متغیر از  $S_i S_j$  به عملگر  $Z_e$  برای همهٔ یال‌هایی که متعلق به ریسمان  $R$  هستند، یک عملگر ریسمان  $M_R$  در مدل کد چنبره خواهیم داشت.



شکل ۵. پارامتر نظم مدل آیزینگ به پارامتر نظم ریسمانی در کد چنبره نگاشته می‌شود رفتاری کاملاً مشابه دارند با این شرط که کمیت دما در مدل آیزینگ به  $1/\beta$  در مدل کوانتومی نگاشته شود، با توجه به مقدار شناخته شده برای دمای گذار مدل آیزینگ، مقدار  $\beta_c$  در مدل کوانتومی برابر با  $0/221$  به دست می‌آید.

توجه به مقدار شناخته شدهٔ دمای گذار در مدل آیزینگ کلاسیکی، مقدار  $\beta_c$  برابر با  $0/221$  به دست می‌آید. در مرحلهٔ دوم و مهم‌تر از اول نشان داده‌ایم که چنین گذار فازی به وسیلهٔ یک پارامتر نظم غیر موضعی شناسایی می‌شود. این ویژگی است که گذار فاز توپولوژیک را از دیگر انواع گذار فازها متمایز می‌کند و از این نظر معیاری توپولوژیک برای یک گذار فاز توپولوژیک محسوب می‌شود. در نهایت باید تأکید کنیم که ما، برای یافتن پارامتر نظم ناچار شدیم کد چنبره با شرایط مرزی باز را در نظر بگیریم. با این حال نتایج ما وابسته به این

دقت کنید که رفتن به حد ترمودینامیکی به این معنی است که مرزها را به اندازه‌ای از اسپین  $S_i$  دور کنیم که طول ریسمان از مرتبهٔ طول شبکه شود. این بدان معنی است که عملگر کوانتومی  $M_R$  یک عملگر ناموضعی است؛ ویژگی‌ای که ماهیت توپولوژیک گذار فاز را نشان می‌دهد.

به این ترتیب در مرحلهٔ اول با بررسی معیار شباهت در حالت پایه نشان داده‌ایم که یک گذار فاز کوانتومی در  $\beta_c$  از حالت پایهٔ مدل کد چنبره به یک حالت کاملاً مغناطیده اتفاق افتاده است که دقیقاً با دمای گذار مدل آیزینگ بر اساس رابطهٔ  $\beta_c = \frac{1}{k_B T_c}$  معادل است. با

نگاشت مسئله به مدل آیزینگ کلاسیکی نقش ویژه‌ای در نتایج ما داشت و از آنجا که چنین نگاشت‌هایی برای دیگر مدل‌های کوانتومی نیز وجود دارد، روش ما می‌تواند برای تعیین پارامتر نظم غیر موضعی برای دیگر مدل‌های توپولوژیکی به کار گرفته شود. در نهایت باید تأکید کنیم که پارامتر نظم غیر موضعی به دست آمده در اینجا، می‌تواند گذار فاز توپولوژیکی در مدل کد چنبره‌ای در حضور میدان مغناطیسی یکنواخت را نیز توضیح دهد [۳۷]. به این ترتیب، یکسان بودن پارامتر نظم برای دو نوع اختلال متفاوت در کد چنبره‌ای، نشان می‌دهد که این پارامتر نظم ریسمانی، احتمالاً نامزد خوبی برای یک پارامتر نظم جهانشمول برای کد چنبره‌ای خواهد بود.

انتخاب نخواهد بود؛ به این دلیل که در نهایت حد ترمودینامیکی را اعمال کرده‌ایم.

## ۵. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

دستگاه‌های کوانتومی تنوع بسیاری از نظر فازهای ممکن دارند به طوری که دسته‌بندی آنها بر اساس نوع فاز مسئله‌ای چالشی است. در این میان فازهای توپولوژیکی موقعیت ویژه‌ای دارند؛ به این دلیل که شناسایی آنها به واسطه ماهیت غیر موضعی‌شان ساده نیست. در این مقاله یک فاز توپولوژیک خاص، مشهور به کد چنبره را بررسی کردیم و مشخصه توپولوژیک آن را با معرفی یک پارامتر نظم غیر موضعی که گذار از این مدل به یک حالت مغناطیده را نشان می‌داد، تعیین کردیم. استفاده از

## مراجع

1. N Goldenfeld, "Lectures on phase transitions and critical phenomena", Perseus Books Publishing, L.L.C., Massachusetts (1992).
2. L D Landau, *Ukr. J. Phys.* **11** (1937) 19.
3. X G Wen, *Phys. Rev. B* **40** (1989) 7387.
4. X G Wen and Q Niu, *Phys. Rev. B* **41**, 13 (1990) 9377.
5. X G Wen, "Int. J. Mod. Phys. B 5, 1641 (1991).
6. X. G. Wen, "Topological orders in rigid states, *Int. J. Mod. Phys. B* **4**, 02 (1990) 239.
7. X G Wen, *Adv. Phys.* **44** (1995) 405.
8. N Read and S Sachdev, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 13 (1991) 1773.
9. K Klitzing, G Dorda, and M Pepper, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 6 (1980) 494.
10. G Moore and R Nicholas, *Nuclear Physics B* **360**, 2-3 (1991) 362.
11. R Moessner and S L Sondhi, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 1881.
12. J Abouie, M Mogharrar Jahromi, and S Abedinpour, *IJPR* **17**, 5 (2018) 681.
13. H Jiang, Z Wang, and L Balents, *Nat. Phys.* **8**, 12 (2012) 902.
14. M Levin and X G Wen, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 11 (2006) 110405
15. A Kitaev and J Preskill, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 11 (2006) 110404.
16. S Bravyi, M B Hastings, and S. Michalakis, *J. Math. Phys.* **51**, 9 (2010) 093512.
17. K Duivenvoorden and T Quella. *Phys. Rev. B* **86**, 23 (2012) 235142.
18. R Alicki, M Horodecki, P Horodecki, and R Horodecki, *Open Syst. Inf. Dyn.* **17** (2008) 1.
19. H Bombin, R W Chhajlany, M Horodecki, and M A Martin-Delgado, *New J. Phys.* **15**, 5 (2013) 055023.
20. J B Brown, D Loss, J K Pachos, C N Self, and J R Wootton, *Reviews of Modern Physics* **88**, 4 (2016) 045005.
21. E Dennis, A Kitaev, A Landahl, and J Preskill, *J. Math. Phys.* **43**, 9 (2002) 4452.
22. H Bombin and M A Martin-Delgado, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 180501.
23. B Yoshida, *Ann. Phys.* **326**, 10 (2011) 2566.
24. H Bombin, *New J. Phys.* **17**, 8 (2015) 083002.
25. S Dusuel, M. Kamfor, R. Orus, K. P. Schmidt, and J. Vidal, *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011) 107203.
26. A Y Kitaev, *Ann. Phys. (N.Y.)* **2** (2003) 303.
27. S Trebst, P Werner, M Troyer, K Shtengel, and C Nayak, *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 070602.
28. J Vidal, S Dusuel, and K P Schmidt, *Phys. Rev. B* **79** (2009) 033109.
29. J Vidal, R Thomale, K P Schmidt, and S Dusuel, *Phys. Rev. B* **80** (2009) 081104.
30. I S Tupitsyn, A Kitaev, N V Prokofev, and P C E Stamp, *Phys. Rev. B* **82** (2010) 085114.
31. F Wu, Y Deng, and N Prokof'ev, *Phys. Rev. B* **85** (2012) 195104.
32. M H Zarei, *Phys. Rev. A* **91**, 2 (2015) 022319.
33. M H Zarei, *Phys. Rev. B* **96** (2017) 165146.

39. S. Gu, *Int. J. Mod. Phys. B* **24**, 23 (2010) 4371.
40. S Yang, S J. Gu, C P Sun, and H Q Lin, *Phys. Rev. A* **78**, 1 (2008) 012304.
41. U Marzolino and P Tomaz, *Phys. Rev. B* **96**, 10 (2017) 104402.
42. A Carollo, S Bernardo, D Valenti, *Scientific reports* **8**, 1 (2018) 9852.
43. A Montakhab and A Asadian, *Phys. Rev. A* **82** (2010) 062313.
34. M H Zarei and A Montakhab, *Phys. Rev. A* **99** (2019) 052312.
35. C Castelnovo and C Chamon, *Phys. Rev. B* **77** (2008) 054433.
36. M H Zarei and A Montakhab, arXiv:1907.06216
37. M H Zarei, *Phys. Rev. B* **100** (2019) 125159.
38. A Hama, W Zhang, S Haas, D A Lidar, *Phys. Rev. B* **77**, 15 (2008) 155111.