مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۳، شمارهٔ ۴، زمستان ۱۳۹۲

مکانیک کوانتومی ناجابه‌جایی در حوالی یک جسم سنگین

ابوالفضل جعفری

گروه فیزیک، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه شهرکرد

پست الکترونیکی: jafari-ab@sci.sku.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۰/۱۱/۱۸ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۲/۳/۲۶)

چکیده

دراین مقاله هامیلتونی نهایی مسایلی از مکانیک کوانتومی ناجابه‌جایی در حضور میدان گرانشی کلاسیکی مطالعه می‌شود، که منشاء میدان گرانشی یک جسم کروی متقارن سنگین در نظر گرفته می‌شود. این فرض به متریک شوارتشیلد منجر خواهد شد و فرض می‌کنیم که تأثیر حضور میدان گرانشی ناشی از متریک شوارتشیلد بر دینامیک ذرات در حد یک پاسخ کلاسیکی و به اندازهٔ تغییر در معادلهٔ ژئودزیک ذره باشد..

واژه‌های کلیدی: نظریهٔ میدان‌های کوانتومی، متریک شوارتشیلد، هندسه ناجابه‌جایی

۱. مقدمه

حضور میدان گرانشی و برهم‌کنش اجسام فیزیکی با آن در سطح مکانیک کوانتوم به طور سیستماتیک مشخص نیست و دو روش برای بررسی آن وجود دارد. نخست، روش دوویت[۱] است که در آن سعی می‌شود مکانیک کوانتومی در یک فضا زمان عمومی با زمینه گرانشی بازنویسی شود و دوم، روش وبر[۲] است که در آن پاسخ معادلات دینامیک ذرات به حضور امواج گرانشی به صورت یک پاسخ کلاسیکی فرض می‌شود. البته این دو روش هم‌ارز نیستند و نمی‌توان نتایج حاصل از به کار بردن روش اول یا روش دوم را از روش دیگر به دست آورد [۱-۳].

در بسیاری از مراجع فیزیک معادلهٔ دیراک را در فضا زمان عمومی بازنویسی نموده و انحراف آن را از فضا زمان مینکوفسکی به صورت اختلالی بررسی می‌کنند. در حد غیر نسبیتی این مسأله به معادلهٔ مستقل از زمان شرودینگر با حضور یک پتانسیل مؤثر در معادله ژئودزیک، ناشی از برهم‌کنش ذره با میدان گرانشی منتهی می‌شود [۴-۵].

۲. دینامیک ذره در حضور یک میدان گرانشی متقارن

اگر به اندازهٔ کافی به یک جسم سنگین و متقارن مانند یک سیاهچاله نزدیک شده باشیم می‌توانیم اثرات میدان گرانشی را به صورت تغییر در متریک فضا زمان از متریک مینکوفسکی به متریک شوارتشیلد

۱. De Witt

۲. Weber

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{\left(1-\frac{2GM}{r}\right)}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \quad (۱)$$

بپذیریم. آنچه اینجا مهم است چگونگی تأثیر میدان گرانشی ناشی از این جسم بر معادلات دینامیکی ذرات است. به هر حال اگر بپذیریم که فضا توسط یک میدان گرانشی پر شده است اثرات آن با خمش فضا زمان نمود می‌یابد و بر اساس روش وبر، انحراف در فضا زمان نیز با وارد نمودن نیرویی جدید در معادلهٔ ژئودزیک ذرات، شامل جمله برهم‌کنشی با تانسور ریمان داده می‌شود [۳، ۶–۸]

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = f^i\left(\vec{x}\right) - m\Gamma^i_{00} - m\Gamma^i{}_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k, \quad (۲)$$

مختصات ظاهر شده در عبارت (۲) مربوط به دستگاه موضعی ذره می‌باشد. بنابراین پارامترهایی که در این رابطه آمده است در دستگاه منطبق بر فضا زمان مماس هستند و همچنین مقدار ضرایب (۲) باید با توجه به موقعیت و محل آزمایشگاه لخت (فضا زمان مماس) محاسبه شوند. بنابراین این معادله در فضا زمان مماس اعتبار دارد و تنها ناظری که می‌تواند نتایج حاصل از آن را درست تعبیر نماید ناظری است که در فضای مماس قرار دارد. در متریک شوارتشیلد متقارن $\Gamma^i_{0\beta}$ ها غایب هستند (این مؤلفه‌ها به دلیل تقارن کروی و ایستایی متریک صفر هستند) بنابراین محل ظهور سرعت‌ها در رابطهٔ ژئودزیک، جملهٔ $\Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k$ خواهد بود که بر اساس [۴] متناسب با $R_{jikm}x^m\dot{x}^j\dot{x}^k$ است. از آنجا که مسئلهٔ کوانتومی غیرنسبیتی را برای سرعت‌های کوچک در نظر گرفته‌ایم، در یک محدودهٔ مناسب از سرعت‌ها می‌توانیم از جملهٔ مورد نظر شامل سرعت‌ها صرف‌نظر کنیم و این تقریب نیز بر پادوردا نبودن ناظر فضای مماس و محدودهٔ اعتبار اختلال تاکید دارد. این تقریب با در نظر گرفتن ارزش تانسور ریمان، تقریب بهتر و دسترس‌پذیرتری خواهد بود [۶–۸]. با این توضیحات، معادلهٔ حرکت غیر نسبیتی به معادلهٔ زیر تبدیل می‌گردد

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2} = f_i\left(\vec{x}\right) - mR_{i0j0}x^j, \quad (۳)$$

که در آن x^j مختصهٔ مکانی ذره، m جرم ذره، $f_i\left(\vec{x}\right)$ مؤلفهٔ i همهٔ نیروهای وارد شده به ذره و R_{i0j0} مؤلفه‌های تانسور ریمان هستند که به علت فرض تقارن کروی در متریک شوارتشیلد، دارای جملات خاصی به شکل زیر هستند [۴]

$$R_{0303} = \frac{GM(-GM+r)}{r^4}, \quad R_{0202} = \frac{GM(-GM+r)}{r^4}, \quad R_{0101} = \frac{2GM(2GM-r)}{r^4}, \quad (۴)$$

باید یادآوری کنیم که مسئله در حوالی یک جسم سنگین کروی با شعاع زیاد است و این اجازه می‌دهد که در آینده بتوان در خصوص تانسور خمش ریمان که در روابط (۴) بیان شده‌اند، تقریب‌هایی اعمال نمود.

تا زمانی که ذرات در محدودهٔ سرعت‌های کم یعنی در حالت غیر نسبیتی قرار دارند و پتانسیل‌های حاکم بر آنها تابعی از سرعت نباشند می‌توان لاگرانژی سیستم را به صورت زیر نوشت [۱–۲]

$$L_{NR} = L_0 - \frac{1}{2}mR_{i0j0}x^ix^j, \quad (۵)$$

و اگر ذره دارای بار الکتریکی باشد هامیلتونی آن در حضور میدان الکترومغناطیسی چنین خواهد بود

$$H = \frac{(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A})^2}{2m} + V\left(\vec{x}\right) + \frac{1}{2}mR_{i0j0}x^ix^j, \quad (۶)$$

که در آن p تکانهٔ ذره و $\vec{A}$ پتانسیل برداری است.

با توجه به هامیلتونی پیشنهاد شده در مراجع [۴و۵] چنانچه دیده می‌شود در حد سرعت‌های غیر نسبیتی، انحراف از فضا زمان مینکوفسکی، که محدود به جملهٔ تصحیحی از معادلهٔ (۶) شده است، همان تصحیح شدهٔ پتانسیل کولنی در پیمانهٔ کولن است که بر اساس مرجع [۴] داده می‌شود و اصلاح جدیدی در خصوص بردار پتانسیل لازم نخواهد بود. البته آنچه به رابطهٔ (۶) اعتبار می‌بخشد فرض مستقل از زمان بودن میدان‌های زمینه مانند میدان‌های الکترومغناطیس می‌باشد.

۳. ناجابه‌جایی در مختصات

از عصر نیوتن تا کنون مفهوم فضا زمان دستخوش تغییرات

بسیار زیادی شده است و تغییر در مفهوم فضا برای فواصل کوتاه توسط ریمان پیشنهاده شده است. امروزه دلایل زیادی برای پرداختن به خمینه‌های دیفرانسیل‌پذیر وجود دارد، دلایلی مانند تکینگی‌های نظریهٔ میدان‌های کوانتومی و بهنجارناپذیری گرانش – وقتی کوانتش در مورد آن پیاده می‌شود – که البته این اجبارها ما را به تبیین مفاهیم جدید فضا زمان بیشتر ترغیب می‌نمایند. این یک کوانتش جدید و البته متفاوت از مکانیک کوانتومی است. از نظر تاریخی ناجابه‌جایی در فیزیک می‌تواند به دورهٔ هایزنبرگ برگردد، زمانی که چالش‌های فیزیک کلاسیک خبر از ظهور مفاهیم بسیار بدیعی با منطق دشوارتری را می‌دادند. لیکن داده‌های جدید و نظریه‌های پیش روی فیزیکدانان، نوعی دیگر از ناجابه‌جایی را پیشنهاد می‌دهد که انتظار می‌رود در فواصل کوتاه مکانی قابل درک باشد. ناجابه‌جایی در مکان با راهکارهای متفاوتی دسترس‌پذیر می‌شود، مانند جبر عملگرها, جبر–C^*، جبر ماتریسی و گروه‌های کوانتومی. بسیاری از این فرمول‌بندی‌ها بر اساس بازنویسی نظریهٔ میدان‌های کوانتومی بر پایهٔ نگاشت وایل – مویال استوار است [۹-۱۱]. اگر x و p مختصات فضای فاز ناجابه‌جایی باشند یک کلاس از ناجابه‌جایی با توجه به طبقه‌بندی $\theta^{\mu\nu}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned}
&\left[x^{\mu}, x^{\nu}\right]=i\theta^{\mu\nu}, \\
&\left[x^{i}, p^{j}\right]=i\hbar\delta^{ij}, \\
&\left[p^{\mu}, p^{\nu}\right]=0,
\end{aligned} \tag{۷}$$

که در آن $\theta^{\mu\nu}$، یک تانسور پادمتقارن با بعد متناسب با طرف چپ رابطه است که در برخی مقاله‌های فیزیک برای اندازهٔ آن محدوده‌هایی پیدا شده است. نکتهٔ مهم این است که این روابط در فضا زمان تخت درست هستند و برای فضا زمان با متریک عمومی روابط دیگری پیشنهاد می‌شوند. به همین منظور جهت تأمین این شرط از ناجابه‌جایی، محدودهٔ فضایی مورد مطالعه را در یک آزمایشگاه لخت در حوالی یک جسم کروی سنگین با شعاع زیاد محدود می‌کنیم، به طوری که همزمان هم روابط ناجابه‌جایی بین مختصات به صورت روابط (۷) باشد و هم با تقریب مناسب، بتوان اثرات ناشی از حضور متریک شوارتشیلد را در دینامیک ذرات مشاهده کرد. البته می‌دانیم که برای رسیدن به این اهداف باید مختصات طبیعی ریمان را به کار ببریم. به این ترتیب برای آن دسته مسائلی از مکانیک کوانتومی که در آنها مسیری که ذره تجربه می‌کند در آزمایشگاه لخت کوتاه باشد و یا زمان مورد کاوش کوتاه باشد، مانند اتم هیدروژن، نوسانگر با دامنهٔ محدود و ذره در جعبه و غیره که در محدودهٔ غیر نسبیتی بمانند، می‌توان مختصات ظاهر شده در (۶) را مختصات طبیعی ریمان انتخاب کرد و در این حالت جملات تانسور خمش مقادیری ثابت خواهند بود و آنچه مسلم است این است که در این حالت متریک فضا زمان، همان متریک مینکوفسکی تصحیح شده خواهد بود. پس تمام ضرب‌های ستاره به شکل استاندارد قابل استفاده است.

تأکید می‌شود که در این مقاله ناجابه‌جایی را فقط به ناجابه‌جایی در مختصات مکان محدود می‌کنیم ($\theta^{0\mu}=0$)، یعنی کلاس ناجابه‌جایی را ناجابه‌جایی فضایی در نظر می‌گیریم و همواره تا مرتبهٔ اول از پارامتر ناجابه‌جایی را حفظ خواهیم کرد.

۴. دینامیک ذرات در یک آزمایشگاه لخت در اطراف یک جسم سنگین

بر اساس منابع [۹ و ۱۰] می‌توان با تعویض ضرب‌های فضای معمولی با ضرب ستاره در نظریه‌های میدان‌های کوانتومی معمولی، نظریهٔ میدان‌های کوانتومی مشابه را در فضا زمان ناجابه‌جایی تولید کرد. با توجه به همین قانون، هامیلتونی ذرهٔ باردار در فضا زمان ناجابه‌جایی چنین خواهد بود

$$H_*=\frac{(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A})_*^2}{2m}+V_*\left(\vec{x}\right)+\frac{1}{2}mS_*\left(R_{i0j0},x^i,x^j\right), \tag{۸}$$

به طوری که در آن p تکانهٔ ذره، $\frac{q}{c}$ نسبت بار ذره به سرعت نور، $\vec{A}$ پتانسیل برداری مغناطیسی، m جرم ذره و $V_*(\vec{x})$ تابع پتانسیل است که در ساختن آن به خاطر ناجابه‌جایی بین مختصات، قاعدهٔ متقارن سازی (شبیه متقارن سازی وایل در مورد مختصه و تکانهٔ همیوغ در مکانیک کوانتومی معمولی) رعایت می‌شود. همچنین $S_*\left(R_{i0j0},x^i,x^j\right)$ عبارتی است که

تمام ترکیب‌های متقارن از موجودات داخل پرانتز (شامل مختصات و تانسور خمش ریمان) را بر می‌دارد.

جمع‌بندی جملات بالا به تقریب‌های زیر منجر می‌شود:

۱. فرض می‌کنیم منشاء میدان گرانش یک جسم کروی متقارن است که این فرض در مورد مؤلفه‌های تانسور خمش ریمان به شرط زیر منجر می‌شود $R_{i0j0}=R_i\delta_{ij}$.

۲. مکان هندسی مورد بررسی را تاحد امکان دور از مرکز میدان گرانشی در نظر می‌گیریم به طوری که همزمان قادر به استفاده از روابط ناجابه‌جایی (۷) و متریک شوارتشیلد باشیم.

۳. با پذیرش فرض‌های ۱ و ۲ می‌توانیم مختصات دینامیکی ذره را از مختصات ظاهر شده در تانسور خمش ریمان جدا کنیم.

۴. اثر حضور میدان گرانشی بر دینامیک ذرات را به صورت اضافه شدن یک نیرو به معادلهٔ ژئودزیک می‌پذیریم.

به علت دوری زیاد از منشاء میدان گرانشی (یا کوتاه فرض کردن مسیر ذرات در آزمایشگاه لخت که شرایط غیر نسبیتی پایدار بماند) تغییرات مؤلفه‌های رابطهٔ (۴) نرم و آرام خواهد بود پس مؤلفه‌های تانسور خمش ریمان آنچنان که می‌توانند ثابت فرض شوند از تغییرات آنها هم می‌توان صرف‌نظر کرد. به همین دلیل از حضور آنها در ضرب‌های ستاره صرف‌نظر می‌کنیم. با در نظر گرفتن تقریب‌های گفته شده و استفاده از مختصات طبیعی ریمان، خمینهٔ مورد نظر برای مطالعهٔ مکانیک کوانتومی در حوالی یک جسم سنگین، به فضا زمان مینکوفسکی با یک جمله اضافی که ناشی از برهم‌کنش ذره با میدان گرانشی از طریق متریک شوارتشیلد است، منجر می‌شود.

به این ترتیب در محدوده‌های مناسب از مرکز جسم مولد میدان گرانشی، هامیلتونی ذره چنین خواهد بود

$$H_*=\frac{(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A})_*^2}{2m}+V_*\left(\vec{x}\right)+\frac{1}{2}mR_{i0i0}\left(x^i*x^i\right), \qquad (۹)$$

که در آن منظور از ضرب ستاره، جایگزینی ضرب معمولی با ضرب وایل – مویال است. اکنون با پذیرش مختصات نمایش داده شده به عنوان مختصات طبیعی ریمان، نقش متریک شوارتشیلد در حد ظهور جملهٔ برهم‌کنشی (نیروی گرانشی) $\frac{1}{2}mR_{i0i0}(x^i*x^i)$ است.

با توجه به اینکه پارامتر ناجابه‌جایی دارای مقدار حدی خیلی کوچک در حدود ($\theta\leq10^{-25}$) می‌باشد [۱۲]، بنابراین در یک نگرش اختلالی و بدون اختلاط با تقریب‌های غیر نسبیتی و دست‌یابی به آزمایشگاه‌های لخت به عنوان فضا زمان مماس، می‌توان آن را به عنوان یک پارامتر مستقل بسط در نظر گرفت. با رجوع به نگاشت‌های تقریبی مانند نگاشت ارائه شده در [۱۳]، مطالعه در مسیر اختلالی و حفظ جملات شامل θ تا مرتبهٔ اول، منطقی به نظر می‌رسد. به این ترتیب بازگشت مختصات همیوغ سنتی تعریف شده در مکانیک کوانتومی به سامانهٔ مورد مطالعه قابل دفاع و استفاده خواهد بود.

یکی از روش‌های بازنویسی نظریهٔ میدان‌های کوانتومی در فضا زمان ناجابه‌جایی، بسط هامیلتونی بر حسب پارامتر ناجابه‌جایی است. اگر در روابط بالا، مختصات ناجابه‌جایی را با x_*^i نشان دهیم، آنگاه با تاکید بر حفظ مرتبهٔ اول از پارامتر ناجابه‌جای، مختصات جدیدی به صورت

$$x^i\Big|_*=x^i-\frac{\theta^{jk}}{2\hbar}p_j, \qquad (۱۰)$$

معرفی می‌کنیم که در آن x^i و p_j در روابط ناجابه‌جایی مکانیک کوانتومی صدق می‌کنند. بسط هامیلتونی تا مرتبهٔ اول چنین خواهد بود

$$\begin{aligned}H=&\frac{\vec{p}^2}{2m}+\frac{q^2}{2mc^2}\left(\vec{A}^2-2\frac{\theta^{jk}}{2\hbar}A_ip_j\partial_kA^i+\imath\hbar\frac{\theta^{jk}}{2\hbar}\partial_jA^i\partial_kA_i\right)\\&-\frac{q}{2mc}\left(2\vec{p}.\vec{A}+\imath\hbar\vec{\nabla}.\vec{A}+2\frac{\theta^{jk}}{2\hbar}p_ip_j\partial_kA^i+\imath\hbar\frac{\theta^{jk}}{2\hbar}p_j\partial_{jk}^2A^i\right)\\&+V\left(\vec{x}\right)-\frac{\theta^{jk}}{\hbar}p_j\partial_kV\left(\vec{x}\right)+\frac{1}{2}mR_{i0i0}\left(x^ix^i-\frac{\theta^{jk}}{\hbar}x^ip_j\right),\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

۵. ذرهٔ آزاد، اتم هیدروژن و نوسانگر هماهنگ با فرض ناجابه‌جایی در صفحه *yoz*

در مورد مسائل مکانیک کوانتومی بدون حضور میدان مغناطیسی ($\vec{A}=0$) هامیلتونی سیستم چنین خواهد شد

$$\begin{aligned} H &= \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V\left(\vec{x}\right) - \frac{\theta^{jk}}{\hbar} p_j \partial_k V\left(\vec{x}\right) \\ &+ \frac{1}{2} m R_{i0i0} \left(x^i x^i - \frac{\theta^{jk}}{\hbar} x^i p_j \right), \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

که با لحاظ تقریب‌های نیروی حاصل از تأثیر میدان گرانشی در رابطهٔ فوق و برای یک کلاس از ناجابه‌جایی در صفحهٔ **yoz** ($\theta^{\alpha\beta} = \theta\varepsilon^{\alpha\beta}\delta^{\alpha 2}\delta^{\beta 3}$)، به صورت زیر ساده می‌شود

$$\begin{aligned} H &= \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V\left(\vec{x}\right) - \frac{\theta}{\hbar}\left(p_3 \partial_2 V\left(\vec{x}\right) - p_2 \partial_3 V\left(\vec{x}\right)\right) + \frac{1}{2} m \frac{GM}{R^3} \\ &\times \left(-2x^2 + y^2 + z^2\right) - \frac{1}{2} m \frac{GM}{R^3} \frac{\theta}{\hbar}\left(z p_2 - y p_3\right), \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

این هامیلتونی برای ذرهٔ آزاد چنین می‌شود

$$\begin{aligned} H_{\text{free}} &= \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{1}{2} m \frac{GM}{R^3}\left(-2x^2 + y^2 + z^2\right) \\ &- \frac{1}{2} m \frac{GM}{R^3} \frac{\theta}{\hbar} L_x = H_0 + H_p, \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

که در آن $H_p = -\frac{1}{2} m \frac{GM}{R^3} \frac{\theta}{\hbar} L_x$ و می‌توان آن را به عنوان یک اختلال نیز در نظر گرفت. در مکانیک کوانتومی این یک نوسانگر سه بعدی با بسامدهای

$$\begin{aligned} \omega_x^2 &= -\frac{2GM}{R^3}, \\ \omega_y^2 &= \omega_z^2 = \frac{GM}{R^3}, \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

است که با یک میدان مغناطیسی یکنواخت در جهت محور xها برهم‌کنش می‌نماید و هامیلتونی برهم‌کنش با هامیلتونی اصلی جابه‌جا می‌شود $\left[H_0, H_p\right] = 0$. نکتهٔ جالب برای ذره آزاد، خلق یک نوسانگر موهومی است. هر چند در دو راستای y و z نوسانگرهای ایجاد شده دارای رفتاری طبیعی با بسامد زاویه‌ای حقیقی هستند لیکن بسامد ایجاد شده در راستای x یک بسامد موهومی محض است. این دوگانگی در بسامدها پیامدهایی نظیر انتخاب حالت‌های همدوس را مطرح می‌نمایند. می‌توان نشان داد که تصحیح انرژی سامانه در مرتبهٔ اول، شامل تصحیح گرانشی خالص به اضافهٔ تصحیح جفت‌شدگی گرانش در مشخصات هندسهٔ ناجابه‌جایی خواهد بود. در نگاه اول به نظر می‌رسد که $\langle L_x \rangle = 0$ در حالی که با توجه به موهومی بودن بسامد زاویه‌ای نوسانگر در جهت x، بردار ویژهٔ سامانه در این راستا، منطبق بر انتخاب حالت‌های همدوس بوده و این کمیت صفر نخواهد بود. مطالعهٔ عمیق‌تر در این سطح را می‌توان در مرجع [۱۴] دنبال کرد.

۶. پتانسیل‌های از نوع $\frac{1}{r^n}$

هامیلتونی این سامانه‌ها چنین خواهد بود

$$\begin{aligned} H &= \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{k}{r^n} + \frac{n\theta k}{2\hbar}\left(p_3 \frac{y}{r^{n+2}} - p_2 \frac{z}{r^{n+2}} \right) \\ &+ \frac{1}{2} m \frac{GM}{R^3}\left(-2x^2 + y^2 + z^2\right) \\ &- \frac{1}{2} m \frac{GM}{R^3} \frac{\theta}{\hbar}\left(z p_2 - y p_3\right), \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

که پس از دسته بندی به رابطهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned} H &= \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{k}{r^n} + \frac{1}{2} m \frac{GM}{R^3}\left(-2x^2 + y^2 + z^2\right) \\ &+ \frac{\theta}{2\hbar}\left(\frac{GMm}{R^3} - \frac{nk}{r^{n+2}}\right) L_x, \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

عبارت بالا بسیار کلی است و مطالعهٔ آن خارج از اهداف کاربردی می‌باشد. در حالت خاص و به ازای $n = 1$، هامیلتونی حاصل، اتم هیدروژن با دو تصحیح جداگانه را توصیف می‌کند به طوری که تصحیح دوم به مراتب کوچک‌تر از تصحیح جملهٔ اول خواهد بود. اولین مرتبهٔ تصحیح انرژی برای اتم هیدروژن بدون اسپین و با انتخاب بردار حالت $\left|n,s,l,m\right\rangle$ به سادگی قابل محاسبه است

$$\begin{aligned} &\left\langle n,s,l,m\right| \Big(+ \frac{1}{2} m \frac{GM}{R^3}\left(-2\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2\right) \\ &+ \frac{\theta}{2\hbar}\left(\frac{GMm}{R^3} - \frac{k}{\hat{r}^3}\right)\hat{L}_x \Big) \left|n,s,l,m\right\rangle \\ &= \frac{1}{2} m \frac{GM}{R^3}\left\langle \hat{y}^2 + \hat{z}^2 \right\rangle - m \frac{GM}{R^3}\left\langle \hat{x}^2 \right\rangle \\ &+ \frac{\theta}{2\hbar}\frac{GMm}{R^3}\left\langle \hat{L}_x \right\rangle - \frac{\theta}{2\hbar}\frac{k}{\hat{r}^3}\left\langle \hat{L}_x \right\rangle, \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

از آنجایی که عملگر $\hat{L}_x$ را می‌توان بر حسب عملگرهای بالابر و پایین‌بر بازنویسی کرد، بنابراین دو جملهٔ آخر در تصحیح مرتبهٔ اول نقشی نخواهند داشت. البته این نتیجه‌گیری وابستگی مستقیم به انتخاب کلاس ناجابه‌جایی دارد و با انتخاب کلاسی دیگر از

ناجابه‌جایی ممکن است متفاوت باشد [۱۰]. در یک نگاه همراه با تقارن ممکن است دوجملهٔ اول و دوم نیز یکدیگر را حذف نمایند لیکن با مراجعه به مرجع [۵] دیده می‌شود که تصحیح بیان شده با مشخصات گرانشی معین می‌تواند از مرتبهٔ قابل توجهی باشد. در حوالی سیاهچاله‌های کوچک، تصحیح به دست آمده از مرتبهٔ 10^{-4} eV خواهد بود. در مورد نوسانگر هماهنگ

$$\begin{aligned} H_{\text{osc}} &= \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \frac{\theta}{\hbar}m\omega^2 L_x \\ &+ \frac{1}{2}m\frac{GM}{R^3}\left(-2x^2 + y^2 + z^2\right) - \frac{1}{2}m\frac{GM}{R^3}\frac{\theta}{\hbar}L_x \\ &= \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2 r^2 - \frac{3}{2}m\frac{GM}{R^3}x^2 + \lambda L_x, \end{aligned} \tag{۱۹}$$

به طوری که در رابطهٔ بالا $\lambda = \frac{\theta}{\hbar}m\omega^2 - \frac{1}{2}m\frac{GM}{R^3}\frac{\theta}{\hbar}$ و $\Omega^2 = \omega^2 + \frac{GM}{R^3}$، بسامد تصحیح شده هستند. با توجه به پاریتهٔ جمله، تصحیح ناشی از حضور L_x سهمی نخواهد داشت. در نهایت تصحیح مرتبهٔ اول انرژی به صورت زیر خواهد بود $\Delta E^1 = -\frac{3\hbar M}{4\omega R^3}(2n_x + 1)$.

چنانچه دیده می‌شود در این مورد خاص، قسمتی از اختلال می‌تواند در هامیلتونی اولیه جذب شود و اختلال باقی مانده نیز با هامیلتونی اولیه جابه‌جا می‌شود.

برای بررسی اعتبار اختلالی مسأله و حذف جملات تداخلی شامل سرعت‌ها از معادلهٔ حرکت، می‌توان ناحیهٔ معتبری را جستجو کرد. این کار را با مقایسهٔ نسبت جملات تصحیح گرانشی آغاز می‌کنیم. می‌توان دید که پذیرفتن شرط عددی $v^2/c^2 \leq 10^{-4}$ دلیل محکمی برای چشم پوشی از جملات تداخلی سرعت به دست می‌دهد. برای مرتبه‌نگری می‌توان پروتونی را در حوالی جرمی مانند خورشید در نظر گرفت. آزمایشگاه را در فاصلهٔ $R \approx 10^9 m$ فرض می‌کنیم. با این حساب اندازهٔ ضریب اختلال مستقل از پارامتر ناجابه‌جایی از مرتبهٔ $GM_s m_p / c^2 R^3 \leq 10^{-49}$ خواهد بود و با مراجعه به رابطهٔ (۱۱)، مرتبهٔ اختلال شامل مؤلفه‌های تانسور ریمان و پارامتر ناجابه‌جایی از رتبهٔ $GM_s m_p \theta / c^2 R^3 \hbar \leq 10^{-40}$ است. این ضریب با در نظر گرفتن حد بالای پارامتر ناجابه‌جایی حاصل شده است و برای مقادیر کوچک‌تر آن، تقریب عددی بدتر نیز خواهد شد. هر چند اگر آزمایشگاه در فاصلهٔ کمتر از فاصلهٔ پیشنهاد شده نسبت به جرم مولد متریک شوارتشیلد قرار بگیرد، تقریب ضریب اختلال بهبود خواهد یافت، لیکن شرایط دسترسی به فضای مماس دشوار خواهد شد و پایداری آن نیز دست‌خوش ابهاماتی می‌شود. چرا که اگر R^3 در مخرج ضریب کوچک باشد تغییرات کوچک R، مقدار ضریب را تحت تأثیر قرار خواهد داد. بنابراین این اختلال ممکن است در حوالی سیاهچاله‌ها و برای خوشه‌های کوانتومی که شامل تعدادی زیاد از موجودات کوانتومی باشند، مفید باشد.

۷. نتیجه‌گیری

در این مقاله سعی کردیم با اعمال تقریب‌های مناسب، دینامیک کوانتومی سامانه‌های فیزیکی را در حوالی یک جسم سنگین کروی که آن را منشاء میدان گرانشی فرض کردیم، بررسی کنیم. برای این منظور به روش و بر معادلهٔ ژئودزیک را در فضای مماس تقریب زدیم. همچنین به دلیل فرض غیر نسبیتی بودن ذرات و صرف نظر از جملات شامل سرعت در معادلهٔ ژئودزیک، لاگرانژی آنرا برای فضا زمان مماس با استفاده از روش وارون حدس زدیم و توانستیم هامیلتونی سامانه را بنویسیم. آزمایشگاهی که به صورت سقوط آزاد باشد می‌تواند از نگاه نسبیت عام فضا زمان مماس در نظر گرفته شود که همانند فضا زمان مینکوفسکی تصحیح شده خواهد بود. در مورد فضا زمان مماس، می‌توان به صورت مستقیم ناجابه‌جایی در مختصات را به آن تحمیل کرد. با ساختن فضا زمان مماس دارای شرط ناجابه‌جایی برای دسترسی به هامیلتونی اختلالی ناجابه‌جایی، با استفاده از یک قانون جهان‌شمول ضرب‌های جبر جابه‌جایی را با ضرب ستاره - نگاشت مویال – وایل - تعویض نموده و توانستیم نظریهٔ مکانیک کوانتومی ناجابه‌جایی را بنویسیم. همچنین نشان دادیم که جملهٔ تصحیح اختلالی که به دست می‌آید، با تصحیح تقریب اول مربوط به پتانسیل کولن در فضا زمان مماس که از طریق تصحیح معادلهٔ حرکت ماکسول که توسط پارکر در مرجع [۴] ارائه شده است، یکی است.

مراجع

1. A D Speliotopoulos, *Phys. Rev*. D **51** (1995) 1701.
2. A Saha, S Gangopadhyay, and S Saha, *Phys. Rev*. D **83** (2011) 025004.
3. J Weber, "*General Relativity and Gravitational Waves*", Dover Publications, Inc. New York, (1961).
4. L Parker, *Phys. Rev*. D **22** (1980) 1922; *Phys. Rev. Lett*. **44** (1980) 1559.
5. F Pinto, *Phys. Rev. Lett*. **70** (1993) 3839.
6. C W Misner, K S Thorne, and J A Wheeler "*Gravitation*", Freeman Publishing Company, San Francisco (1970).
7. R D'Inverno, "*Introducing Einstein's Relativity*", Oxford University Press, New York (1992).
8. H C Ohanian, "*Gravitation And Spacetime*", W W Norton & Company, New York (1976).
9. J Wess, J P Aschieri, P Lizzi, and F M Dimitrijevic, "*Symmetries in Noncommutative Geometry and Field Theory*", Springer, Berlin (2009) 774.
10. M Chaichian, P Presnajder, M M Sheikh- Jabbari, and A Tureanu, *Eur. Phys. J*. C **29** (2003) 413; M Chaichian, M M Sheikh-Jabbari, A Tureanu, *Eur. Phys. J*. C **36** (2004) 251. M M Sheikh-Jabbari, *J. High Energy Phys*. **9906** (1999) 015, I F Riad and M M Sheikh-Jabbari, *J High Energy Phys*. **0008** (2000) 045; H Arfaei and M M Sheikh-Jabbari, *Nucl. Phys*. B **526** (1998) 278; A Jafari, *Nucl. Phys*. B **783** (2007) 57.
11. N A Nekrasov "*Trieste Lectures on solitons in Noncommutative Gauge Theories*", hep-th/0011095.
12. M Hamanaka, "Noncommutative Solitons and D-branes".
13. M Chaichian, M M Sheikh-Jabbari, and A Tureanu, *Phys. Rev. Lett*. **86** (2001) 2716.
14. A Jannussis and E Skuras, *Nuovo. Cimento*. B **94** (1986) 29.

IRANIAN JOURNAL OF PHYSICS RESEARCH

Iranian Journal of Physics Research, Vol. 13, No. 4, 2014

Noncommutative quantum mechanics on the outskirts of a heavy objects

A Jafari

Department of Physics, Faculty of Science, Shahrekord University, P. O. Box 115, Shahrekord, Iran
E-mail: jafari-ab@sci.sku.ac.ir

(Received 7 February 2012 ; in final form 15 June 2013)

Abstract
In this study, the noncommutative problems of quantum mechanics in the presence of the classical gravitation field are investigated. It is shown that spaectime will fail by Schwarzschild metric, and classical response to the gravitational field, will be equal to the change in the geodesic derivation equation.

Keywords: quantum field theory, Schwarzschild metric, noncommutative geometry

For full article, refer to the Persian section