

## همگام‌سازی در مدل کوراموتو با نیروی وابسته به زمان در شبکه‌های پیچیده

طاهره ملکوتی خواه و فرهاد شهبازی

دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی اصفهان

پست الکترونیکی: t.malakoutikhah@ph.iut.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۶/۲۳؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۲/۱۱/۸)

### چکیده

ما یک تعمیم از مدل کوراموتو در حضور نیروی وابسته به زمان را معرفی می‌کنیم که در آن فرکانس‌های طبیعی یا جفت شدگی‌های نوسانگرها از یک نیروی خارجی با شدت ثابت و یا تصادفی تأثیر می‌پذیرند. با استفاده از شبیه‌سازی عددی، رفتار چند شبکه پیچیده را تحت مدل کوراموتوی تعمیم یافته بررسی می‌کنیم. تحت این مدل یک رفتار دینامیکی جدید مشاهده می‌شود که در یک لحظه تمام نوسانگرها با هم نوسان می‌کنند و در لحظه بعد کاملاً ناهمگام می‌شوند. همچنین، مشاهده می‌کنیم که رفتار شبکه‌های بی‌مقیاس و تصادفی مشابه و رفتار شبکه جهان کوچک متفاوت از آنها است. علاوه بر این، در شرایطی که نیروی خارجی با توزیع شدت دو قله‌ای روی نوسانگرها اعمال می‌شود، یک رفتار تشدید در شبکه جهان کوچک مشاهده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مدل کوراموتو، همگام‌سازی، پارامتر نظم، شبکه جهان کوچک، شبکه بی‌مقیاس، شبکه تصادفی

### ۱. مقدمه

اجتماعی است. رفتارهای دسته جمعی، مانند همگام‌سازی، با استفاده از سیستم‌هایی از نوسانگرهای جفت شده، می‌توانند شبیه‌سازی شوند.

یکی از مدل‌ها که توسط کوراموتو پیشنهاد شده، شامل یک مجموعه از نوسانگرهای با دامنه ثابت (نوسانگر فاز) متقابلاً جفت شده با سینوس اختلاف فازشان است. مدل کوراموتو روی شبکه‌های مختلفی بررسی شده است. این مدل در عین سادگی به طور قابل قبولی همگامی را توصیف می‌کند [۱].

مدل کوراموتوی اصلی و تعمیم‌های آن یک خاصیت اساسی سیستم‌های زنده، یعنی ذات تغییرپذیر با زمان را ندارند. خواص

طبیعت مبتنی بر سیستم‌های منزوی نیست، بلکه غنی از انواع اتصالات، برهم‌کنش‌ها و ارتباطاتی است که فراتر از باور پیچیده هستند. همگام‌سازی اساسی‌ترین پدیده در ارتباط با نوسانات است. سیستم‌های گوناگون مثل تماشاگرهایی که تشویق می‌کنند، کرم‌های شب‌تاب، جیرجیرک‌های آوازخوان، ضربان‌سازهای قلب و نورون‌های فعال یک تمایل به فعالیت به صورت همگام از خود نشان می‌دهند. پدیده همگام‌سازی در مجموعه‌ای از اجزای دارای برهم‌کنش، موضوع تحقیقاتی علوم گسترده‌ای از جمله فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و علوم

در این مدل هر یک از  $N$  رأس با احتمال  $0 < P_{ER} < 1$  به بقیه رأس متصل می‌شود. بنابراین هرچه  $P_{ER}$  بزرگ‌تر باشد، تعداد یال‌ها بیشتر خواهد شد؛ و اگر  $P_{ER} = 1$  شود، شبکه کامل خواهیم داشت که در آن تمام رأس به یکدیگر متصل هستند [۲].

مطالعه چندین فرآیند دینامیکی روی شبکه‌های حقیقی، حضور میان‌برها را نشان داد، یعنی بعضی یال‌ها مثل یک پل قسمت‌های مختلف شبکه را به هم وصل می‌کنند و به این ترتیب ارتباط میان رأس‌های دور را سرعت می‌بخشند. در شبکه‌های منظم در  $D$  بعد، تعداد میانگین رأس برای رسیدن به یک رأس به طور دلخواه انتخاب شده، به صورت  $N^{1/d}$  با بزرگی شبکه رشد می‌کند؛ برعکس در اغلب شبکه‌های حقیقی، علی‌رغم اندازه معمولاً بزرگشان، یک مسیر نسبتاً کوتاه بین هر دو رأس وجود دارد. این ویژگی به خاصیت جهان کوچک معروف شده و به طور ریاضی با یک میانگین کوتاه‌ترین طول مسیر  $L$  که به طور تقریباً لگاریتمی با اندازه شبکه رشد می‌کند، مشخص می‌شود. این خاصیت اولین بار توسط میلگرام در سال ۱۹۶۰ در یک سری آزمایشات برای تخمین تعداد گام‌ها در یک زنجیره از آشنایی، مورد بررسی قرار گرفت. خاصیت جهان کوچکی در گونه دیگری از شبکه‌های حقیقی، شامل شبکه‌های بیلوژیکی مشاهده شده است؛ همچنین این خاصیت، ویژگی ریاضی بدیهی برخی از شبکه‌ها، مانند شبکه تصادفی هم هست. بر خلاف گراف تصادفی، خاصیت جهان کوچکی در شبکه‌های حقیقی اغلب با یک ضریب خوشه‌گی بالا همراه است. به همین دلیل، واتس و اشتروگاتس در مقاله مهم خود مدلی را پیشنهاد کردند که هر دو ویژگی کوتاه‌ترین طول مسیر  $L$  کوچک، مثل شبکه تصادفی، و ضریب خوشه‌گی  $C$  بزرگ، مثل شبکه منظم را داشته باشد. این مدل مبنی بر بازاریابی یال‌های به هم متصل شده در یک شبکه منظم، به احتمال  $P$  قرار داده شده است. با توجه به شکل ۱ در ناحیه  $0,01 < P_{WS} < 0,05$  شبکه‌هایی به دست می‌آیند که خواص مورد نظر را دارا هستند [۲ - ۴].

مورد معمولی که تا چند سال پیش وجود داشت، شبکه‌های همگن بود. یکنواختی در ساختار برهم‌کنش‌ها به این معنی

مهم سیستم‌های باز، با به حساب نیاموردن دینامیک غیر تعادلی ناشی از پارامترهای وابسته به زمانشان، به آسانی از دست می‌روند. بنابراین، اگر اجازه داده شود فرکانس‌های طبیعی هر نوسانگر با یک نیروی خارجی وابسته به زمان مدوله شوند، همان طور که به طور معمول در طبیعت رخ می‌دهد، کاربردهای مدل کوراموتو به حقیقت نزدیک‌تر می‌شود.

## ۲. ساختار شبکه‌های پیچیده

بسیاری از سیستم‌ها در طبیعت و در تکنولوژی با تعداد بزرگی از واحدهای دینامیکی به هم متصل، ساخته شده‌اند. سیستم‌های شیمیایی و زیستی جفت شده، شبکه‌های طبیعی و اینترنت تعداد کمی از مثال‌ها در این باره هستند. اولین راه برای بیان خواص کلی این قبیل سیستم‌ها، مدل‌سازی آنها به صورت گراف‌هایی است که رأس‌ها واحدهای دینامیکی و یال‌ها وجود برهم‌کنش بین واحدها را نشان می‌دهند.

### ۱. ۲. خواص شبکه

هر شبکه دو خاصیت مهم دارد: طول کوتاه‌ترین مسیر و ضریب خوشه‌گی. کمترین تعداد یالی که برای رسیدن از رأس  $A$  به رأس  $B$  باید طی کنیم را کوتاه‌ترین طول مسیر بین آن دو رأس می‌گویند. طول کوتاه‌ترین مسیر، سرعت انتقال پیام در شبکه را تعیین می‌کند. تعداد مثلث‌های ایجاد شده در شبکه را ضریب خوشه‌گی شبکه می‌گویند که معیاری از تعداد دورهای به طول سه در شبکه است. برای شبکه‌های اجتماعی، وجود حلقه‌هایی به طول سه بیانگر این موضوع است که دوستان یک نفر با چه احتمالی، خود با هم دوست هستند [۲].

### ۲. ۲. توپولوژی شبکه‌های حقیقی و ساخت شبکه‌های پیچیده

مطالعه گراف‌های تصادفی یک منبع غنی از ایده است. در این گراف‌ها یال‌ها به صورت تصادفی توزیع شده‌اند. شبکه‌هایی که توپولوژی سیستم‌های پیچیده را دارند و با اصول نامشخصی سازماندهی شده‌اند، اغلب تصادفی هستند. نظریه گراف‌های تصادفی توسط اردوش و رنی (۱۹۵۹، ۱۹۶۰ و ۱۹۶۱) معرفی شد.

نوسانگرهای فاز به طور ضعیف جفت شده را بررسی می‌کرد. تحول زمانی هر نوسانگر در این مدل به صورت زیر است:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_j a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (1)$$

که در آن  $\omega_i$  فرکانس ذاتی هر نوسانگر،  $K$  ضریب جفت‌شدگی نوسانگرها و  $N$  تعداد رئوس شبکه است که حضور آن تضمین‌کننده رفتار صحیح تابع در حد بینهایت است [۶ و ۷]. اگر دو رأس  $i$  و  $j$  به هم متصل باشند  $a_{ij} = 1$  در غیر این صورت صفر است. جمله سینوسی در این پارامتر نظم معیاری از رفتار کل سیستم است. برای مشخص کردن حالت همگامی در شبکه‌ها، کوراموتو یک پارامتر نظم به صورت زیر تعریف کرد:

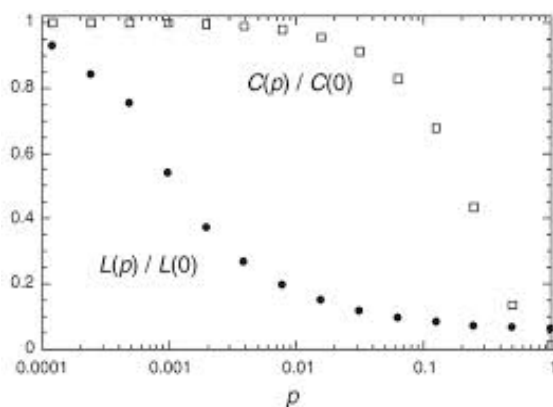
$$r e^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}. \quad (2)$$

در این تعریف فاز  $\psi$  میانگین فاز همه نوسانگرهای موجود و اندازه پارامتر نظم در هر زمان معیاری از رفتار دسته جمعی نوسانگرها در شبکه است. اگر سیستم در حالت همگامی کامل باشد که در آن نوسانگرها با هم نوسان می‌کنند  $r = 1$  است و سامانه به صورت یک نوسانگر به نظر می‌رسد. در حالت ناهمگام  $r = 0$  است و هر نوسانگر بدون توجه به سایر نوسانگرها نوسان می‌کند.

### ۳.۱. مدل کوراموتو تعمیم یافته

جریان‌های نوسانی در سیگنال‌های مغز، مدل دینامیکی مغز تحت بیهوشی که در واقع قدرت بیهوش‌کننده، فرکانس‌های طبیعی را کنترل می‌کند، پاسخ‌های نوسانی مغز که در شرایط مختلف تغییر می‌کند و دینامیک پیری سیستم قلبی عروقی، همه نمونه‌های مشمول ریتم‌های دسته‌جمعی قابل مشاهده مربوط به عوامل وابسته به زمان هستند. هیچیک از این نمونه‌ها به طور مناسب با مدل‌های موجود توصیف نمی‌شوند [۸].

ما یک نیروی خارجی  $\alpha(t)$  به طور صریح وابسته به زمان، معرفی می‌کنیم که فرکانس‌های مدل اصلی را کنترل می‌کند. این اثر می‌تواند از یک میدان میانگین غیر ثابت دیگری آمده باشد، که در ادامه آن را به صورت  $\cos(\Omega t)$



شکل ۱. ضریب خوشه‌گی (C) و کوتاه‌ترین طول مسیر (L) بر حسب احتمال بازاریابی.

است که تقریباً تمام رئوس از لحاظ توپولوژیکی یکسانند، مثل شبکه‌های منظم و تصادفی. در شبکه تصادفی هر  $N(N-1)/2$  یال ممکن با احتمال برابر وجود دارند و بنابراین توزیع درجه دو جمله‌ای و یا پواسون را در حد اندازه‌های بزرگ گراف خواهیم داشت. بر خلاف آنچه که انتظار می‌رفت، مشخص شد که توزیع درجه بسیاری از شبکه‌های واقعی توزیع درجه‌ای به شکل تابع توانی  $P(k) \sim Ak^{-\gamma}$  دارند. علاوه بر این، توزیع درجه آنها بی‌مقیاس است؛ به این معنی که اگر درجه رئوس را از  $k$  به  $\alpha k$  تغییر دهیم، شکل تابع توزیع تغییر نخواهد کرد. ویژگی دیگری که این نوع شبکه‌ها نسبت به شبکه‌های دیگر دارند، باز بودن است. این شبکه‌ها با یک هسته کوچک از رأس‌ها آغاز می‌شوند و پس از آن، تعداد رأس‌ها با گذر زمان اضافه شدن رأس‌های جدید افزایش می‌یابد. برای مثال، شبکه اینترنت به طور نمایی با اضافه شدن صفحات وب جدید رشد می‌کند. از طرفی در بقیه شبکه‌ها احتمال آن که دو رأس به هم متصل شوند مستقل از درجه رأس‌ها است، یعنی یال‌های جدید به طور تصادفی قرار داده می‌شوند. به هر حال، در بیشتر شبکه‌های حقیقی، اتصالات ترجیحی را نشان می‌دهند و تمایل اتصال به یک رأس بستگی به درجه آن رأس دارد (مدل باراباسی و آلبرت) [۲].

### ۳.۳. مدل کوراموتو روی شبکه پیچیده

کوراموتو در سال ۱۹۸۴ مدلی ارائه داد که همگام‌سازی بین

#### ۴. نتایج شبیه‌سازی روی شبکه‌های پیچیده

##### ۴.۱. نیروی اعمالی با توزیع دو قله‌ای

در این قسمت  $\tilde{I}_i$  را به طور تصادفی با یک تابع توزیع چگالی دو قله‌ای  $h(\tilde{I}) = 1/2(\delta(\tilde{I} - \tilde{I}_0) + \delta(\tilde{I} + \tilde{I}_0))$  انتخاب می‌کنیم. مقدار  $\tilde{I}_0 = 1$  را ثابت در نظر می‌گیریم و فرکانس نیروی اعمالی را با گام  $d\tilde{\Omega} = 0/2$  افزایش می‌دهیم.

شکل‌های ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ بستگی زمانی پارامتر نظم را برای شبکه‌های کامل، بی‌مقیاس، تصادفی و شبکه جهان کوچک با دو حالت اولیه مختلف را نشان می‌دهند. در این حالت یک حرکت دسته جمعی دینامیکی جدید مشاهده می‌شود؛ به این ترتیب که، در یک زمان مجموعه نوسانگرها به طور همگام نوسان می‌کنند و در لحظه بعد کاملاً ناهمگامند. برای شبکه‌های کامل، تصادفی و بی‌مقیاس با افزایش  $\tilde{\Omega}$ ، فرکانس پارامتر نظم افزایش می‌یابد و دامنه پارامتر نظم کاهش می‌یابد (شکل‌های ۷ و ۸). رفتار شبکه جهان کوچک کمی متفاوت است؛ در شبکه جهان کوچک یک رفتار تشدید دیده می‌شود که با افزایش فرکانس دامنه ابتدا افزایش و پس از آن کاهش می‌یابد (در  $\tilde{\Omega} = 0/3$ ). همچنین در تمامی شبکه‌ها، دوره تناوب پارامتر نظم شبکه با افزایش فرکانس نیروی خارجی کاهش می‌یابد.

##### ۴.۲. نیروی اعمالی با توزیع گاوسی

در اینجا  $\tilde{I}_i$  را به طور تصادفی و با تابع احتمال گاوسی انتخاب می‌کنیم. واریانس تابع احتمال گاوسی را برابر یک و میانگین آن را صفر انتخاب کردیم. برای تولید داده‌هایی با توزیع گاوسی از الگوریتم باکس مولر<sup>۱</sup> استفاده کردیم [۱۰].

شکل‌های ۹، ۱۰ و ۱۱ بستگی زمانی پارامتر نظم را برای شبکه‌های بی‌مقیاس، تصادفی و شبکه جهان کوچک با دو حالت اولیه مختلف را نشان می‌دهند. با توجه به نمودارهای پارامتر نظم شبکه‌های تصادفی، بی‌مقیاس و جهان کوچک، می‌توان گفت با افزایش فرکانس نیروی خارجی، دامنه و دوره تناوب پارامتر نظم روند کاهشی دارند. رفتار دو شبکه تصادفی و بی‌مقیاس مشابه است و دامنه پارامتر نظم برای مقدار خاصی

در نظر می‌گیریم. در بیشتر موارد، قدرت‌های برهم کنش‌های  $I_i$  با توجه به یک تابع چگالی احتمال  $h(I)$  توزیع شده‌اند، به همین صورت فرکانس‌های ذاتی هم با توجه به  $g(\omega)$  توزیع شده‌اند. مدل کوراموتو مورد بررسی، به صورت زیر است

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + I_i \cos(\Omega t) + \frac{K}{k_i} \sum_j a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (3)$$

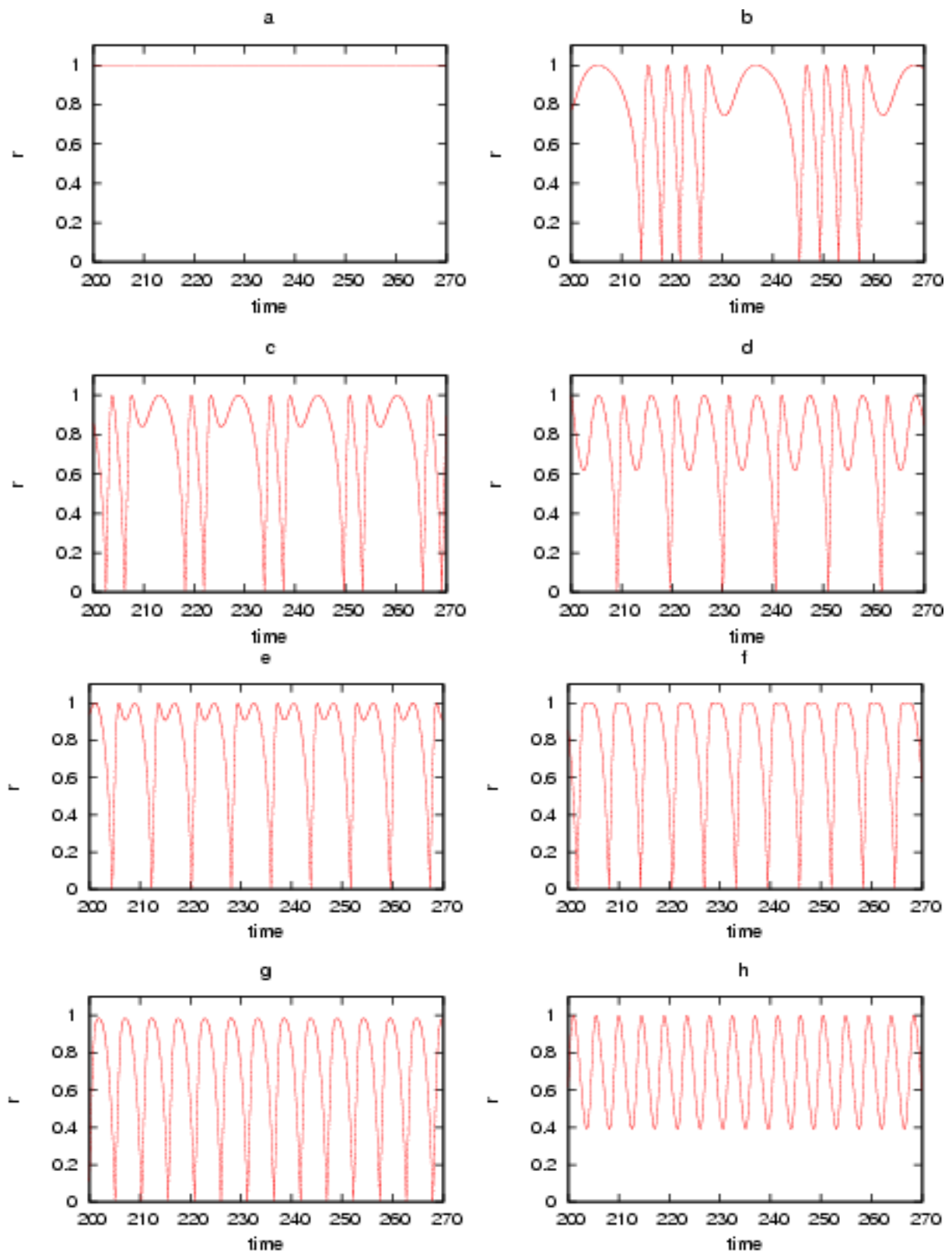
که در آن  $k_i$  درجه راس  $i$ ام و  $\Omega$  فرکانس نیروی اعمالی هستند. مجموعه‌ای از نوسانگرهای فاز را در نظر بگیرید که روی نقاط شبکه قرار داشته باشند. با معادله (۳) شروع می‌کنیم. می‌توانیم با بازمقیاس کردن زمان به صورت  $\tau = Kt$ ، فرکانس‌ها به صورت  $\tilde{\Omega} = \Omega/K$ ،  $\tilde{\omega}_i = \omega_i/K$  و دامنه نیرو به صورت  $\tilde{I}_i = I_i/K$  تعداد پارامترها را کاهش دهیم. به این ترتیب می‌توانیم معادله بالا را در قالب معادله زیر دنبال کنیم

$$\frac{d\theta_i}{d\tau} = \tilde{\omega}_i + \tilde{I}_i \cos(\tilde{\Omega}\tau) + \sum_j \frac{1}{k_i} a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i). \quad (4)$$

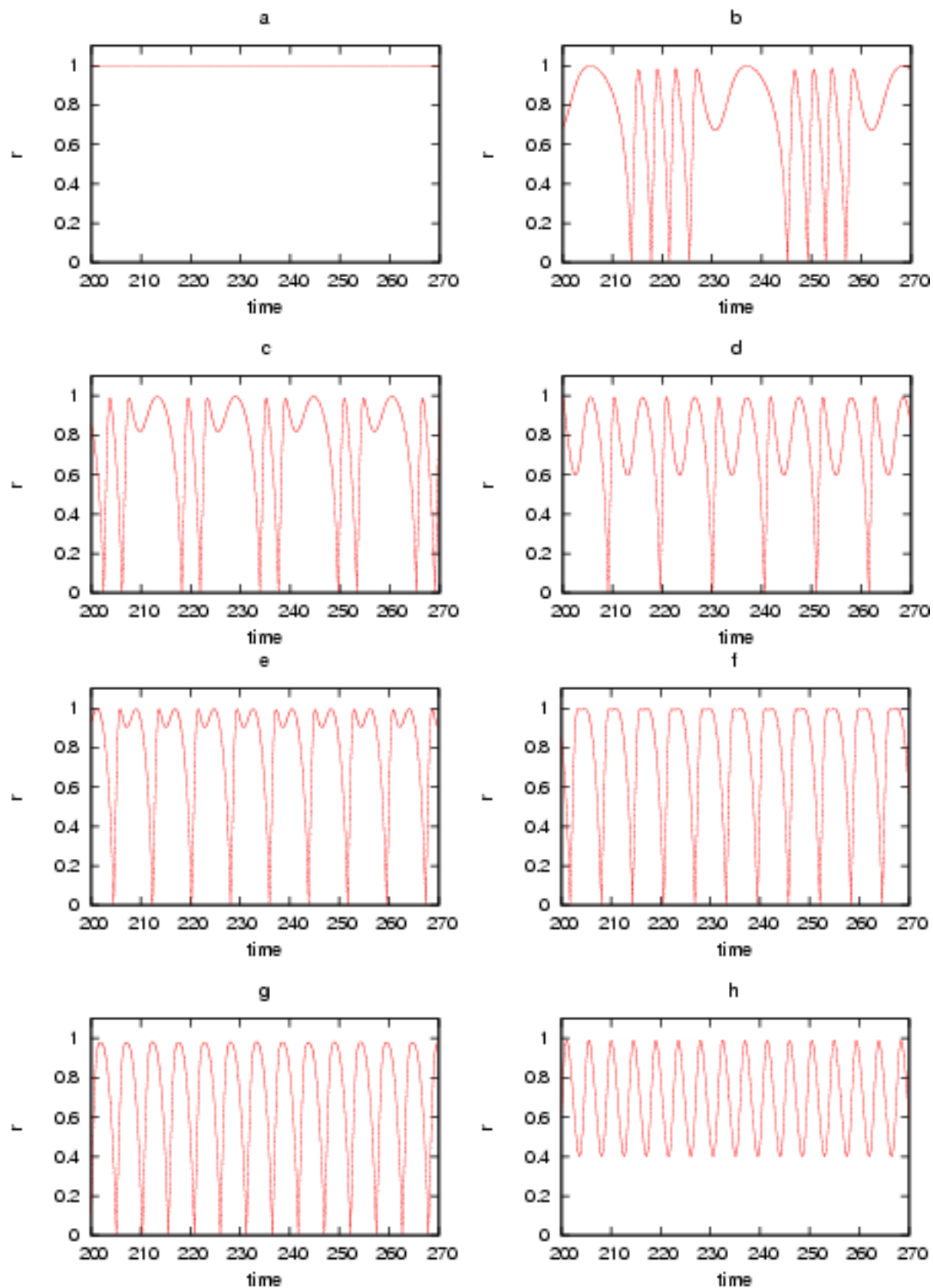
در ادامه  $I_i$  به طور تصادفی با یک تابع توزیع چگالی دو قله‌ای و یا توزیع احتمال گاوسی و فازهای اولیه نوسانگرها را به طور تصادفی در بازه  $[0, \pi]$  انتخاب می‌کنیم. شبکه‌های بی‌مقیاس و تصادفی نسبت به مقادیر اولیه فازهای نوسانگرها حساس نیستند و پارامتر نظم در نبود میدان خارجی به یک میل می‌کند ولی مقدار نهایی پارامتر نظم شبکه جهان کوچک به مقادیر اولیه فازها وابسته است [۵ و ۹]. در این بخش فرکانس‌های ذاتی  $(\tilde{\omega}_i)$  را برابر می‌گذاریم و همگام‌سازی را روی شبکه‌های مختلف بررسی می‌کنیم. با افزایش مقدار  $I_i$ ، تنها دامنه پارامتر نظم افزایش می‌یابد؛ بنابراین،  $I_i$  را ثابت در نظر می‌گیریم و تنها فرکانس نیروی اعمالی را از  $\tilde{\Omega} = 0/1$  تا  $\tilde{\Omega} = 0/7$  با گام  $d\tilde{\Omega} = 0/2$  تغییر می‌دهیم.

الگوریتم اوپلر برای انتگرالگیری عددی معادله (۴) روی شبکه‌های کامل، بی‌مقیاس، تصادفی و جهان کوچک روی ۱۰۰۰ نوسانگر و با گام زمانی  $dt = 0/01$  استفاده شده است. میانگین اتصالات هر راس برای تمام شبکه‌ها  $\langle k \rangle = 10$  است (به استثناء شبکه کامل). برای شبکه جهان کوچک  $P = 0/03$  قرار دادیم.

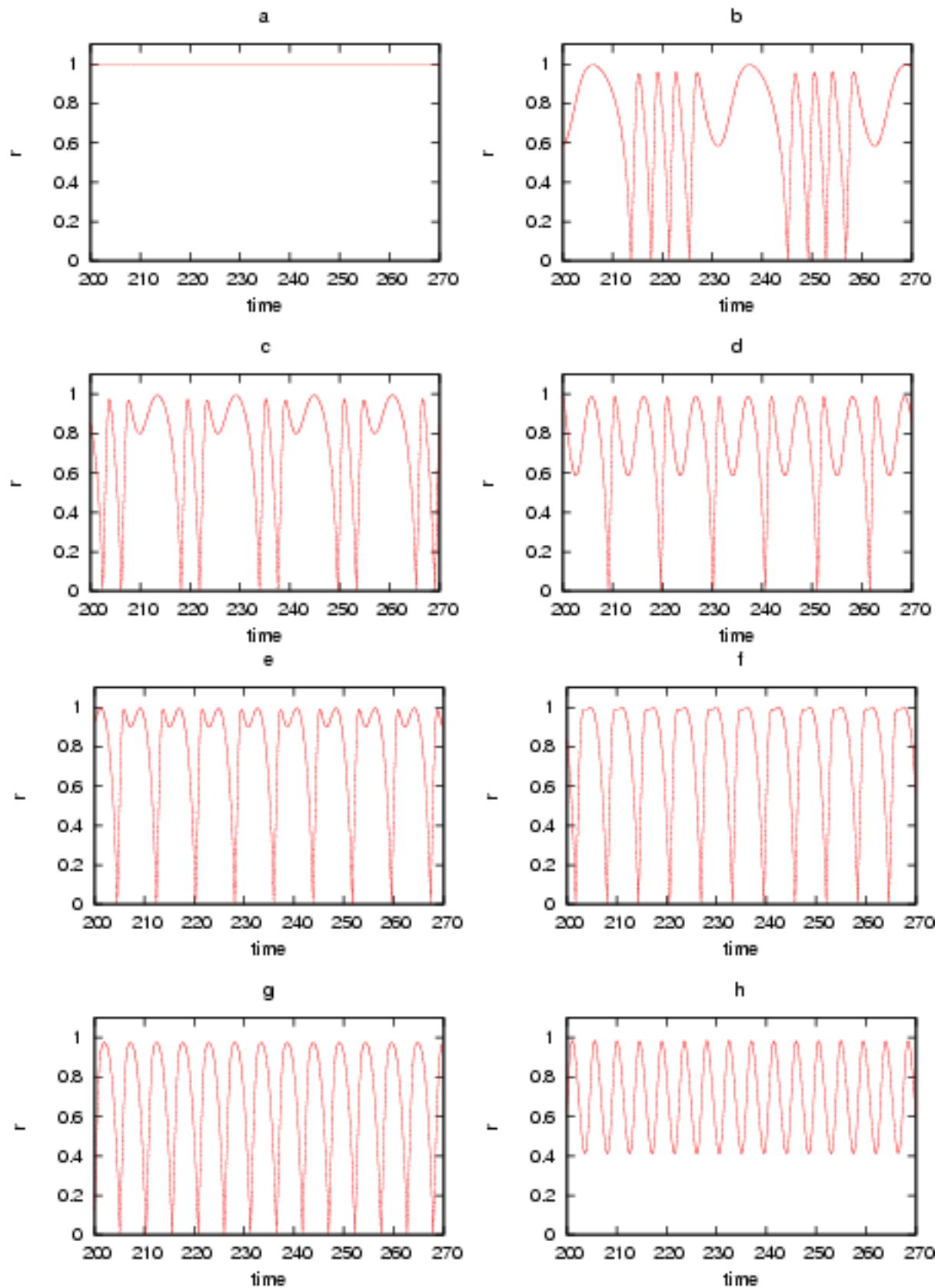
۱. Box Muller method



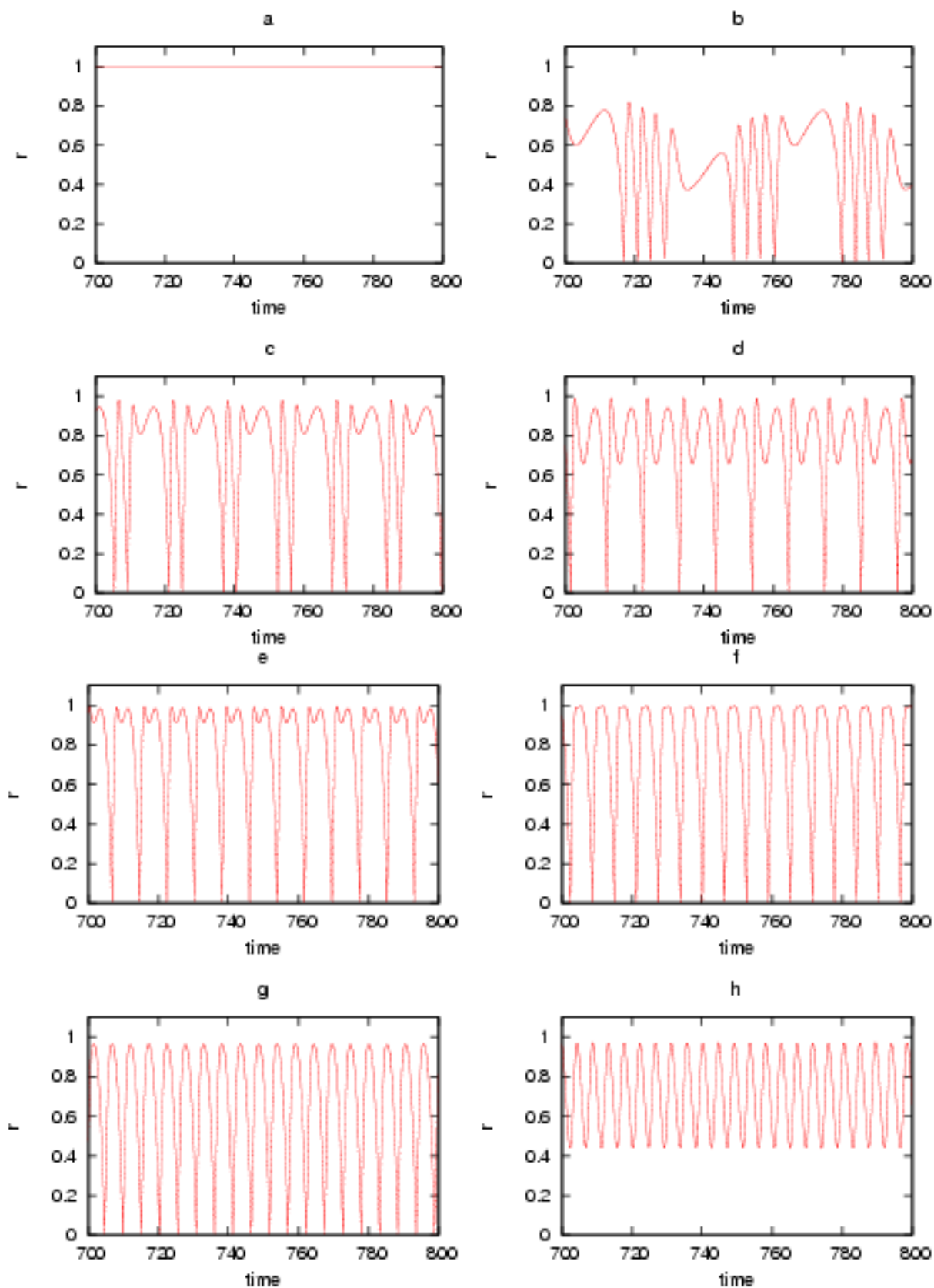
شکل ۲. پارامتر نظم بر حسب زمان برای شبکه کامل، در حضور نیروی وابسته به زمان با توزیع دامنه دو قله‌ای. برچسب‌های a تا h به ترتیب مطابق با مقادیر  $\tilde{\Omega}$  بین ۰ و ۰٫۷ با گام‌های ۰٫۱ هستند.



شکل ۳. پارامتر نظم بر حسب زمان برای شبکه بی‌مقیاس، در حضور نیروی وابسته به زمان با توزیع دامنه دو قله‌ای. برچسب‌های a تا h به ترتیب مطابق با مقادیر  $\Omega$  بین  $0^\circ$  و  $70^\circ$  با گام‌های  $10^\circ$  هستند.

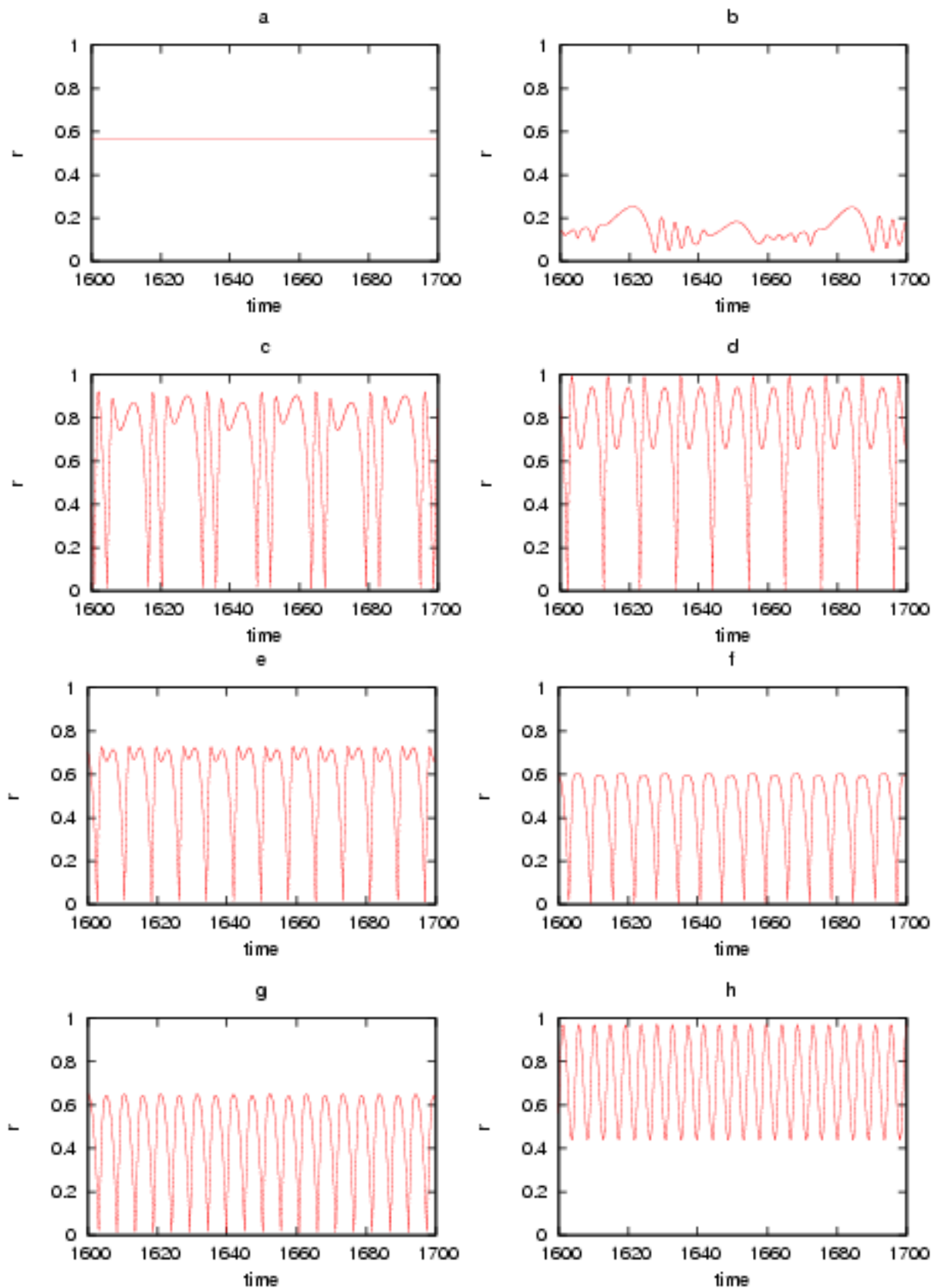


شکل ۴. پارامتر نظم بر حسب زمان برای شبکه تصادفی، در حضور نیروی وابسته به زمان با توزیع دامنه دو قله‌ای. برچسب‌های a تا h به ترتیب مطابق با مقادیر  $\Omega$  بین  $0^\circ$  و  $70^\circ$  با گام‌های  $10^\circ$  هستند.

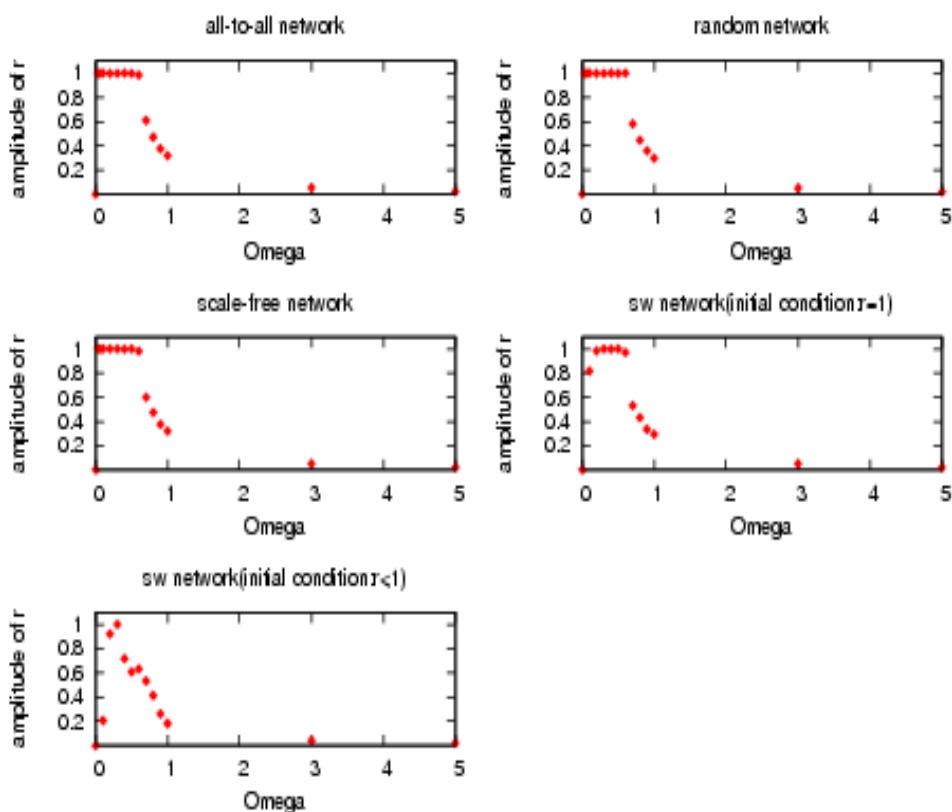


شکل ۵. پارامتر نظم بر حسب زمان برای شبکه جهان کوچک با شرایط اولیه  $r = 1$ ، در حضور نیروی وابسته به زمان با توزیع دامنه دو قله‌ای. برچسب‌های a تا h به ترتیب مطابق با مقادیر  $\tilde{\Omega}$  بین ۰ و ۰٫۷ با گام‌های ۰٫۱ هستند.

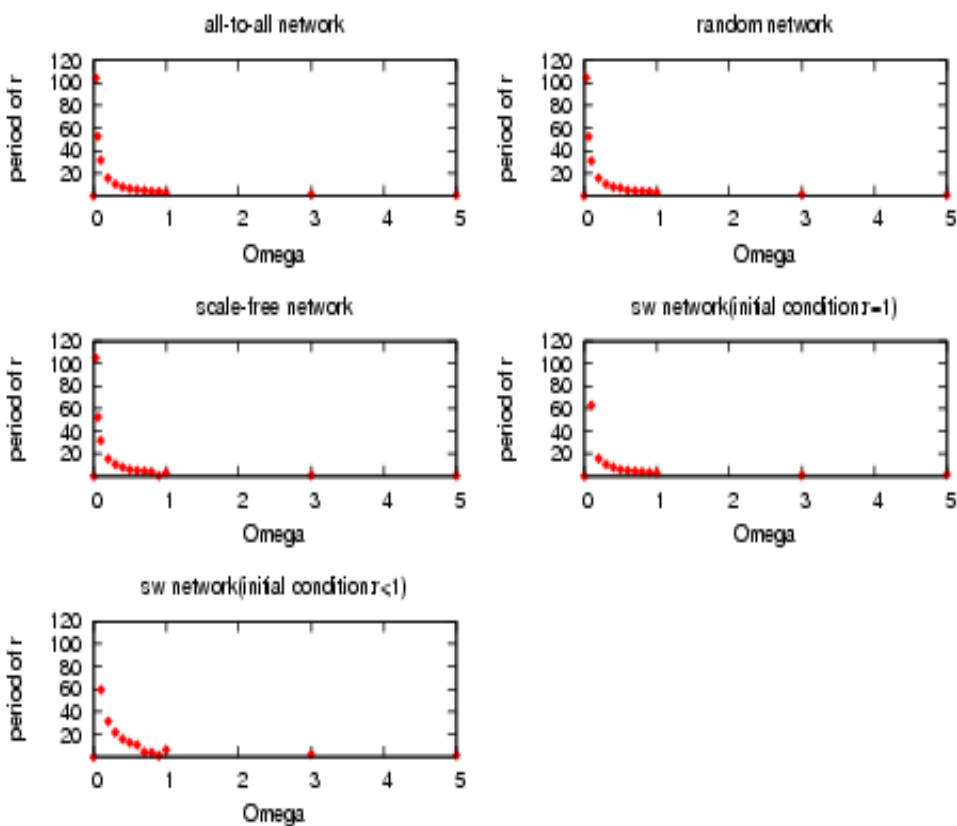




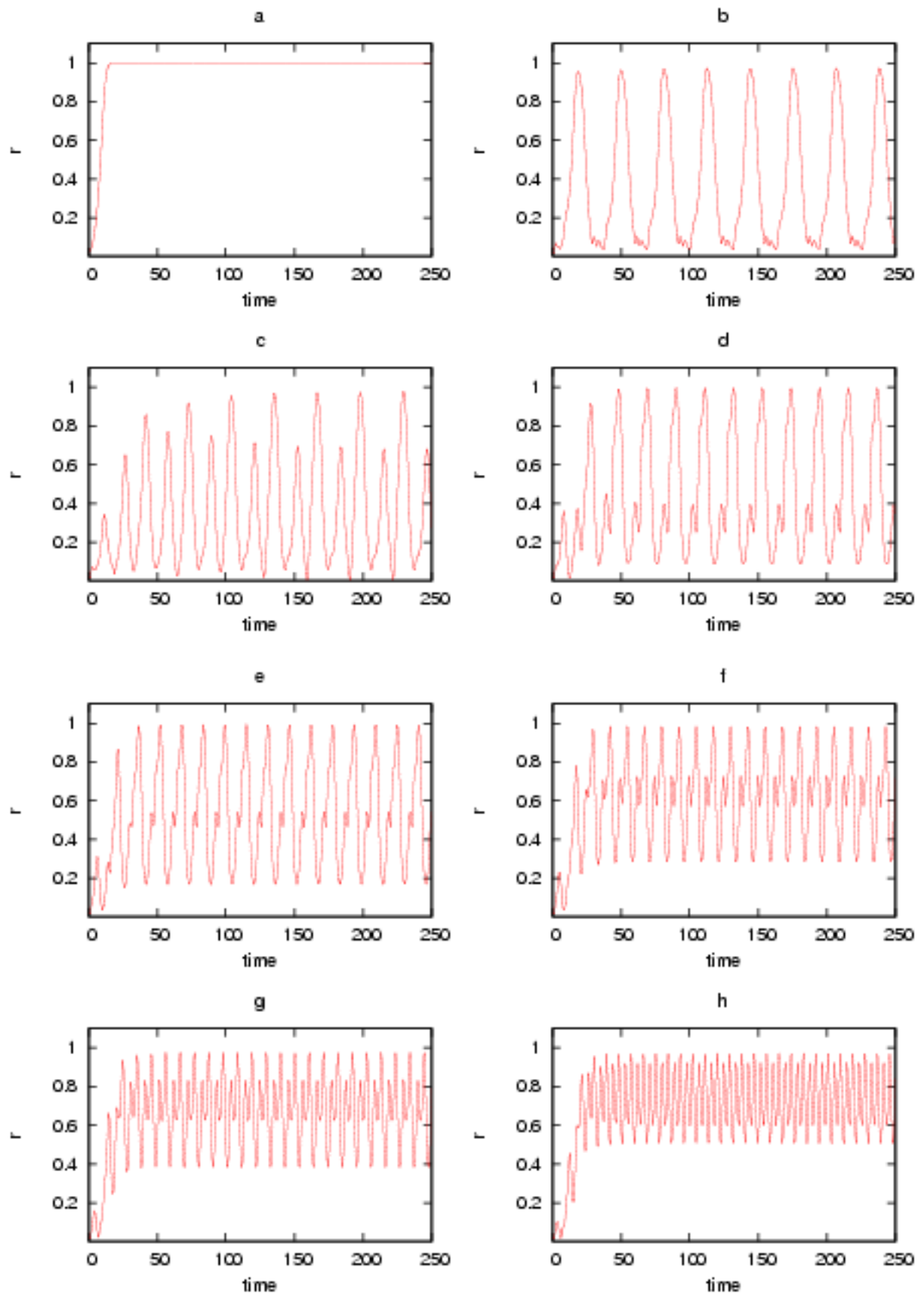
شکل ۶. پارامتر نظم بر حسب زمان برای شبکه جهان کوچک با شرایط اولیه  $r < 1$ ، در حضور نیروی وابسته به زمان با توزیع دامنه دو قله‌ای. برچسب‌های a تا h به ترتیب مطابق با مقادیر  $\tilde{\Omega}$  بین ۰ و ۰٫۷ با گام‌های ۰٫۱ هستند.



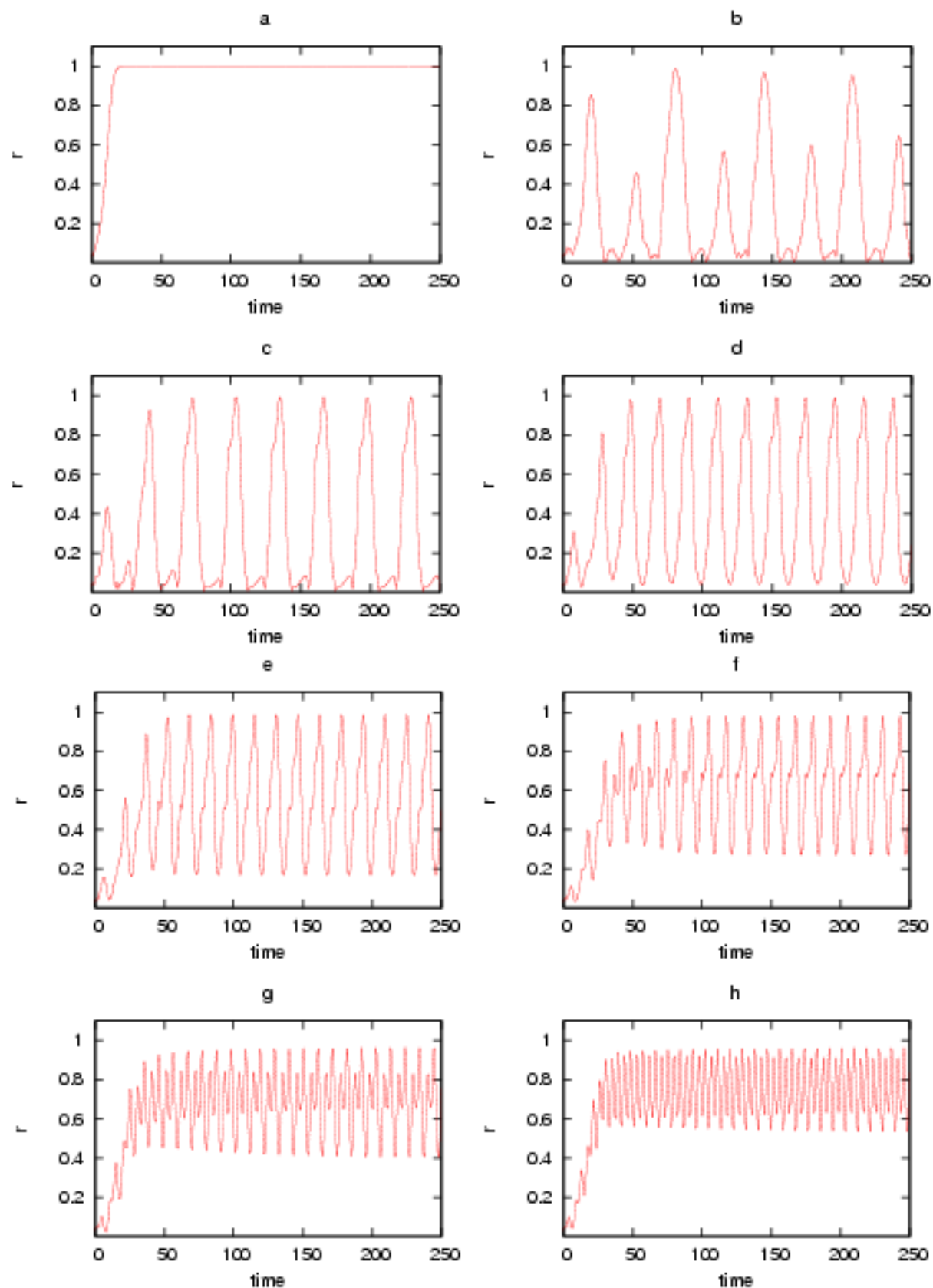
شکل ۷. دامنه پارامتر نظم بر حسب  $\tilde{\Omega}$  برای شبکه‌های کامل، بی‌مقیاس، تصادفی و جهان کوچک با دو حالت اولیه مختلف.



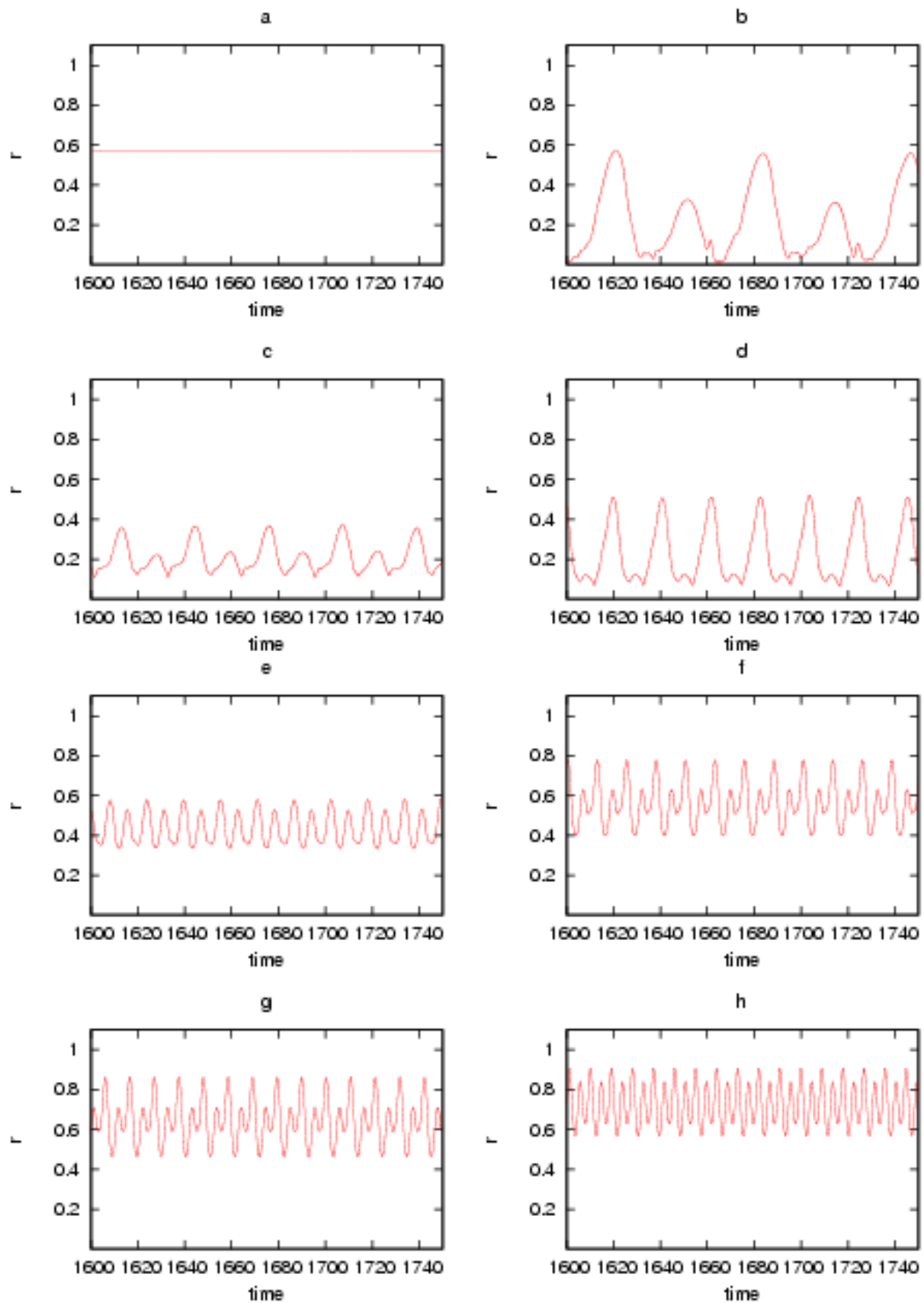
شکل ۸. دوره تناوب پارامتر نظم بر حسب  $\tilde{\Omega}$  برای شبکه‌های کامل، بی‌مقیاس، تصادفی و جهان کوچک با دو حالت اولیه مختلف.



شکل ۹. پارامتر نظم بر حسب زمان برای شبکه بی‌مقیاس در حضور نیروی خارجی وابسته به زمان با توزیع دامنه گاوسی. برچسب‌های a تا h به ترتیب مطابق با مقادیر  $\Omega$  بین  $0^\circ$  و  $70^\circ$  با گام‌های  $10^\circ$  هستند.

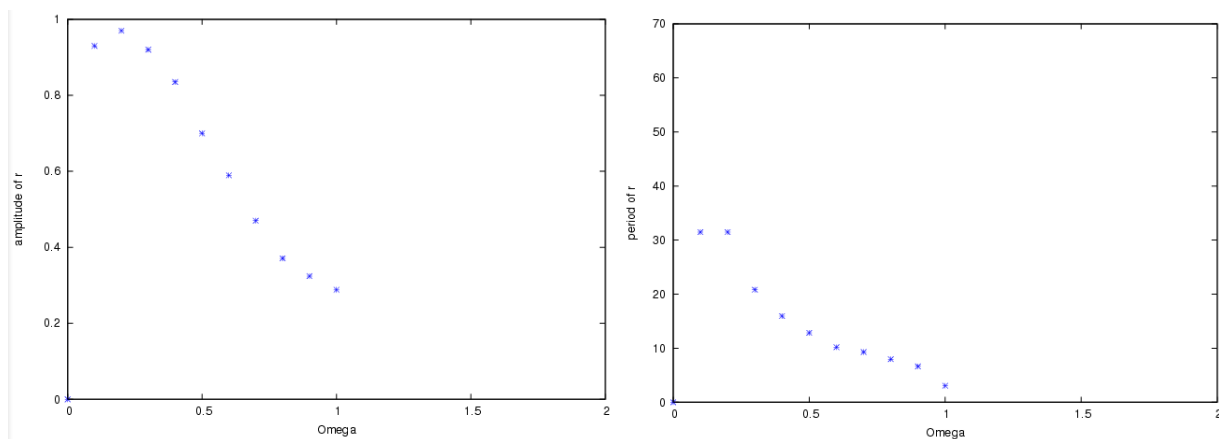


شکل ۱۰. نظم بر حسب زمان برای شبکه تصادفی در حضور نیروی خارجی وابسته به زمان با توزیع دامنه گاوسی. برچسب‌های a تا h به ترتیب مطابق با مقادیر  $\bar{\Omega}^2$  بین ۰ و ۰٫۷ با گام‌های ۰٫۱ هستند.

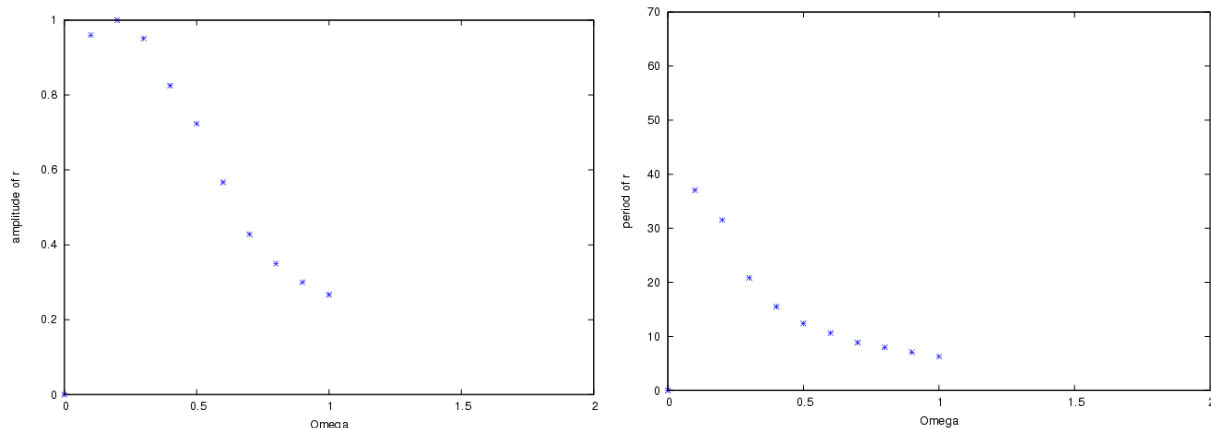


شکل ۱۱. پارامتر نظم بر حسب زمان برای شبکه جهان کوچک با شرایط اولیه  $r < 1$ ، در حضور نیروی وابسته به زمان با توزیع دامنه گاوسی.

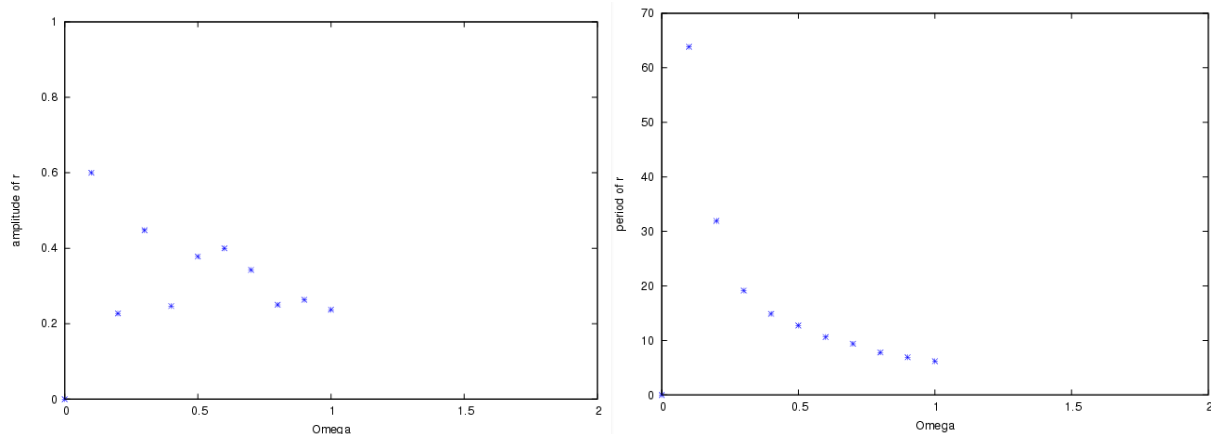
بر حسب‌های a تا h به ترتیب مطابق با مقادیر  $\tilde{\Omega}$  بین ۰ و ۰٫۷ با گام‌های ۰٫۱ هستند.



شکل ۱۲. دامنه و دوره تناوب پارامتر نظم شبکه بی‌مقیاس بر حسب فرکانس نیروی خارجی.



شکل ۱۳. دامنه و دوره تناوب پارامتر نظم شبکه تصادفی بر حسب فرکانس نیروی خارجی.



شکل ۱۴. دامنه و دوره تناوب پارامتر نظم شبکه جهان کوچک بر حسب فرکانس نیروی خارجی.

دوره تناوب پارامتر نظم می‌توان گفت با افزایش فرکانس نیرو، کاهش می‌یابد؛ ولی در این مورد هم شبکه جهان کوچک متفاوت است و پارامتر نظم این شبکه، دوره تناوب بزرگتری دارد (شکل‌های ۱۲، ۱۳ و ۱۴).

از  $\bar{\Omega}$  به بیشینه مقدار خود می‌رسد و پس از آن کاهش می‌یابد. رفتار پارامتر نظم شبکه جهان کوچک متفاوت است و روند کاهشی دامنه آن منظم نیست؛ اما با افزایش فرکانس نیروی خارجی، مقدار میانگین پارامتر نظم افزایش می‌یابد. در مورد

## ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله رفتار نوسانگرهای برهم‌کنشی تحت اختلال پیوسته و واداشته را بررسی کردیم. در این مورد یک حرکت دسته جمعی دینامیکی جدید مشاهده می‌شود؛ به این ترتیب که در یک زمان مجموعه نوسانگرها همگام هستند و در لحظه بعد کاملاً ناهمگام می‌باشند. رفتار پارامتر نظم را برای شبکه‌های جهان کوچک، تصادفی، بی‌مقیاس و کامل را تحت شرایط مختلف بررسی کردیم و رفتار متفاوت شبکه جهان کوچک را مشاهده کردیم. به طور کلی در حضور نیرو با دامنه ثابت، با

افزایش فرکانس نیروی خارجی، فرکانس پارامتر نظم افزایش و دامنه آن کاهش می‌یابد. در شبکه جهان کوچک، در حضور نیروی خارجی که دامنه آن توزیع دو قله‌ای دارد، یک رفتار تشدید با تغییر فرکانس نیروی اعمالی مشاهده شد. در این حالت، با افزایش فرکانس نیروی خارجی، ابتدا دامنه پارامتر نظم افزایش و پس از آن کاهش می‌یابد. این رفتار متفاوت شبکه جهان کوچک مربوط به دو ویژگی اصلی آن، یعنی داشتن ضریب خوشه‌گی بزرگ‌تر و میانگین طول کوتاه‌ترین مسیر کوچک‌تر نسبت به بقیه شبکه‌ها است.

## مراجع

1. A Pikovsky, M Rosenblum, and J Kurths, "Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences", Cambridge University Press, New York (2001).
2. S Boccaletti, V Latora, Y Moreno, M Chavez, and D Hawang, *Physics Reports* **424** (2006) 175.
3. D J Watts and S H Strogatz, *Nature* **393** (1998) 440.
4. S Strogatz, "Synchronization: The Emerging Science of Spontaneous Order", Hyprion (2003).
5. H Khoshbakht, F Shahbazi, and K Aghababaei Samani, *J. Stat. Mech.*, 10020, (2008).
6. Y Kuramoto., *Lecture Notes Physics*, Springer, New York **39** (1975) 420.
7. C Wah WU, "Synchronization in Complex Networks of Nonlinear Dynamical Systems", World Scientific, Singapore (2007).
8. S Petkoski and A Stefanovska, *Phys. Rev. E* **86** (2012) 046212.
9. R Kouhi Esfahani, F Shahbazi, and K Aghababaei Samani, *Phys. Rev. E* **86** (2012) 036204.
10. G E P Box and M E Muller, *Ann. Math. Statist.* **29**, 2 (1958) 351.



Iranian Journal of Physics Research, Vol. 13, No. 4, 2014

## Synchronization of Kuramoto model with time-varying forcing in complex networks

T Malakoutikhah and F Shahbazi

Department of Physics, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran  
E-mail: t.malakoutikhah@ph.iut.ac.ir

(Received 14 September 2013 ; in final form 28 January 2014)

### Abstract

In this paper, a generalization of the Kuramoto model is introduced by explicit consideration of deterministically time-varying periodic external force. In this model, the oscillator's natural frequencies and amplitude of collective oscillations are influenced by external forces with constant or random strengths. Then, the synchronization behavior of forced Kuramoto model is studied in some complex networks. In the model, a new collective dynamics behavior is observed, i.e., all the oscillators are synchronized at one second, and after a little time, all of them become unsynchronized. Also, a distinct behavior of small-world networks is observed. When the strength of external force has a bimodal distribution, a resonant behavior in small-world network is seen.

**Keywords:** Kuramoto model, synchronization, order parameter, small-world network, scale-free network, random network

For full article, refer to the Persian section