

## هامیلتونی‌های پیمانه‌ای شده برای ذره آزاد بر رویه‌هایی در فضای پیکربندی و فاز

مهدی دهقانی

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد

پست الکترونیکی: dehghani@sci.sku.ac.ir

(دریافت مقاله ۱۳۹۱/۳/۳۱؛ دریافت نسخه نهایی ۱۳۹۴/۱۰/۲)

### چکیده

روشی برای پیمانه‌ای کردن دستگاه‌های نوع دوم که شامل دو قید در ساختار رشته‌ای هستند، ارائه می‌دهیم. در این روش با افزودن تکانه نظیر متغیر وس زومینو به قید اولیه و شرط نوع اول شدن، یک هامیلتونی جدید و نوع اول می‌سازیم. قیدهای اولیه را به دو شکل اتحاد در فضای پیکربندی و اتحاد در فضای فاز در نظر گرفته و تلاش می‌کنیم شکل عمومی هامیلتونی‌های آنها را به دست بیاوریم.

واژه‌های کلیدی: گسترش فضای فاز، قید نوع دوم، تقارن پیمانه‌ای، انتقال استاکلبرگ

### ۱. مقدمه

معادلات ماکسول، هنگامی که برحسب مجموعه پتانسیل‌های الکترومغناطیس نوشته شوند، به عنوان اولین نظریه منسجم فیزیکی برای توصیف یکی از برهم‌کنش‌های چهارگانه طبیعت دارای تقارن پیمانه‌ای هستند. حتی پس از کوانتس این برهم‌کنش و وارد کردن نقش علت‌های تولید برهم‌کنش الکترومغناطیس (بار  $(U(1)$  لپتون‌ها) نظریه حاصل دارای تقارن پیمانه‌ای است. این تقارن منشأ پایستگی بار الکتریکی در نظریه کوانتمی الکترودینامیک و باعث هموار و متناهی شدن رفتار آن در فاصله‌های کمتر از ابعاد اتم‌ها است. ارتباط تقارن پیمانه‌ای با

رفتار هموار یک نظریه در فاصله‌های کوچک (در مقیاس همان نظریه) را توفت و دیگران نشان داده‌اند [۱-۵]. بنابراین پیدا کردن نظریه‌های پیمانه‌ای، به واسطه اهمیت آنها در توصیف مناسب و عاری از رفتار تکین، برای برهم‌کنش‌های اساسی طبیعت و دیگر برهم‌کنش‌ها، مثلاً ارائه نظریه برای پدیده‌های مغناطیسی در فیزیک ماده چگال، همواره از اهداف اصلی فیزیک نظری بوده است. این اهمیت تا به آنجا بوده است که یکی از اجزای اصلی هر نظریه بنیادی در فیزیک تقارن پیمانه‌ای و تقارن‌های فضا زمان است که حتی این تقارن دوم را هم در بسیاری از جاها به زبان تقارن پیمانه‌ای بیان می‌کنند. هرگاه

یک اتحاد علاوه بر قید نوع اول صدق داد. این اتحاد هر عبارت دلخواهی در فضای فاز نیست. پیدا کردن این اتحاد جدید این گونه است که باید هم یوغ کانونی قید نوع اول دستگاه باشد. این نقطه ارتباط بین قیدهای نوع اول و دوم است. ارتباطی که به کمک آن می توان درجه های آزادی به ظاهر زائد در یک مدل را به تقارن های آن تبدیل کرد.

قیدهای نوع دوم را می توان همان قیدهای نوع اول نیز تصور کرد که کسی با یک انتخاب و اعمال مناسب هم دست نظیرش (ثبیت پیمانه) یکی از بی نهایت حالت یکسان دستگاه را برگزیده است. البته عکس آن نیز امکان پذیر است، می توان نوع دومها را با افزودن مختصه هایی جدید به شکل مختصه های بی تکانه و یا تکانه های بی مختصه درآورد و یک نظریه نوع اول (پیمانه ای) ساخت. این نوع نگاه اساس روش هایی مانند BFT و فدیف- جکیو [۶ و ۷] است که در آنها با گسترش فضای فاز به یک دستگاه اولیه با قیدهای نوع دوم تقارن پیمانه ای می بخشند. به این گسترش نیز غوطه وری می گویند. در این مقاله به کمک روشی که معرفی می کنیم با افزودن یک مجموعه از یک تکانه و تابعی از مختصه آن به هامیلتونی از یک رده عام از دستگاه های نوع دوم دستگاه پیمانه ای می سازیم.

اساس روش انتقال استاکلبرگ که برای پیمانه ای کردن به کار می بریم، این است که می توان یک میدان پیمانه ای را به طریق آشنای جفت شدگی کمینه به تکانه و جمله جنبشی یک نظریه اضافه کرد [۸ و ۹] و در نتیجه یک هامیلتونی ناوردای پیمانه ای تحت مولدی که تکانه نظیر متغیر جدید است، پیدا کرد. استاکلبرگ این کار را برای دستگاهی انجام داد که از ابتدا پیمانه ای ولی میدان پیمانه ای آن بدون جرم بود [۸]. او با افزایش جمله جرمی مناسب تقارن را هنوز نگه می داشت. از این ایده استفاده می کنیم و برای مدل ذره آزاد که به نوعی یک تقارن پیمانه ای بدیهی دارد این عملیات را تکرار می کنیم. اضافه کردن مختصات پیمانه ای به مختصات ذره آزاد بدون هیچ پیش زمینه ای به نظر بدیهی و مصنوعی می رسد. اما این کار را در چارچوب یک دستگاه مقید نوع دوم انجام می دهیم. یعنی ذره به واقع در تمام فضای پیکربندی اولیه اش کاملاً آزاد نیست و

تقارن پیمانه ای در مدلی وجود داشته باشد، مانند هر تقارن دیگر، انتقال دستگاه با مولد آن تبدیل پیمانه ای دستگاه را ناوردا نگاه می دارد. در حالت ایده آل اگر این نوع از درجه آزادی به صورت ساده یک مختصه، یا میدان در یک نظریه با تعداد بی نهایت درجه آزادی، باشد آن وقت این مولد به راحتی شناخته شده و در عمل تکانه نظیر آن مختصه (میدان) است. با این حال بخشیدن غنای پیمانه ای به یک مدل در قالب ترکیبی از درجه های آزادی آن و یا حتی افزودن درجه آزادی جدید و گسترش فضای فاز انجام می شود و یافتن مولد نیز کاری سراسر نخواهد بود.

نظریه دستگاه های مقید به واسطه حدس، تاکنون تأیید شده، دیراک کمک می کند تا هم یک دستگاه را پیمانه ای کنیم و هم در صورت نیاز تابع مولد آن را بیابیم. در دسته بندی دیراک اتحادهایی که در فضای فاز بین مختصات وجود دارند به دو دسته اساسی تقسیم می شوند. دسته اول آنهایی هستند که همانند یک مختصه یا تکانه بدون هم دست در فضای فاز حضور دارند. این موجودات، دستگاه فیزیکی را با هم دست خود منتقل می کنند بدون آن که آن را تغییر دهند (ناوردایی تحت انتقال). اینها همان قیدهای نوع اول هستند که بنابر حدس دیراک مولد نوعی تبدیل پیمانه ای در فضای فاز یا در شکل کوانتمی شده در فضای حالت های کوانتمی، فضای هیلبرت یا فضای فوک، می شوند. دسته دوم، زوج اتحادهایی هستند که به کمک هم و با بازآرایی آنها به کمک قضیه داربو زوج مختصه و تکانه هایی از دستگاه اولیه را کم کرده و ما را به فضای فاز فیزیکی می رسانند. این زوجها در اصل مربوط به هیچ درجه آزادی در دستگاه نیستند و باید حذف شوند. وقتی که اینها به شکل ساده مختصه و تکانه نباشند، حذف کردنشان به راحتی امکان پذیر نیست، ولی دیراک با معرفی گروه خود روش کم کردن آنها را به ما یاد داده است.

گفتیم قیدهای نوع اول نشان دهنده نوعی تقارن در دستگاه فیزیکی است. این تقارن ایجاب می کند که بی نهایت حل مربوط به یک حالت فیزیکی داشته باشیم. برای انتخاب یک جواب یکتا برای یک حالت یکتا از بین بی نهایت جواب آنها را باید در

مربوط به نیم‌فضاهای مختلف برای محاسبهٔ کروشهٔ پواسون توابع به کمک می‌آید تا کمی این عبارات‌ها را به شکل بسته و موجز بنویسیم. نمادهای  $\nabla$  و  $\nabla_p$  به ترتیب به معنای گرادیان در نیم‌فضاهای مختصات و تکانه‌ها است. یک دستگاه مقید با قیدهای نوع دوم، که با شهود عام و ابتدایی ما از قید نیز هم‌خوان است، یک ذرهٔ آزاد محدود بر روی یک سطح است. این سطح می‌تواند تخت یا خمیده باشد و با یک تابع هموار از مختصات فضای پیکربندی،  $f(\bar{q}) = 0$ ، توصیف می‌شود. اجزای اصلی تعیین‌کنندهٔ دینامیک این دستگاه با عبارات‌های هامیلتونی، قیدها و جبر بین آنها داده می‌شود

$$H_c = \frac{1}{2} \bar{p} \cdot \bar{p}, \quad T_1 = f(\bar{q}), \quad (1)$$

$$T_1(\bar{q}, \bar{p}) = \bar{p} \cdot \nabla f, \quad \{T_1, H_c\} = \nabla f \cdot \nabla f.$$

اتحاد اولیهٔ  $T_1$  باید در همهٔ زمان‌ها برقرار باشد و این شرط قید ثانویهٔ  $T_2 = \{T_1, H_c\}$  را می‌سازد. از شکل این قید دیده می‌شود که همیشه  $T_2 \approx T_1$  و همان‌طور که در عبارات‌های بالا دیده می‌شود دو قید اولیه و ثانویه نسبت به هم نوع دوم هستند و بنابراین سازگاری قید دوم منجر به تعیین ضریب نامعین لاگرانژ می‌شود که قید اولیه را به هامیلتونی کانونی اضافه کرده بود. این دو قید در یک زنجیرهٔ قیدی از سازگاری همدیگر به دست آمدند. بنابراین اگر یکی را دستکاری کنیم دیگری نیز متأثر می‌شود. هدف این است که قید اولیه تبدیل به نوع اول شود تا ثانویه به وجود نیاید.

اکنون می‌خواهیم از این مدل سادهٔ نوع دوم یک مدل پیمانه‌ای بسازیم. برای این کار درخواست این است که قید اولیه  $T_1$  با اضافه شدن یک تکانهٔ جدید که متناظر با تکانهٔ متغیر اضافه شده به فضای فاز است، به یک قید نوع اول تبدیل شود و البته قید ثانویه نیز در سازگاری تولید نشود. این شرط در معادلهٔ زیر آمده است

$$\tilde{T}_1 = T_1 + f, \quad \{\tilde{T}_1, \tilde{H}_c\} \approx 0. \quad (2)$$

فرض این است که عدد گراسمانی متغیرهای جدید با متغیرهای قبل با هم برابرند و همهٔ درجه‌های آزادی مسئله بوزونی هستند. یک حل پیشنهادی برای هامیلتونی آن است که چند جمله‌ای که

درجه‌های آزادی آن کمتر از مقدار در نظر گرفته شده است. این درجه‌های آزادی اضافی که مربوط به قیدهای نوع دوم هستند را به درجهٔ آزادی پیمانه‌ای تبدیل می‌کنیم. به این منظور قید اولیه‌ای را، که می‌دانیم در ادامه سازگاری نوع دوم می‌شود، یک تکانه در نظر گرفته و با افزودن تکانهٔ متغیر جدید تمامی آن را به یک تکانه که مولد تبدیل پیمانه‌ای- بگوئید قید نوع اول- است، تبدیل می‌کنیم. سپس با استفاده از شرط نوع اول شدن تغییر و تصحیح در هامیلتونی را محاسبه می‌کنیم. تعداد قیدهای نوع دوم همواره زوج است. پس راحت‌ترین دستگاه نوع دوم شامل دو تا قید نوع دوم است. این دو قید می‌توانند در عرض هم و از تکینگی نگاشت لژاندر حاصل شده باشند، که در این صورت به وجود آمدن یکی به دیگری مربوط نیست و یا در طول هم باشند که به معنی آن است که قید ثانویه از سازگاری قید اولیه حاصل شده است. این دستهٔ دوم از قیدهای نوع دوم ساختار رشته‌ای دارند. برنامهٔ نوع اول سازی خود را برای چنین دستگاهی به کار می‌بندیم، چون در آن تنها یک قید را نوع اول می‌کنیم و دومین قید پس از نوع اول شدن اولیه، اصلاً به وجود نمی‌آید. انجام این کار برای چهار قید نوع دوم یا بیشتر به راحتی انجام‌پذیر نیست و در حال حاضر مشغول انجام محاسبات و ساختن فرمول‌بندی آن هستیم.

## ۲. ذرهٔ آزاد بر روی رویه در فضای پیکربندی

قبل از ارائهٔ مدل‌های خود نمادگذاری متغیرها و توابع مربوط به مسئله را معرفی می‌کنیم. مجموعهٔ مختصات توصیف‌کنندهٔ دستگاه را با نماد برداری  $\bar{q}$  نشان می‌دهیم. این شکل نوشتن به معنای یک آرایهٔ  $d$  تایی از مختصات دینامیکی مسئله است. به هر کدام از مختصه‌ها یک تکانهٔ کانونی در فضای فاز منتسب است بنابراین تکانه‌های مزدوج به بردار  $\bar{q}$  را نیز در یک آرایه قرار داده و آن را با  $\bar{p}$  نمایش می‌دهیم. این دو نیم‌فضا به همراه هم فضای فاز دستگاه مورد نظر را می‌سازند. بردارهای پایه هر دو نیم‌فضا اما یکسان هستند، به گونه‌ای که ضرب دو بردار از دو نیم‌فضای مختلف معنی دارد. به خصوص ضرب نقطه‌ای بردارهای

حالت‌های  $\hat{H}_c |\mathbb{E}\rangle = E |\mathbb{E}\rangle$  دستگاه را می‌سازیم و از بین آنها حالت‌هایی که در شرط  $\hat{T}_1 |\mathbb{E}\rangle_{phys} = 0$  صدق می‌کنند را به عنوان حالت فیزیکی انتخاب می‌کنیم.

با قید نوع اول پیدا شده می‌توان هر وردشی از متغیرهای مسئله را محاسبه کرد. واضح است که  $Uf = 0$ ، بنابراین  $f = 0$  و از این معادله همراه با اتحاد قیدی  $\hat{T}_1 = 0$  می‌توان متغیر پیمانه‌ای‌ساز و تکانه آن را حذف و در همان فضای فاز اولیه یک نظریه پیمانه‌ای داشته باشیم. با انجام این کار هامیلتونی ذره آزاد به صورت زیر در می‌آید

$$\tilde{H}_c = H_c - \frac{1}{\psi} (\vec{p} \cdot \nabla f)^2 (\nabla f \cdot \nabla f)^{-1}. \quad (5)$$

در شکل کلاسیک، این رابطه می‌گوید که با انتخاب رویه‌هایی در فضای پیکربندی می‌توان رابطه انرژی-تکانه ذره را به دلخواه تنظیم کرد. اگر رویه یک ابرصفحه تخت با معادله  $f(\vec{q}) = \vec{a} \cdot \vec{q}$  در فضای پیکربندی باشد، جمله اضافه شده به مدل همانند در نظر گرفتن ذره به عنوان ذره‌ای باردار در میدان مغناطیسی ثابت می‌شود. اگر رویه مورد نظر یک کره باشد، استفاده از این روش به کوانتس کانونی مدل اسکایم می‌انجامد که در مرجع [۱۰] آمده است. یک سؤال جالب توجه این است که آیا رویه‌ای وجود دارد که پس از غوطه‌وری آن رابطه پاشندگی ذره به شکل نسبیتی  $\sqrt{\vec{p}^2 + 1}$  در بیاید. به بیانی دیگر آیا رویه‌ای وجود دارد که غوطه‌ور کردن آن در فضایی بزرگ‌تر معادل با فضا زمان مینکوفسکی بشود؟ با کمی توجه به رابطه (۶) و کمی سعی و خطا دیده می‌شود که چنین حلی وجود ندارد و این صرفاً به خاطر آن است که تابع  $f$  فقط تابع متغیرهای  $\vec{q}$  است. می‌دانیم که قید نسبت خاص در فضای پیکربندی به صورت  $\vec{q}^2 = 1$  است. در نتیجه با گسترش فضای فاز توسط متغیرهای پیمانه‌ای‌ساز نمی‌توان متریک اقلیدسی را به متریک مینکوفسکی تبدیل کرد. در ادامه رویه اولیه را به شکلی عمومی‌تر در فضای فاز می‌گیریم و دوباره نظریه پیمانه‌ای متناظر را می‌سازیم.

### ۳. ذره آزاد بر روی رویه در فضای فاز

علاوه بر تلاش به جواب دادن سوالی که در انتهای بخش قبل

تابعی از متغیر وس زومینوی همیوخ به  $f$  است به هامیلتونی قبل اضافه شود. یعنی در فضایی بزرگ‌تر اثر محدود بودن ذره در فضا به صورت یک تابع پتانسیل در بیاید

$$\tilde{H}_c = H_c + \sum_{n=1}^{\infty} h^{(n)}(q, p)_n^n. \quad (3)$$

متغیرهای وس زومینو بیشتر برای ابرمتقارن کردن یک مدل وارد و معرفی می‌شوند. در اینجا چون در پی افزایش تقارن با افزودن درجه آزادی به مدل هستیم باز هم همین لفظ را برای متغیرهای جدید خود به کار برده‌ایم. در دیگر جاهای این مقاله به این متغیرها، متغیر پیمانه‌ای ساز می‌گوییم.

از حل مجموعه معادلات (۲) و (۳) تنها دو تصحیح به هامیلتونی اضافه می‌شود که همان جملات معروف وس زومینو هستند. مدل پیمانه‌ای شده به ظاهر باز هم یک ذره آزاد در فضای فازی بزرگ‌تر است. این فرآیند در معادلات زیر خلاصه شده است

$$\tilde{H}_c = H_c + \frac{1}{\psi} \vec{p} \cdot \nabla f + \frac{1}{\psi} \nabla f \cdot \nabla f, \quad (4)$$

$$\tilde{H}_c = \frac{1}{\psi} \vec{p} \cdot \vec{p}, \quad \vec{p} = \vec{p} + \nabla f, \quad \tilde{T}_1 = f + f.$$

جفت‌شدگی کمینه که در مقدمه به آن اشاره شد و تکانه مولد تبدیل پیمانه‌ای به خوبی در سطر دوم معادلات بالا مشاهده می‌شود. پتانسیل برداری نیز از عمود رویه‌ای که ذره بر آن محدود است به دست می‌آید. اگر بعد فضای پیکربندی مدلی که با آن شروع کردیم  $d$  باشد با در نظر گرفتن دو قید نوع دومی که داشتیم تعداد درجه‌های آزادی ذره در فضای فاز کاهش یافته  $2d - 2$  می‌شود. اکنون که از روی این مدل یک مدل با تقارن پیمانه‌ای ساختیم، یک زوج کانونی به درجه‌های آزادی مدل اضافه شده اما این مدل ساخته شده یک قید نوع اول خواهد داشت، که دلالت بر این می‌کند که تمام حل‌های آن در این اتحاد صدق کنند و یک جواب یکتا وقتی پیدا می‌شود که یک اتحاد سازگار با این آزادی پیمانه‌ای به نام شرط تثبیت پیمانه در نظر بگیریم. پس درجه‌های آزادی این مدل یا بعد فضای فاز کاهش یافته آن نیز  $2d - 2 + 2 - 2$  است. البته این استدلال برای شکل کلاسیک نظریه آورده شد، در صورت کوانتمی از روی معادله شرودینگری که با  $\tilde{H}_c$  نوشته می‌شود

جمله‌های  $n$  به صورت مستقل به دست می‌آید، به جواب عمومی زیر برای توابع  $h^{(n)}$  می‌رسیم

$$h^{(n)} = \frac{1}{n!} \{f, \{f, \{ \dots \{f, H_c\} \dots \}\}\}. \quad (8)$$

به این ترتیب هامیلتونی پیمانه‌ای شده با قیده‌های ابتدایی نوع دوم در فضای فاز دارای یک بسط بی‌نهایت جمله‌ای بر حسب متغیر پیمانه‌ای ساز می‌شود. این بسط در حالت‌های خاص و بدیهی دارای تعداد متناهی جمله است

$$\tilde{H}_c = H_c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \{f, \{f, \{ \dots \{f, H_c\} \dots \}\}\}_n, \quad (9)$$

که با توجه به اتحاد بیکرها و سدورف و به شرط آن که تابع  $f$  حقیقی مقدار باشد، می‌توان یک عبارت بسته صورت برای آن به شکل زیر پیشنهاد داد

$$\tilde{H}_c = e^{*f} \otimes H_c \otimes e^{-*f}, \quad (10)$$

که در آن علامت  $\otimes$  بین هر دو تابع به معنای آن است که باید کروشه پواسون بین آن دو تابع محاسبه شود. اهمیت این شکل نوشتن در آن است که اگر بتوان تابع نمایشی را محاسبه کرد، آن وقت به دست آوردن هامیلتونی پیمانه‌ای شده تنها با محاسبه دو کروشه پواسون میسر می‌شود، هرچند که این امکان‌پذیری مستلزم به دست آمدن جمله عمومی (۸) است.

از آنجا که بسط بر حسب متغیر پیمانه‌ای ساز دارای همه توان‌های این متغیر است نمی‌توان در حالت عمومی این متغیر را از شرط پیمانه‌ای بودن مدل بر حسب متغیرهای فضای فاز اولیه حل کرد، مگر در حالت‌هایی که این بسط بر حسب تابع‌های شناخته شده که عکس آنها نیز شناخته شده‌اند قابل نوشتن باشد. با این حال این شکل به دست آمده برای هامیلتونی کمک می‌کند تا برای شرط‌های مختلف در فضای فاز پاشندگی‌های متفاوتی پیدا کنیم.

یک مثال برای ساختن هامیلتونی‌های جدید با این فرمول‌بندی انتخاب قید اولیه به شکل  $f = \vec{q} \cdot \vec{g}(\vec{p})$  است. جمله عمومی (۸) به صورت زیر به دست می‌آید

$$h^{(n)} = \nabla_p \cdot \nabla_g \nabla_g \cdot \nabla_g \cdot \vec{p} \vec{g} \cdot \quad (11)$$

$$\nabla_g \cdot \equiv \vec{g} \cdot \nabla_p,$$

که عملگرهای نرده‌ای  $\nabla_g$  در سطر اول به تعداد  $(n-1)$  بار

مطرح شد، می‌خواهیم طریقه عمومی اضافه شدن جملات پیمانه‌ای ساز به یک مدل نوع دوم را ارائه دهیم. قید اولیه در فضای فاز اتحادی در فضای پیکربندی به صورت  $g(\vec{q}, \vec{q})$  است که پس از نگاشت لژاندر به تابعی در فضای فاز  $f(\vec{q}, \vec{p})$  ترجمه می‌شود. قیده‌ها، سازگاری و نوع دوم شدنشان در مجموعه معادلات زیر خلاصه شده است

$$H_c = \frac{1}{\gamma} \vec{p} \cdot \vec{p}, \quad T_1 = f(\vec{q}), \quad T_\gamma = \vec{p} \cdot \nabla f, \quad (6)$$

$$\{T_1, T_\gamma\} = \nabla f \cdot \nabla f + \nabla f \cdot ((\vec{p} \cdot \nabla_p) \nabla_p f) - \nabla_p f \cdot ((\vec{p} \cdot \nabla) \nabla f).$$

با نگاه به شکل قید ثانویه می‌فهمیم که اگر قید اولیه دارای شکل تابعی مانند  $f \sim \exp(\frac{q_i}{p_i})$  باشد، دستگاه نوع اول می‌شود. همچنین با توجه به شکل کروشه پواسون دو قید ممکن است این عبارت متناسب با قیده‌های تا این مرحله بشود و به دستگامی با تعداد بیشتر از دو تا نوع دوم و یا دو قید نوع اول برسیم. یک مثال برای چنین حالتی با  $f \sim \vec{q} \cdot \vec{p}$  به وجود می‌آید. این دو رده از قیده‌ها را کنار می‌گذاریم. اگرچه در اینجا قید اولیه تابعی از تکانه‌ها نیز هست، دیده می‌شود که دستگاه ناسازگار و قید اولیه بدون معنی می‌شود، اگر که  $\nabla f = 0$  باشد. پس مجبوریم شرط  $\nabla f \neq 0$  را انتخاب کنیم که با این شرط دستگاه حتماً نوع دوم است.

از این معادلات واضح است که چون شرط قیدی نسبیتی  $\vec{q}^2 = 1$  در فضای پیکربندی به تابعی که تنها به تکانه‌ها وابسته است ترجمه می‌شود، این قید تنها یک قید اولیه نوع اول است و از این روش (انتقال استاکلبرگ) نمی‌توان به پاشندگی نسبیتی رسید. به خاطر وابستگی توابع قیدی به همه متغیرهای فضای فاز کروشه پواسون کمیت‌ها را در صورتی که شکل ساده‌تری نداشته باشند، صریحاً می‌نویسیم. همانند مورد قبل با گسترش فضای فاز و درخواست پیمانه‌ای شدن معادلات (۲) را داریم. حل پیشنهادی خود را نیز به صورت (۳) در نظر می‌گیریم و به معادله عمومی زیر برای چندجمله‌ای‌های متغیر پیمانه‌ای ساز، می‌رسیم

$$0 = T_\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \{T_1, h^{(n)}\}_n - \sum_{n=1}^{\infty} n h^{(n)}_n n^{-1}. \quad (7)$$

از حل این مجموعه از معادلات که از صفر قرار دادن ضرایب

سرراست نیست. مزیت دیگر این روش نسبت به دیگر روش‌های پیمانه‌ای کردن (مانند غوطه‌وری‌های BFT و فدیف جکیو) آن است که حداقل ممکن (تنها یک زوج متغیر) به متغیرهای فضای فاز برای پیمانه‌ای کردن اضافه می‌شود. نشان دادیم که اگر قید اولیه تنها تابعی از مختصات باشد، تنها دو جمله (یک بسط متناهی) برای پیمانه‌ای کردن مدل لازم است. در حالتی که قید اولیه تابعی از هر دو نوع متغیر فضای فاز باشد پیمانه‌ای کردن مدل به بهای افزودن تمامی توان‌های متغیر پیمانه‌ای‌ساز، به هامیلتونی تمام می‌شود، به گونه‌ای که نمی‌توان به راحتی عبارتی بسته صورت برای هامیلتونی پیمانه‌ای شده نوشت و یا متغیر پیمانه‌ای‌ساز را حذف کرد. اما این باعث می‌شود که پاشندگی‌های متنوعی، ناشی از انتخاب رویه‌ها در فضای فاز برای محدود کردن ذره، برای ذره پیدا کنیم. این یکی از پیشنهادهایی است که برای کارهای بعدی ارائه می‌دهیم. با تعمیم روشی که برای دستگاه تک رشته‌ای معرفی کردیم می‌توان دستگاه‌های نوع دوم چندرشته‌ای را هم نوع اول کرد به شرطی که رشته‌های آنها متقاطع نباشد. یعنی قیدهای یک رشته به دیگری مربوط نباشد و رشته‌ها از هم مستقل باشند.

اثر می‌کنند. با داشتن شکل صریح  $\bar{g}(\vec{p})$  این عملگر محاسبه شده،  $h^{(n)}$  به دست آمده و هامیلتونی دستگاه پیمانه‌ای ساخته می‌شود. البته هر قیدی را نمی‌توان به شکل بالا جداسازی کرد. به خصوص اگر تابع برداری  $\bar{g}(\vec{p})$  تنها یک مؤلفه داشته باشد قید اولیه به یک مختصه یا تابعی از تکانه‌ها کاهش می‌یابد و دستگاه از همان ابتدا لزوماً نوع دوم نیست.

#### ۴. نتیجه‌گیری و پیشنهاد

در این مقاله با روش انتقال استاکلبرگ از یک دستگاه با قیدهای نوع دوم در ساختار تک رشته‌ای، دستگاهی پیمانه‌ای ساختیم. تک‌رشته قیدی تنها شامل دو قید بود که با نوع اول‌سازی تنها قید اولیه نوع اول شده در آن باقی می‌ماند. با این وجود اگر بتوان قید اولیه در رشته را نوع اول کرد اصلاً قیدهای بعدی به وجود نمی‌آیند. بنابراین تعداد قیدهای داخل یک رشته اصلاً در انجام فرآیندی که انجام دادیم مهم نیست. برای دستگاهی با تنها یک قید نوع اول به راحتی می‌توان تابع مولد پیمانه‌ای را ساخت در حالی که ساختن تابع مولد تبدیل پیمانه‌ای حتی برای دستگاه‌هایی که دارای دو نوع اول آبلی نیز هستند، چندان

#### مراجع

1. J C Ward, *Phys. Rev.* **78** (1950) 182.
2. Y Takahashi, *Nuovo Cim.* **6** (1957) 370.
3. M Veltman, *Nucl. Phys. B* **21** (1970) 288.
4. G 't Hooft, *Nucl. Phys. B* **35** (1971) 167.
5. G 't Hooft, and M Veltman, *Nucl. Phys. B* **44** (1972) 189.
6. I A Batalin, E S Fradkin and T E Fradkina, *Nucl. Phys. B* **279** (1987) 514.
7. S Hong, *Mod. Phys. Lett. A* **20** (2005) 2455.
8. E C G Stueckelberg, *Helv. Phys. Acta* **30** (1957) 209.
9. H Ruegg, and M Ruiz-Altaba, *Int. J. Mod. Phys. A* **19** (2004) 3265.
10. J A Neto, *Phys. Lett. B* **571** (2003) 105.