مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران
مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۹، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۳۹۸

پایداری نظریهٔ اینشتین ـ اتر با تصحیحات مشتق مرتبهٔ بالاتر

مرضیه ندایی و زهرا حقانی

دانشکدهٔ فیزیک دانشگاه دامغان، دامغان

پست الکترونیکی: z.haghani@du.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۱۱/۰۱ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۸/۰۲/۰۹)

چکیده

ما در این مقاله از یک میدان برداری زمان گونهٔ واحد به نام اتر برای تعمیم نسبیت عام استفاده می‌کنیم. نظریهٔ شامل جفت‌شدگی کمینهٔ این میدان برداری با گرانش به نظریهٔ اینشتین- اتر معروف است. برای از بین بردن تکینگی در این مدل و همچنین توصیف بهتر تحول عالم و انرژی تاریک، با الهام از مدل باپ- پودولسکی، از مشتقات مراتب بالاتر اتر در تعمیم این نظریه استفاده خواهیم کرد. از دید کیهان‌شناسی، این نظریه می‌تواند به عنوان توصیفی از انرژی تاریک که مسئول شتاب کنونی کیهان است، ارائه دهد. سپس معادلات تحول نظریهٔ اینشتین- اتر تعمیم یافته را ابتدا در فضا- زمان دوسیته در حالت بدون اختلال بررسی کرده و پس از آن با مختل کردن این زمینه، درجات آزادی و رفتار مدهای اختلالی آن را مورد بررسی قرار خواهیم داد. در واقع هدف این مقاله این است که آیا جایگزین کردن یک میدان شکنندهٔ تقارن لورنتس به نام اتر به جای چهار بردار پتانسیل در یک مدل هموردای گرانشی از نوع نظریهٔ باپ- پودولسکی، می‌تواند تأثیری در پایداری آن داشته باشد یا خیر.

واژه‌های کلیدی: میدان برداری اتر، نظریهٔ باپ- پودولسکی، اختلالات کیهان شناسی

۱- ۱. مقدمه

در سال ۱۹۹۸ دو تیم تحقیقاتی با مطالعه بر روی ابرنواختر نوع Ia، کشف کردند که کیهان در حال حاضر وارد یک دوره انبساط شتابدار از نوع دوسیته شده است [۱ و ۲]. از طرفی نیروی حاکم بر دینامیک عالم، نیروی جاذبهٔ گرانشی است. بنابراین انبساط شتابدار عالم اشاره به حضور یک مؤلفه با نیروی دافعه گرانشی دارد که به صورت یک انرژی همگن کل کیهان را پر کرده و به خاطر طبیعت ناشناختهٔ آن، انرژی تاریک نامیده می‌شود. همچنین به دلیل عدم توجیه این انبساط شتابدار در نظریهٔ نسبیت عام اینشتین، باید به فکر تعمیم این نظریه باشیم. کیهان‌شناسان، نظریهٔ نسبیت عام اینشتین را یک نظریهٔ موفق در محدودهٔ منظومهٔ شمسی می‌دانند. اما در مقیاس‌های کیهانی، این نظریه نمی‌تواند تحولات دینامیکی کیهان را به خوبی توضیح بدهد، بنابراین در این مقیاس‌ها، گرانش باید رفتاری متفاوت با گرانش اینشتینی داشته باشد. یکی از راه‌های بسیار مهم تعمیم گرانش اینشتین، اضافه کردن میدان‌های برداری به نظریه است.

ما در این مقاله از یک میدان برداری دینامیکی و زمان گونه با اندازهٔ واحد به نام اتر، برای تعمیم نسبیت عام استفاده خواهیم کرد.

نظریهٔ شامل جفت‌شدگی این میدان برداری با گرانش را نظریهٔ اینشتین- اتر می‌نامیم [۳]. به دلیل حضور تکینگی در این مدل، با الهام از نظریهٔ باپ- پودولسکی [۴ و ۵]، از مشتقات مراتب بالاتر میدان برداری در تعمیم این نظریه استفاده خواهیم کرد. سپس به این مسئله خواهیم پرداخت که آیا شکستن تقارن لورنتس با استفاده از میدان برداری اتر می‌تواند تأثیری در پایداری نظریهٔ اینشتین- اتر تعمیم یافته داشته باشد یا خیر.

۲. تاریخچهٔ پیدایش نظریهٔ اینشتین- اتر

دانشمندانی چون نیوتون و ماکسول می‌پنداشتند که محیط گسیل نور، ماده‌ای نامرئی و همگن به نام اتر است. این ماده به عنوان یک چهارچوب مرجع ساکن جهانی در نظر گرفته شده بود که در آن همهٔ کمیت‌ها می‌بایست نسبت به آن بررسی می‌شدند. این مفهوم در سال ۱۸۸۷ با آزمایش‌های اپتیکی که از جملهٔ آنها آزمایش مایکلسون و مورلی بود، به راحتی کنار گذاشته شد.

پس از آن مفهوم اتر با تغییراتی گسترده به عنوان یک چارچوب مرجع ساکن در هر نقطه از فضا- زمان خمیده دوباره مطرح شد که آن را با یک میدان برداری نمایش دادند. جیکوبسون و متینگلی [۳] اولین کسانی بودند که برای این میدان برداری (اتر) خواصی چون زمان گونه بودن، دینامیک داشتن، موضعی و دارای اندازهٔ واحد بودن را مطرح کردند. تعمیم نظریهٔ گرانش اینشتین به وسیلهٔ این میدان برداری کمکی را نظریهٔ اینشتین- اتر می‌نامند. در این نظریه تقارن لورنتس شکسته می‌شود. انگیزه‌های حذف این تقارن مهم فضا- زمان را می‌توان فشرده نبودن گروه لورنتس و سخت بودن بررسی وجود آن در همهٔ نقاط فضا- زمان دانست. همچنین نظریه‌هایی که شامل میدان‌های ناقض تقارن لورنتس (مانند میدان اتر) هستند، می‌توانند برای تخت کردن منحنی‌های چرخشی کهکشان‌ها و شکل‌گیری ساختار، بدون فرضیهٔ مادهٔ تاریک مورد استفاده قرار گیرند [۶]. از طرفی نظریهٔ میدان‌های کوانتومی در حالت‌هایی با انرژی و تکانهٔ بالا، واگرایی‌هایی دارند که ما برای حل این مشکل تنها به محدودهٔ خاصی از انرژی اکتفا می‌کنیم و به دلیل مرتبط بودن انرژی با زمان، مقید شدن زمان نیز خود باعث شکستن تبدیلات خیز[۱] لورنتس می‌شود [۷].

یکی از ویژگی‌های بردار اتر، دینامیک داشتن آن است که به دلیل حفظ هموردایی عام نظریه در فضا- زمان خمیده به این صورت فرض شده است [۸]. از طرفی در یک مدل کیهان‌شناسی، یک تکینگی با امتداد نداشتن ژئودزیک‌های نورگونه یا زمان گونه مشخص می‌شود. بنابراین شرط لازم برای حذف این تکینگی آن است که بردار مرجع اتر، زمان گونه نیز باشد [۹]. ویژگی دیگر این بردار، موضعی بودن آن است به طوری که هر ترکیبی از این میدان، تقارن لورنتس را به طور موضعی در همهٔ نقاط فضا- زمان و حتی در خلأ نیز نقض کند [۱۰].

کنش اینشتین- اتر ماکسول گونه‌ای که توسط جیکوبسون و متینگلی پیشنهاد شد به صورت زیر است [۳]:

$$S=\int d^{۴}x\sqrt{-g}\left[\kappa^{۲}R-\tfrac{۱}{۴}F_{\mu\upsilon}F^{\mu\upsilon}+\Lambda\left(g_{\mu\upsilon}A^{\mu}A^{\upsilon}+۱\right)\right], \quad (۱)$$

که در این رابطه، A^{μ} بردار اتر و $F_{\mu\upsilon}$ تانسور شدت آن با تعریف $F_{\mu\upsilon}=\partial_{\mu}A_{\upsilon}-\partial_{\upsilon}A_{\mu}$ است. در این کنش Λ ضریب لاگرانژ است که شدت نیروی قید واحد بودن اندازهٔ بردار اتر را نمایش می‌دهد. این کنش تحت تبدیلات پیمانه‌ای $A_{\mu}\rightarrow A_{\mu}+\nabla_{\mu}f$ با شرط حضور تابع f در صفحات فضایی، ناوردا است [۳].

در این نظریه، کنش شامل سه میدان برداری A^{μ}، $g_{\mu\upsilon}$ و Λ است که می‌توان معادلات حرکت آنها را به صورت زیر به دست آورد:

$$G_{\mu\upsilon}=\frac{۱}{۲\kappa^{۲}}\left(F_{\mu\sigma}F_{\upsilon}{}^{\sigma}-\tfrac{۱}{۴}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}g_{\mu\upsilon}\right)-\frac{۱}{\kappa^{۲}}\Lambda A_{\mu}A_{\upsilon}, \quad (۲)$$

$$\nabla_{\mu}F^{\mu\upsilon}=-۲\Lambda A^{\upsilon}, \quad (۳)$$

$$A_{\mu}A^{\mu}=-۱. \quad (۴)$$

برای حالتی که مقدار Λ در این معادلات صفر باشد، معادلات متریک و اتر مشابه با معادلات میدان نظریهٔ اینشتین- ماکسول به همراه یک پیمانه بوده به گونه‌ای که هر پاسخی از این نظریه زیرمجموعه‌ای از پاسخ‌های نظریهٔ اینشتین- ماکسول خواهد بود [۳].

۱. Boost transformation

۳. تعمیم نظریهٔ اینشتین- اتر با الهام از نظریهٔ باپ- پودولسکی

ایدهٔ اولیهٔ تعمیم نظریهٔ اینشتین- اتر با مشاهدهٔ نواقص نظریهٔ ماکسول به وجود آمد. نظریهٔ ماکسول به توصیف چگونگی تولید میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی توسط بارها، جریان‌ها و تغییر میدان‌ها می‌پردازد. اما در این نظریه، میدان الکتروستاتیکی یک بار نقطه‌ای در محل بار نامتناهی خواهد بود، به این معنا که یک ذرهٔ باردار یک نیروی بی نهایت ناشی از میدان خود را احساس خواهد کرد. بنابراین این نظریه با وجود موفقیت‌های بسیار زیاد، یک نظریهٔ سازگار با رفتار ذرات باردار نقطه‌ای نمی‌باشد. همچنین از آنجایی که نظریهٔ اینشتین- اتر ماکسول گونه نیز زیرمجموعه‌ای از نظریهٔ ماکسول است، بنابراین در این نظریه نیز تکینگی به وجود خواهد آمد [۱۱]. برای مشاهدهٔ بهتر این مشکل، چگالی لاگرانژی نظریهٔ ماکسول را در نظر بگیرید:

$$L=-\frac{1}{4}F_{\mu\upsilon}F^{\mu\upsilon}+j^{\mu}A_{\mu}, \tag{۵}$$

در این رابطه، j^{μ} چگالی جریان است. با وردش گیری از کنش این لاگرانژی نسبت به A_{μ} داریم:

$$\partial_{\upsilon}F^{\mu\upsilon}=j^{\mu}. \tag{۶}$$

زمانی که ذرهٔ باردار ساکن باشد، چگالی جریان آن به صورت $j^{\mu}=q\delta_0^{\mu}\delta(r)$ به دست می‌آید، به طوری که q بار ذره، $\delta(r)$ تابع دلتای دیراک و δ_0^{μ} تابع دلتای کرونکر است. بنابراین از رابطهٔ (۶) می‌توان پتانسیل، شدت میدان و انرژی پتانسیل یک میدان الکترواستاتیکی را به صورت زیر به دست آورد:

$$A^0=-\frac{q}{r}, \tag{۷}$$

$$E=-\nabla A^0=-\frac{q}{r^2}, \tag{۸}$$

$$V=\frac{1}{2}qA^0=-\frac{q^2}{2r}. \tag{۹}$$

این معادلات هر سه در حد $r\to 0$ ، دارای تکینگی هستند، بنابراین فیزیکدانان در پی تعمیم این نظریه آمدند. باپ [۴] در سال ۱۹۴۰ و پودولسکی [۵] در سال ۱۹۴۲ این نظریه را به طور مستقل از هم تعمیم دادند. لاگرانژی نظریهٔ باپ- پودولسکی به صورت زیر است:

$$L_{BP}=-\frac{1}{4}\left[F_{\mu\upsilon}^{2}-\frac{1}{m^2}\left(\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}\right)^2\right]+j^{\mu}A_{\mu}. \tag{۱۰}$$

معادلهٔ حرکت میدان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left(\frac{\Box}{m^2}+1\right)\partial^{\upsilon}F_{\mu\upsilon}=j_{\mu} \tag{۱۱}$$

با استفاده از این معادله، می‌توان پتانسیل، شدت میدان و انرژی پتانسیل یک میدان الکترواستاتیکی را به صورت زیر به دست آورد:

$$A^0=-\frac{q}{r}\left(1-e^{-mr}\right), \tag{۱۲}$$

$$E=-\frac{q}{r^2}\left(1-e^{-mr}-rme^{-mr}\right), \tag{۱۳}$$

$$V=-\frac{q^2}{2r}\left(1-e^{-mr}\right), \tag{۱۴}$$

که این سه رابطه در حد $r\to 0$، به ترتیب به مقادیر متناهی $A^0=-mq$، $E=-\frac{1}{2}m^2q$ و $V=-\frac{1}{2}mq^2$ منجر می‌شوند. بنابراین در این حالت حتی در حد $r\to 0$ نیز پتانسیل، شدت میدان و انرژی میدان الکترواستاتیکی بدون تکینگی باقی خواهد ماند [۱۱ و ۱۲]. این نظریه همچنین در حد $m\to\infty$، به نظریهٔ ماکسول می‌رسد.

۴. معرفی مدل

ما در این قسمت نظریهٔ گرانشی بردار- تانسور اینشتین- اتر را با الهام از مشتقات مرتبهٔ بالاتر مدل باپ- پودولسکی تعمیم خواهیم داد. در این تعمیم به جای چهار بردار پتانسیل A^{μ}، میدان برداری اتر با اندازهٔ واحد را جایگزین می‌کنیم. بنابراین تعمیم یافتهٔ مدل گرانشی اینشتین- اتر پیشنهادی ما به صورت زیر خواهد بود:

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\left\{\kappa^2R-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{4m^2}\nabla_{\sigma}F_{\mu\nu}\nabla^{\sigma}F^{\mu\nu}+\Lambda\left(A^2+1\right)+V\left(A^2\right)\right\}, \tag{۱۵}$$

در این رابطه، A^{μ} میدان برداری اتر و $F_{\mu\nu}$ تانسور شدت آن است. همچنین Λ، ضریب لاگرانژ و $V(A^2)$ پتانسیل خود برهم‌کنشی از میدان اتر است. ما این کمیت را به صورت $V\left(A^2\right)=\alpha A^2-\beta A^4$ فرض خواهیم کرد که به طور واضح ناوردایی لورنتس را می‌شکند.

با وردش‌گیری از کنش (۱۵) نسبت به متریک، ضریب لاگرانژ و میدان اتر معادلات میدان به صورت زیر به دست خواهند آمد:

$$\begin{aligned}G_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2\kappa^2}\left(F_{\mu\sigma}F_{\upsilon}{}^{\sigma}-\frac{1}{4}F_{\sigma\beta}F^{\sigma\beta}g_{\mu\upsilon}\right)+\frac{1}{4\kappa^2 m^2}\\ &\Big[\nabla_{\mu}F^{\sigma\beta}\nabla_{\nu}F_{\sigma\beta}-\frac{1}{2}\nabla_{\rho}F_{\sigma\beta}\nabla^{\rho}F^{\sigma\beta}g_{\mu\nu}+2\nabla_{\sigma}F_{\beta(\upsilon}\nabla^{\sigma}F^{\beta}_{\mu}\\ &+2\nabla_{\sigma}\left(F^{\sigma\beta}\nabla_{(\mu}F_{\nu)\beta}+F_{\beta(\mu}\nabla_{\nu)}F^{\sigma\beta}+F_{\beta(\mu}\nabla^{\sigma}F^{\beta}_{\nu)}\right)\Big]\\ &+\frac{1}{\kappa^2}\left[A_{\mu}A_{\nu}V'(A^2)-\frac{1}{2}V\left(A^2\right)g_{\mu\nu}+\Lambda A_{\mu}A_{\upsilon})\right]\\ &=\frac{1}{2\kappa^2}T_{\mu\nu},\end{aligned} \tag{I}$$

$$\nabla_{\mu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{m^2}\nabla_{\mu}F^{\mu\nu}+2V'\left(A^2\right)A^{\nu}+2\Lambda A^{\nu}=0, \tag{II}$$

$$A^2=-1. \tag{III}$$

۵. پایداری نظریهٔ اینشتین‌- اتر تعمیم یافته

با توجه به مشاهدهٔ محدودهٔ درجهٔ ناهمسانگردی در تابش CMB و دیگر مشاهدات و نتایج نظری آنها، کیهان‌شناسان به این باور رسیدند که کل ساختار کیهان قابل مشاهده تا حد خوبی با متریک دوسیته توصیف می‌شود. بنابراین نظریه‌ای که از آن برای توصیف تحول کیهان استفاده می‌کنیم باید برای توضیح شتاب کنونی، دارای یک حل دوسیتهٔ پایدار باشد. به همین دلیل در ابتدا حل کیهان‌شناسی نظریهٔ اینشتین‌- اتر تعمیم یافته را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۶. حل نظریهٔ اینشتین‌- اتر تعمیم یافته در فضا‌- زمان FRW

در این قسمت تحول فضا‌- زمان FRW را با حضور بردار اتر بررسی می‌کنیم. المان طول و میدان برداری در این زمینه به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$ds^2=-dt^2+a\left(t\right)^2\delta_{ij}dx^i dx^j, \tag{۱۶}$$

$$A_{\mu}=\left(u_0\left(t\right),0,0,0\right), \tag{۱۷}$$

که در آن a(t) عامل مقیاس است. باید توجه کرد که متریک FRW همگن و همسانگرد است بنابراین وجود مؤلفه‌های فضایی میدان برداری این تقارن‌ها را ازبین می‌برد. با جایگذاری فرض‌های بالا برای متریک و میدان اتر در معادلات حرکت (I)، (II) و (III) خواهیم داشت:

$$1-u_0^2=0, \tag{۱۸}$$

$$-2\left(\alpha+\Lambda+2\beta u_0^2\right)=0, \tag{۱۹}$$

$$\frac{1}{2}\left(-6H^2\kappa^2-\Lambda-u_0^2\left(\alpha+\Lambda\right)-3\beta u_0^4\right)=0, \tag{۲۰}$$

$$\frac{1}{2}\left(-6H^2\kappa^2-4\kappa^2\dot{H}-\Lambda+u_0^2\left(\alpha+\Lambda\right)+\beta u_0^4\right)=0, \tag{۲۱}$$

در این روابط، H پارامتر هابل با تعریف $H=\frac{\dot{a}}{a}$ است. با حل همزمان معادلات (۱۸) تا (۲۱) داریم

$$H\left(t\right)=H_0\equiv\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{6\kappa^2}}, \tag{۲۲}$$

$$A_{\mu}=\left(1,0,0,0\right), \tag{۲۳}$$

$$\Lambda=\Lambda_0\equiv-\alpha-2\beta. \tag{۲۴}$$

از آنجایی که از حل معادلات نظریه، برای پارامتر هابل مقدار ثابتی از رابطهٔ (۲۲) به دست آمد، بنابراین این نظریه دارای حل دوسیته است. باید توجه داشت که برای حقیقی بودن پارامتر هابل باید عبارت $(\alpha+\beta)$ مثبت باشد. از این معادلات به دست آمده در زمینهٔ FRW برای ساده‌سازی کنش اختلالی استفاده خواهیم کرد.

۷. بررسی اختلال کیهان شناسی حول فضا‌- زمان FRW

برای بررسی پایداری حل دوسیته به دست آمده از بخش قبل از روش اختلالی استفاده می‌کنیم. در این روش اختلالاتی را حول

حل به دست آمده فرض می‌کنیم. سپس با حل معادلات حرکت برای مدهای اختلالی، پایداری سیستم مشخص می‌شود. همچنین در این روش تعداد درجات آزادی دینامیکی نظریه را نیز می‌توان به دست آورد. میدان‌های دینامیکی نظریه تا مرتبهٔ اول اختلال به صورت زیر بسط داده می‌شوند:

$$\begin{aligned} ds^2 =& -(1+2\phi)dt^2 + 2a(\partial_i B + L_i)dx^i dt \\ &+ a^2\left(1+2\psi\delta_{ij} + \partial_i\partial_j E + \partial_{(i}S_{j)} + h_{ij}\right)dx^i dx^j, \end{aligned} \tag{۲۵}$$

$$A_\mu = \left(1+\mathcal{V}, U_i + \partial_i \mathcal{M}\right), \tag{۲۶}$$

$$\Lambda = \Lambda_0 + \mathcal{X}. \tag{۲۷}$$

در معادلات بالا، مدهای اختلالی ϕ، ψ، B، E، $\mathcal{M}$، $\mathcal{V}$ و $\mathcal{X}$ نرده‌ای‌های فضایی و هر یک شامل یک درجهٔ آزادی می‌باشند. مدهای اختلالی L_i، S_i و U_i نیز هر کدام یک سه بردار عرضی می‌باشند، یعنی شروط $L_i^{,i}=0$، $S_i^{,i}=0$ و $U_i^{,i}=0$ را برآورده می‌کنند، بنابراین هر کدام دو درجهٔ آزادی را با خود حمل می‌کنند. از طرفی کمیت اختلالی h_{ij} نیز معرف یک سه تانسور فضایی متقارن است که چهار شرط $h_i^i = h_{ij}^{,i} = 0$ را برآورده می کند یعنی بدون رد و عرضی است، بنابراین دو درجهٔ آزادی سیستم را در دست دارد. پارامتر ثابت Λ_0 در رابطهٔ (۲۷)، ضریب لاگرانژ زمینه است.

کنش نظریهٔ (۱۵) را تا مرتبهٔ دوم اختلال حول میدان‌های زمینه بسط می‌دهیم. در این حالت با جایگذاری مؤلفه‌های میدان‌های اختلالی یعنی روابط (۲۵)، (۲۶) و (۲۷) در (۱۵)، کنش مرتبهٔ دوم اختلال به گونه‌ای به دست خواهد آمد که شامل جفت‌شدگی بین مدهای اختلالی نرده‌ای، برداری و تانسوری نمی‌باشد، بنابراین می‌توان کنش اختلالی مرتبه دو را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$S^2 = S^{(2)}_{scalar} + S^{(2)}_{vector} + S^{(2)}_{tensor}.$$

در بخش‌های بعد هر یک از جملات سمت راست را به صورت جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین باید خاطر نشان کرد که چون این نظریه به صورت هموردای عام نوشته شده است بنابراین دارای چهار درجه آزادی پیمانه‌ای ناشی از انتخاب آزادانهٔ دستگاه مختصات است. فرض کنید دو دستگاه مختصات x^μ و x'^μ داشته باشیم. رابطه بین این دو دستگاه مختصات به صورت زیر است:

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu,$$

که می‌توان ξ^μ را با استفاده از روش تجزیهٔ SVT به صورت زیر نوشت:

$$\xi^\mu = \left(\xi^0, \partial_i\xi + \xi^i\right),$$

که شامل دو درجه آزادی نرده‌ای ξ^0 و ξ و دو درجه آزادی برداری ξ^i است. ξ^i یک سه بردار عرضی است. بنابراین دو مد اختلالی نرده‌ای و یک مد اختلالی برداری از مدهای اختلالی معرفی شده در (۲۵) تا (۲۷) مربوط به درجهٔ آزادی پیمانه‌ای هستند. در ادامه برای حذف این درجات آزادی غیرفیزیکی از متغیرهای اختلالی که تحت تبدیلات بالا ناوردا هستند استفاده خواهیم کرد.

۸. اختلالات نرده‌ای

کمیت‌های ناوردا برای مدهای نرده‌ای به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\Phi = \phi + \partial_t\left(aB - \frac{1}{2}\dot{E}\right), \tag{۲۸}$$

$$\Xi = \psi + H_0\left(aB - \frac{1}{2}\dot{E}\right), \tag{۲۹}$$

$$\Pi = \mathcal{V} + u_0\partial_t\left(aB - \frac{1}{2}\dot{E}\right), \tag{۳۰}$$

$$\mathcal{K} = \mathcal{M} + u_0\left(aB - \frac{1}{2}\dot{E}\right), \tag{۳۱}$$

همچنین مد نرده‌ای $\mathcal{X}$، یک کمیت ناوردای پیمانه‌ای است. بنابراین بخش نرده‌ای کنش مرتبهٔ دوم اختلال با جملاتی شامل متغیرهای ناوردای پیمانه‌ای در فضای فوریه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
S^{(2)}_{\text{scalar}} = \int dt d^3k \Bigg[& \frac{1}{12a\kappa^2 m^2}\Big(-6k^2\dot{\mathcal{K}}\Big(2a^2\kappa^2\big(\ddot{\Pi}-\dddot{\mathcal{K}}\big) \\
& +\Pi\Big(4\kappa^2\big(k^2+a^2m^2\big)-3a^2(\alpha+\beta)\Big)\Big) \\
& +3k^2\dot{\mathcal{K}}^2\Big(4\kappa^2\big(k^2+a^2m^2\big)-3a^2(\alpha+\beta)\Big) \\
& -2a^2\kappa\Big(k^2\dot{\Pi}\big(6\kappa\dot{\Pi}+\sqrt{6}\Pi\sqrt{\alpha+\beta}\big)+6\kappa k^2\Pi\dddot{\mathcal{K}} \\
& -24\sqrt{6}a^2\kappa^2m^2\Phi\sqrt{\alpha+\beta}\,\dot{\Xi}+72a^2\kappa^3m^2\dot{\Xi}^2\Big) \\
& +3\Big(4\kappa^2k^4\Pi^2+k^2\Big(4\kappa^2m^2\big(4\kappa^2\Xi(\Xi+2\Phi)\big) \\
& +\Pi^2\Big)-3\Pi^2(\alpha+\beta)-8a^4\kappa^2m^2\Big(\Phi^2(\alpha+5\beta) \\
& -2\Phi(4\beta\Pi+\mathcal{X})+2\Pi(2\beta\Pi+\mathcal{X})\Big)\Big)\Big)\Bigg].
\end{aligned}
\tag{۳۲}
$$

ما حل زمینه را در کنش بالا جایگذاری کرده‌ایم. همان طور که از کنش اختلالات نرده‌ای مشاهده می‌شود، Φ و $\mathcal{X}$ متغیرهای غیردینامیکی هستند. با وردش‌گیری از این رابطه نسبت به متغیرهای Φ و $\mathcal{X}$ داریم:

$$
\Phi=\frac{2\kappa^2k^2\Xi+a^2(\sqrt{2}\kappa\sqrt{\alpha+\beta}\,\dot{\Xi}+4\beta\Pi+\mathcal{X})}{(\alpha+5\beta)a^2},
\tag{۳۳}
$$

$$
\mathcal{X}=-\frac{2\kappa^2k^2\Xi}{a^2}-\kappa\sqrt{6(\alpha+\beta)}\,\dot{\Xi}+(\alpha+\beta)\Pi\,.
\tag{۳۴}
$$

با استفاده از معادلات بالا متغیرهای Φ و $\mathcal{X}$ را بر حسب بقیه میدان‌ها به دست آورده و با جایگذاری آنها در کنش (۳۲) خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
S^{(2)}_{scalar} = \int dt d^3k \, & \frac{1}{3a\kappa^2m^2} \\
& \Big[-3a^2\kappa^2\Big(2k^2\Pi\dddot{\mathcal{K}}+k^2\ddot{\mathcal{K}}^2+k^2\dot{\Pi}^2 \\
& +4\kappa a^2m^2\dot{\Xi}\Big(3\kappa\dot{\Xi}-\Pi\sqrt{6(\alpha+\beta)}\Big)\Big) \\
& +k^2\dot{\mathcal{K}}\Big(a^2\kappa\sqrt{6(\alpha+\beta)}\dot{\Pi}+\Pi\Big(5a^2(\alpha+\beta) \\
& -6\kappa^2\big(k^2+a^2m^2\big)\Big)+k^2\dot{\mathcal{K}}^2\Big(3\kappa^2\big(k^2+a^2m^2\big) \\
& -2a^2(\alpha+\beta)\Big)+3\kappa^2k^4\Pi^2a^2k^2\Big(3\kappa^2m^2 \\
& \Big(4\kappa^2\Xi(\Xi+2\Pi)+\Pi^2\Big)-2\Pi^2(\alpha+\beta)\Big) \\
& -6a^4\kappa^2m^2\Pi^2(\alpha+\beta)\Big].
\end{aligned}
\tag{۳۵}
$$

اینک به بررسی رفتار میدان‌ها در حد مقیاس‌های زیر افق (وقتی طول موج اختلالات کوچک‌تر از شعاع هابل باشد)، می‌پردازیم. کنش مرتبهٔ دو از اختلالات در تقریب زیر افق یعنی $k\to\infty$ به صورت زیر می‌شود:

$$
S^{(2)}_{\text{scalar}}=\int dt d^3k\frac{k^2a}{m^2}\left\{-\ddot{\mathcal{K}}^2+\frac{k^2}{a^2}\Big[\dot{\mathcal{K}}^2+\Pi^2\Big]\right\}.
\tag{۳۶}
$$

همان گونه که از کنش بالا دیده می‌شود، در مقیاس‌های زیر افق اختلالات نرده‌ای Ξ هیچ نقشی ندارد. همچنین در این رابطه، متغیر Π غیردینامیکی است، که با وردش‌گیری نسبت به آن داریم:

$$
\Pi=0.
\tag{۳۷}
$$

با قرار دادن این رابطه در کنش (۳۶)، کنش مدهای نرده‌ای اختلالات به صورت:

$$
S^{(2)}_{\text{scalar}}=\int dt d^3k\frac{k^2a}{m^2}\left\{-\ddot{\mathcal{K}}^2+\frac{k^2}{a^2}\dot{\mathcal{K}}^2\right\}.
$$

به دست می‌آید. بنابراین در مقیاس‌های زیر افق برای به دست آوردن مد نرده‌ای $\mathcal{K}$ از کنش بالا به چهار شرط اولیه نیاز داریم و این بدین معنی است که این مد نرده‌ای به علت این که در کنش دارای مشتق زمانی مرتبه چهار است شامل یک درجه آزادی سالم و یک درجه آزادی شبح استروگردسکی است.

۹. اختلالات برداری

در این بخش تنها مدهای برداری از کنش مرتبهٔ دوم اختلال را در نظر می‌گیریم. کمیت برداری ناوردای پیمانه‌ای به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathcal{G}_i = L_i - \frac{1}{2} a \dot{S}_i . \tag{۳۸}$$

همچنین میدان اختلال برداری U_i، خودش یک کمیت ناوردای پیمانه‌ای است. با جایگذاری متغیرهای ناوردای پیمانه‌ای در کنش مرتبهٔ دوم اختلال برداری، به رابطهٔ زیر در فضای فوریه می‌رسیم:

$$\begin{aligned} S^{(2)}_{vector} = \int dt d^3k \frac{1}{6 a^3 \kappa^2 m^2} \Big[& k^2 \Big(a^2 U^2 (\alpha+\beta) \\ & + 6\kappa^2 U^2 \left(k^2 - a^2 m^2\right) + 6 a^4 \mathcal{G}^2 \kappa^2 m^2 \Big) \\ & + 2\dot{U}^i \dot{U}_i \Big(a^4 \left(2(\alpha+\beta) + 3\kappa^2 m^2 \right) \\ & - 6 a^2 \kappa^2 k^2 \Big) + 6 a^4 \kappa^2 \ddot{U}_i \ddot{U}^i \Big]. \end{aligned} \tag{۳۹}$$

که در این رابطه $U^2 = U_i U^i$ و $\mathcal{G}^2 = \mathcal{G}_i \mathcal{G}^i$ در کنش بالا متغیر $\mathcal{G}_i$ یک میدان برداری غیردینامیکی است. با وردش‌گیری از کنش بالا نسبت به این میدان، معادلهٔ حرکت آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathcal{G}_i = 0 . \tag{۴۰}$$

بنابراین بخش برداری کنش به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} S^{(2)}_{vector} = \int dt d^3k \frac{1}{6 a^3 \kappa^2 m^2} & \Big[6 a^4 \kappa^2 \ddot{U}_i \ddot{U}^i + 2\dot{U}^i \dot{U}_i \Big(a^4 \\ & \left(2(\alpha+\beta) + 3\kappa^2 m^2 \right) - 6 a^2 \kappa^2 k^2 \Big) \\ & + k^2 U^2 \Big(a^2 (\alpha+\beta) + 6\kappa^2 \left(k^2 - a^2 m^2\right) \Big) \Big]. \end{aligned} \tag{۴۱}$$

اختلالات برداری را نیز می‌توان در تقریب زیر افق بررسی کرد. در این تقریب کنش (۴۱) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$S^{(2)}_{vector} = \int dt d^3k \frac{1}{a m^2} \left[a^2 \ddot{U}_i \ddot{U}^i - 2 k^2 \dot{U}^i \dot{U}_i + \frac{k^4}{a^2} U^2 \right]. \tag{۴۲}$$

بنابراین مد برداری U_i در مقیاس‌های زیر افق توسط کنش بالا که دارای مشتق زمانی مرتبهٔ چهارم است توصیف می‌شود و دارای ناپایداری استروگردسکی است.

۱۰. اختلالات تانسوری

بخش تانسوری کنش مرتبهٔ دوم اختلال، تنها شامل یک متغیر h_{ij} است که خودش یک کمیت ناوردای پیمانه‌ای است. بنابراین اختلالات تانسوری کنش نظریه در فضای فوریه به صورت زیر خواهد بود:

$$S^{(2)}_{tensor} = \int dt d^3k \frac{1}{2} a \kappa^2 \left[a^2 \dot{h}_{ij} \dot{h}^{ij} - k^2 h_{ij} h^{ij} \right]. \tag{۴۳}$$

از آنجایی که در این زمینه میدان برداری اتر فاقد مد تانسوری است، بنابراین مد تانسوری اختلال h_{ij} تنها مربوط به بخش اینشتین- هیلبرت نظریه بوده و به علت عرضی و بدون رد بودن، دارای دو درجهٔ آزادی است. بنابراین مد تانسوری نظریهٔ تعمیم یافتهٔ اینشتین- اتر نشان دهندهٔ یک موج گرانشی عرضی است که سرعت انتشار آن همان سرعت نور است. نتایج بخش اختلالات تانسوری این نظریه با مشاهدات موج گرانشی GW170817 سازگاری دارد.

۱۱. نتیجه‌گیری

ما در این مقاله به دنبال استفاده از یک مدل گرانشی بردار- تانسور بودیم به گونه‌ای که در همهٔ دستگاه‌های مختصات هموردا باقی بماند و از طرفی در آن تقارن لورنتس به دلیل نداشتن گروه فشرده و همچنین برای حذف تکینگی اولیهٔ عالم، به طور خود به خود شکسته شود. برای این منظور از یک چارچوب مرجع به نام اتر که معرف یک میدان برداری زمان گونه با اندازهٔ واحد بود، استفاده کردیم. این میدان برداری باعث شکستن تقارن لورنتس فضا- زمان می‌شد. برای دیدن اثرات میدان برداری اتر در یک نظریهٔ گرانشی، کنش شامل جفت‌شدگی کمینهٔ متریک با این میدان برداری را در نظر گرفتیم که به عنوان نظریهٔ اینشتین- اتر نامگذاری شده بود. از طرفی می‌دانستیم مدل ماکسول که برای نشان دادن رفتار ذرات در حضور میدان‌های الکترومغناطیسی و نحوهٔ تبدیل شدن میدان‌ها به هم، به کار می‌رود، با شواهد و تجربیات به دست آمده سازگاری خوبی دارد. بنابراین خواستار آن بودیم که مدل

گرانشی پیشنهادی ما مزایای مدل ماکسول را نیز داشته باشد و بتواند با در نظر گرفتن یک حد مناسب برای پارامترهای ثابت نظریه، به مدل ماکسول برسد. اما در کنار آن چارچوب کاری نظریهٔ ما غنی‌تر از مدل ماکسول باشد به گونه‌ای که بتواند تحول عالم را نیز به خوبی نشان بدهد و از طرفی تکینگی‌های مدل ماکسول را نیز نداشته باشد. با این ویژگی‌ها، انگیزهٔ استفاده از نظریهٔ باپ- پودولسکی که در آن کنش ماکسول با جملاتی شامل مشتقات مرتبهٔ دوم تانسور ماکسول تعمیم داده می‌شد، در ما به وجود آمد. نظریهٔ باپ- پودولسکی یک نظریهٔ الکترومغناطیسی بود که در فضای تخت نوشته شده و باعث حذف تکینگی از مدل ماکسول می‌شد. اما به دلیل ناپایدار بودن نظریهٔ باپ- پودولسکی در فضای خمیده، قادر به استفاده از آن به عنوان یک مدل گرانشی نبودیم. انگیزهٔ اصلی ما در نگارش این مقاله این بود که آیا شکستن تقارن لورنتس با استفاده از میدان برداری اتر می‌تواند به از بین بردن این ناپایداری کمک کند یا خیر. بنابراین با تغییر نظریهٔ باپ- پودولسکی به یک نظریهٔ هموردا در فضای خمیده و به کارگیری بردار اتر به عنوان جایگزینی برای انرژی تاریک به جای چهار بردار پتانسیل ماکسول، نظریهٔ به دست آمده را نظریهٔ اینشتین- اتر تعمیم یافته نامگذاری کرده و از آن برای بررسی نحوهٔ تحول و پایداری عالم استفاده کردیم.

در ابتدا با حل معادلات حرکت این نظریه در فضا- زمانی FRW غیراختلالی مشاهده کردیم که این نظریه یک حل دوسیته دارد. پس از آن برای بررسی پایداری حل به دست آمده، از روش اختلال کیهان‌شناسی استفاده کرده و با مختل کردن میدان‌های نظریه، درجات آزادی و همچنین رفتار مدهای اختلالی را در مقیاس زیر افق هابل مورد بررسی قرار دادیم. در این زمینه، مدهای مختلف تانسوری، برداری و نرده‌ای از یکدیگر تفکیک شدند. در بخش اختلالات نرده‌ای مشاهده کردیم که در مقیاس درون افق، تنها مد نرده‌ای باقیمانده $\mathcal{K}$ بود. کنش مرتبهٔ دو برای این میدان اختلالی شامل مشتق مرتبهٔ چهارم زمانی است که باعث به وجود آمدن ناپایداری استروگردسکی می‌شود. همچنین در بخش اختلالات برداری کنش نیز رفتار تنها مد باقیمانده یعنی U_i را در تقریب زیر افق به دست آوردیم. این مد نیز دارای ناپایداری استروگردسکی است. همچنین مد تانسوری h_{ij} به دست آمده در بخش اختلالات تانسوری کنش ناشی از اختلالات متریک است. مد تانسوری به دست آمده در این مدل دقیقاً همان مد تانسوری کنش اینشتین- هیلبرت است. یعنی جملات مربوط به چهار بردار پتانسیل در کنش داده شده هیچ گونه مد تانسوری تولید نکرده است. بنابراین امواج گرانشی پیش‌بینی شده در این نظریه با امواج گرانشی نسبیت عام و مشاهدات GW170817 یکسان است.

مراجع

1. A G Riess *et al*., *Astron. J.* **116** (1998) 1009.
2. S Perlmutter *et al*., *Astrophys. J.* **517** (1999) 565.
3. T Jacobson and D Mattingly, *Phys. Rev*. D **64** (2001) 024028.
4. F Bopp, *Annals. Phys*. (Leipzig) **38** (1940) 345.
5. B Podolsky, *Phys. Rev*. **62** (1942) 68.
6. م وفاجوی دیانتی، پایان نامهٔ کارشناسی ارشد، *گرایش ذرات بنیادی و نظریهٔ میدان‌ها*، دانشگاه تهران (۱۳۹۰).
7. V A Kostelecky, Bloomington, (2001); S Sarkar, *Mod. Phys. Lett*. A **17** (2002) 1025, N E Mavromatos, arXiv:hep-ph/0309221; G Amelino-Camelia, arXiv:grqc/0309054; T A Jacobson, S Liberati, D Mattingly and F W Stecker, arXiv:astroph/0309681.
8. N F Sierra, "*Cosmological Perturbations in Einstein-Aether Theories* ", Ph. D. Thesis, Univercity of Barselona (2011).
9. M Gasperini, *Gen. Rel. Grav*. **30** (1998) 1703.
10. A B Balakin and J P S Lemos, *Annals. Phys*. **350** (2014) 454.
11. A E Zayats, *Annals. Phys*. **342** (2014) 11.
12. J Gratus, V Perlick and R W Tucker, *J. Phys.* A: *Math. Theor*. **48** (2015) 435401.
13. Virgo, LIGO Scientific Collaboration, B P Abbott *et. al*., *Phys. Rev. Lett*. **119** (2017) 16 161101, 1710.05832.