

## سیاه شامه اینشتین - یانگ - میلز در فضای پاددوسیه و رسانندگی غیر آبل جریان مستقیم رنگ

شاهرخ پرویزی<sup>۱</sup> و مهدی صادقی<sup>۲</sup>

۱. گروه فیزیک ذرات و میدانها، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۲. گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آیت ا... بروجردی، بروجرد

پست الکترونیکی: parvizi@modares.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۶/۲۵؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۰۲/۰۲)

### چکیده

سیاه شامه اینشتین - یانگ - میلز در فضای پاددوسیه با میدان پیمانه ای  $SU(2)$  معرفی شده و با استفاده از تناظر نظریه میدان - گرانش، رسانندگی غیر آبل جریان مستقیم رنگ محاسبه شده است.

واژه‌های کلیدی: رسانندگی رنگ، هولوگرافی، نظریه پاسخ خطی، سیاه شامه

### ۱. مقدمه

معرفی شد و بیان می‌کند که نظریه ابر یانگ - میلز  $N=4$   $SU(N)$ ، با نظریه ریسمان نوع IIB در فضای  $AdS_5 \times S^5$  متناظر است. در اینجا  $AdS_5$  فضای پاددوسیه پنج بعدی و  $S^5$  کره پنج بعدی است که شعاع‌های مساوی دارند. این تناظر در واقع از مطالعه دوگانی بین ریسمان‌های بسته و باز و با حدگیری‌های خاصی به دست می‌آید. اولین حد این است که شعاع انحنا فضای پاددوسیه نسبت به طول ریسمان  $\ell_s = \sqrt{\alpha'}$  بزرگ باشد. در این حد می‌توان از اثرات مدهای جرم‌دار ریسمانی چشم‌پوشی کرد و تنها مد صفر را در نظر گرفت که مد گرانشی است. در سمت نظریه میدان که در یک

تناظر نظریه میدان - گرانش، دو نظریه را که پارچوب‌های ریاضی و فیزیکی مختلفی دارند، به هم مربوط می‌کند که در آن گرانش در  $n+1$  بعد و نظریه میدان کوانتومی در  $n$  بعد قرار دارد [۱، ۲، ۳ و ۴]. ارتباط این دو نظریه به ظاهر متفاوت، دوگانی نامیده می‌شود که در آن تابع مولد نظریه میدان کوانتومی برابر با کنش نظریه گرانشی در حد خاصی است و در نتیجه مشاهده‌پذیرهای نظریه میدان بر حسب نظریه گرانشی قابل توصیف یا محاسبه است. اولین بار این تناظر، در سال ۱۹۹۷ میلادی توسط مالداسنا

کوآرک آزاد وجود ندارد اما در دماهای بالا که در آزمایشگاه‌های ذرات قابل دسترسی است، تغییر فاز اتفاق می‌افتد و ماده به صورت پلاسمای گلئون- کوآرک ظاهر می‌شود. این فازی است که در تناظر گرانش- پیمانانه مورد مطالعه ماست.

در حد طول موج بلند، نظریه میدان رفتاری مانند یک شاره دارد، بنابراین تناظر مورد نظر در این حد، تناظر شاره- گرانش است. هر سیال با ضرایب تراورد شناخته می‌شود [۵ و ۶]. این ضرایب، ویژگی‌های میکروسکوپی شاره زیربنایی نظریه میدان را در برهم‌کنش‌های قوی، شناسایی می‌کند. بنابراین دوگانگی شاره- گرانش ابزار مناسبی برای محاسبه این ضرایب است. پایستگی انرژی- تکانه و جریان در هیدرودینامیک نسبیتی به صورت زیر است:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \quad (1)$$

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^{\mu}u^{\nu} + p g^{\mu\nu}, \quad (2)$$

که در آن،  $\rho$  چگالی،  $p$  فشار و  $u$  سرعت است. در اینجا شاره نسبیتی به معنای این نیست که شاره با سرعت نور حرکت کند بلکه به معنای این است که تقارن لورنتس در شاره نسبیتی حفظ می‌شود. اگر پتانسیل شیمیایی در سیستم وجود داشته باشد به این معناست که بقای جریان برقرار است.

$$\nabla_{\mu} J^{\mu} = 0, \quad (3)$$

$$J^{\mu} = \rho u^{\mu}, \quad (4)$$

یک پارامتر بسط  $\varepsilon = \ell_{mfp} / L$  معرفی می‌کنیم که  $\ell_{mfp}$  و  $L$  مسافت آزاد میانگین و طول مشخصه سیستم یا مقیاس افت‌وخیزهای میدان است. برای برقراری نظریه هیدرودینامیک باید مقیاس تغییرات میدان نسبت به مسافت آزاد میانگین خیلی بزرگ باشد. هنگامی که شاره در مرز فضای پاددوسیه وجود داشته باشد با یک نظریه حاوی سیاه‌چاله بزرگ در فضای پاددوسیه متناظر می‌شود. اگر  $\varepsilon$  کوچک‌تر از یک باشد در این صورت تانسور انرژی- تکانه را بر حسب  $\varepsilon$  بسط می‌دهیم. این بسط در واقع معادل با کوچک گرفتن مشتقات میدان‌هاست. بنابراین بسط را تا مشتق مرتبه اول در نظر می‌گیریم و از مشتقات بالاتر میدان‌ها صرف‌نظر می‌کنیم [۷].

بعد کمتر در مرز فضای پاددوسیه تعریف می‌شود، این حد به معنای قوی بودن ثابت جفت‌شدگی توفت<sup>۱</sup> است که به صورت  $\lambda = g_s N = g_{YM} N$  تعریف می‌شود و در آن  $g_s$  و  $g_{YM}$  به ترتیب جفت‌شدگی‌های ریسمان و نظریه یانگ میلز هستند که هر دو باید کوچک باشند. بنابراین، در این تناظر از یک سو نظریه گرانشی در حد کلاسیک ( $g_s \rightarrow 0$ ) و از سوی دیگر نظریه یانگ میلز در حد  $N \gg 1$  و ثابت توفت قوی  $\lambda \gg 1$  با یکدیگر دوگان هستند.

در حال حاضر، مثال بالا به صورت عام‌تر دوگانگی گرانش- پیمانانه تعمیم یافته است که در آن گرانش به طور عمده در فضای پاددوسیه یا فضاهایی که مجانبی پاددوسیه هستند و نظریه پیمانانه‌ای در مرز آن تعریف می‌شود. در این حالت، همچنان نظریه میدان در جفت‌شدگی قوی متناظر نظریه گرانش کلاسیک است. با توجه به این که حل تحلیلی و اختلالی برای نظریه‌های پیمانانه‌ای جفت شده قوی پاسخگو نیست، یکی از بهترین راه‌های ممکن برای حل این نظریه‌ها، استفاده از تناظر گرانش- پیمانانه است. با استفاده از این تناظر می‌توان اطلاعات نظریه جفت شده قوی را از نظریه گرانش کلاسیک در یک بعد بالاتر به دست آورد. در این مقاله رفتار میدان یانگ- میلز بررسی می‌شود که تعمیم میدان ماکسول است. هر دو نظریه پیمانانه‌ای هستند با این تفاوت که نظریه ماکسول گروه تقارنی آبلی  $U(1)$  و نظریه یانگ- میلز گروه تقارنی غیر آبلی دارد. تفاوت در گروه پیمانانه‌ای آبلی و غیر آبلی منجر به تفاوت‌های مهمی در پیامدهای فیزیکی دو نظریه می‌شود. مهم‌ترین تفاوت در رفتار ثابت جفت‌شدگی دو نظریه است. در الکترومغناطیس در انرژی‌های پایین، ثابت جفت‌شدگی افزایش می‌یابد در حالی که در نظریه یانگ- میلز برعکس است و با افزایش انرژی، ثابت جفت‌شدگی کاهش می‌یابد. بدین ترتیب، نیروی الکترومغناطیسی نیرویی بلند برد است و در خارج از هسته هم اثر می‌گذارد اما میدان یانگ- میلز فقط در داخل هسته عمل می‌کند. تفاوت دیگر در محبوس‌شدگی است که به این معناست که در دماهای پایین، نظریه یانگ- میلز در فاز محبوس است و

۱. 'tHooft

به جای بار الکتریکی، رنگ نامیده می‌شود. در اینجا نیز این بار رنگ و رسانندگی آن، رسانندگی رنگ نامیده می‌شود، البته گروه تقارنی در اینجا  $SU(2)$  است.

واضح است که در حالتی که تقارن دورانی وجود داشته باشد، رسانندگی از نظر فضایی نرده‌ای می‌شود و می‌توان شاخص‌های  $i$  و  $z$  را حذف کرد. همچنین مشابه نظریه آبلی می‌توانیم میدان‌ها را متناوب با بستگی زمانی  $e^{i\omega t}$  با بسامد  $\omega$  و یا مستقیم متناظر با حد  $\omega \rightarrow 0$  در نظر بگیریم. در این مقاله هدف محاسبه رسانندگی مستقیم رنگ است.

برای محاسبه رسانندگی از طریق تناظر شماره-گرانش، باید در نظریه گرانشی، میدان‌های برداری متناظر را وارد کرد. اضافه کردن میدان ماکسول به گرانش، از لحاظ تاریخی با متریک رایزنر-نوردستورم شروع شد که سیاه‌چاله‌ای است در حضور میدان‌های گرانشی و ماکسول و بار الکترو مغناطیسی و جرم دارد. پس از آن با توسعه به ابعاد بالاتر، به‌عنوان سیاه‌چاله‌های اینشتین-ماکسول شناخته شده است. همچنین تعمیم به میدان‌های غیر آبلی نیز به‌عنوان سیاه‌چاله اینشتین-یانگ-میلز در ابعاد مختلف انجام شده است. این سیاه‌چاله‌ها می‌توانند دارای بارهای الکتریکی و یا مغناطیسی باشند.

در مطالعه سیاه‌چاله‌ها با میدان‌های ماکسول (آبلی) حد زیر برای رسانندگی به دست می‌آید [۱۰]:

$$\sigma \geq \frac{1}{e^2} = 1, \quad (9)$$

اینجا در واحدهایی کار می‌شود که  $e = 1$  است. نامساوی فوق برای سیاه‌چاله‌های بدون بار اشباع می‌شود:  $\sigma = 1$ . البته لازم به ذکر است که در برخی مدل‌های خاص با میدان‌های زمینه اضافی یا در گرانش جرم‌دار، این حد نقض می‌شود [۱۱، ۱۲ و ۱۳]. حال در این کار، ما قصد داریم رسانندگی رنگ را با روش هولوگرافی از یک نظریه گرانشی اینشتین-یانگ-میلز به دست بیاوریم و تحقیق کنیم که آیا نامساوی فوق برای حالت غیر آبلی هم برقرار است یا خیر. نظریه میدان را در سه بعد (دو بعد فضایی و یک زمانی) با گروه غیر آبلی  $SU(2)$  در نظر می‌گیریم. بنابراین نظریه گرانشی در فضا زمان چهار بعدی

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} - p^{\mu\alpha} p^{\nu\beta} \left[ \eta (\nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha) + \left( \zeta - \frac{2}{3} \eta \right) g_{\alpha\beta} \nabla_\mu u \right], \quad (5)$$

که در آن  $\rho$  چگالی،  $p$  فشار،  $u$  چاربردار سرعت،  $g$  متریک و شاخص‌ها مختصات فضا زمانی را نشان می‌دهند. همچنین

$$p^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu, \quad (6)$$

عملگر تصویر در جهت سرعت است. به همین ترتیب جریان پایستار را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$J^\mu = \rho u^\mu - \sigma T \partial_\nu \left( \frac{\mu}{T} \right), \quad (7)$$

در روابط (۵) و (۷) کمیات  $\eta$ ،  $\zeta$  و  $\sigma$  به ترتیب چسبندگی برشی، حجمی و رسانندگی بار هستند و این ضرایب باید از نظریه میکروسکوپی تعیین شوند [۷ و ۸].

رسانندگی در نظریه ماکسول از قانون اهم به دست می‌آید که ضریب نسبت جریان به میدان الکتریکی است. در نظریه غیر آبلی، رسانندگی را می‌توان از طریق قانون اهم غیر آبلی به صورت زیر به تانسور رسانندگی رنگ تعمیم داد [۹]:

$$\sigma_{ab}^{ij}(x, y) = \frac{\delta J_a^i(x)}{\delta E_j^b(y)}, \quad (8)$$

که در آن  $E$  میدان الکتریکی غیر آبلی است که بر حسب تانسور شدت میدان که در (۱۱) تعریف شده است، به صورت  $E_j^b = F_{,j}^b$  به دست می‌آید که در آن  $j$  جهت فضایی میدان و  $b$  شاخص داخلی گروه پیمانه‌ای است که در مقاله حاضر گروه  $SU(2)$  در نظر گرفته می‌شود. همچنین  $J_a^i$  جریان پایستار غیر آبلی در جهت فضایی  $i$  و شاخص داخلی  $a$  است. حضور مختصات  $x$  و  $y$  در رابطه فوق نشان می‌دهد که رابطه بین  $J$  و  $E$  اگرچه خطی است اما ممکن است موضعی نباشد؛ یعنی ممکن است  $J$  به صورت انتگرالی از  $E$  باشد. به لحاظ فیزیکی این به این مفهوم است که تغییرات میدان الکتریکی در نقطه  $x$  ممکن است جریان را در نقطه‌ای دیگر مانند  $y$  تغییر دهد. بدین معنا رسانندگی در رابطه بالا غیر موضعی است.

رسانندگی  $\sigma_{ab}$  از این نظر رسانندگی رنگ نامیده می‌شود که متعلق به یک نظریه غیر آبلی است. آن‌طور که در نظریه کرومودینامیک با گروه پیمانه‌ای  $SU(3)$  متداول است بار ذرات

تعریف می‌شود.

و الکتریکی غیر آبلی است. در عبارت (۱۷)،  $q$  نشان دهنده بار الکتریکی و ۱ نماینده بار مغناطیسی است. بنابراین این سیاه‌چاله دایونیک به حساب می‌آید.

برای این سیاه‌چاله، دمای هاوکینگ برابر است با:

$$T = \frac{f'(r_h)}{4\pi}, \quad (18)$$

که  $f(r_h) = 0$  شعاع افق است،

برای به دست آوردن ضرایب ترابرد از جمله رسانندگی رنگ، لازم است که از یک سیاه شامه استفاده کنیم. بنابراین در (۱۴) زاویه  $\theta$  را کوچک در نظر می‌گیریم، در نتیجه مختصات  $(\theta, \phi)$  به مانند مختصات قطبی در یک صفحه تخت می‌شوند و به حل زیر می‌رسیم:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(dx^2 + dy^2), \quad (19)$$

$$A = \frac{i}{2} \left( \left( a - \frac{q}{r} \right) dt \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

که برای به دست آوردن آن فرض کردیم  $\cos\theta \cong 1$  و بنابراین میدان مغناطیسی را تقریباً صفر فرض کردیم. حل (۱۹) یک سیاه شامه دو بعدی در جهت‌های  $x$  و  $y$  همراه با میدان‌های یانگ-میلز است. توجه کنید که میدان (۲۰) در معادله یانگ-میلز با متریک زمینه (۱۹) صدق می‌کند.

### ۳. رسانندگی جریان مستقیم رنگ

برای محاسبه رسانندگی الکتریکی جریان مستقیم رنگ از نظریه پاسخ خطی استفاده می‌کنیم که باید نظریه میدان پیمانمانی را به صورت زیر مختل کنیم [۱۵-۲۱]:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \tilde{A}_\mu, \quad (21)$$

کنش را تا مرتبه دوم بر حسب  $\tilde{A}_\mu$  بسط می‌دهیم و جریان‌های  $J_a^\mu$  را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$S \rightarrow S + \int d^4x A_\mu^a J_a^\mu, \quad (22)$$

تابع گرین تأخیری از تناظر گرانش-پیمانمانه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$G^{\mu\nu}(\omega) = \langle J^\mu(\omega) J^\nu(-\omega) \rangle = \frac{\delta^2 S}{\delta \tilde{A}_\mu \delta \tilde{A}_\nu}, \quad (23)$$

### ۲. سیاه شامه اینشتین-یانگ-میلز

کنش اینشتین-یانگ-میلز را در فضای پاددوسیه در چهار بعد، در نظر بگیرید:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{2} \text{Tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right], \quad (10)$$

که در آن  $g$  دترمینان متریک،  $G$  ثابت نیوتن،  $R$  نرده‌ای ریچی،  $\Lambda$  ثابت کیهان‌شناسی و  $F_{\mu\nu}$  تانسور شدت میدان یانگ-میلز است  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$ ، که در آن  $A_\mu$  چاربردار پتانسیل است که در نمایش الحاقی گروه  $SU(2)$  قرار دارد.

با وردش از کنش نسبت به  $g_{\mu\nu}$  و  $A_\nu$  معادلات حرکت اینشتین و یانگ-میلز را به دست می‌آوریم

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R - 2\Lambda) = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (12)$$

$$\nabla_\mu F_{\mu\nu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}] = 0, \quad (13)$$

که در معادله اخیر،  $\nabla_\mu$  نشان دهنده مشتق همورد است. این معادلات جواب‌های متنوعی دارند. ما جواب رایزنر-نوردستروم پاد دوسیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۱۴]:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (14)$$

که جواب بدیهی (رابطه (۳.۲) در [۱۴]) نام گرفته است و در آن  $r$  مختصه شعاعی فضای پاددوسیه و زوایای  $\theta$  و  $\phi$  زوایای کروی پاددوسیه هستند. تابع  $f$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3}, \quad (15)$$

و میدان یانگ-میلز  $SU(2)$  به صورت زیر در نظر گرفته شده است [۱۴]:

$$A = \frac{i}{2} \left( \left( a - \frac{q}{r} \right) dt - \cos\theta d\phi \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

که در آن  $M$ ،  $Q$ ،  $q$  و  $a$  ثابت هستند و

$$Q^2 = 1 + q^2. \quad (17)$$

از (۱۶) مشخص است که این حل شامل میدان‌های مغناطیسی

$$\tilde{A}_x^{(1)} = \tilde{A}_\infty^{(1)} \left( \frac{-r}{\Lambda r^2} f \right)^{z_1} (1 + i\omega h_1(r) + \dots), \quad (32)$$

$$\tilde{A}_x^{(2)} = \tilde{A}_\infty^{(2)} \left( \frac{-r}{\Lambda r^2} f \right)^{z_2} (1 + i\omega h_2(r) + \dots), \quad (33)$$

$$\tilde{A}_x^{(3)} = \tilde{A}_\infty^{(3)} \left( \frac{-r}{\Lambda r^2} f \right)^{z_3} (1 + z_3 h_3(r) + \dots), \quad (34)$$

که در آن ضرایب  $\tilde{A}_\infty^{(a)}$  مقدار میدان‌ها در مرز هستند و پارامترهای  $z_a$  را از (۳۰) و (۳۱) با علامت‌های منفی انتخاب می‌کنیم. در حد  $\omega$  کوچک معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} & \pi r r_h T f \left[ h_1' \left( (rf' - rf)(q - a, r_h) + 2i\pi r r_h T r f' \right) + 2i\pi r r_h T f h_1'' \right] \\ & + i h_1 \left[ (rf f' - r^2 f'^2 - rf^2)(q - a, r_h)' - 16\pi^2 r_h^2 T^2 (q - a, r)' \right. \\ & \left. - 4i\pi r_h T f (r^2 f'' - 2rf' + rf)(q - a, r_h) \right] = 0, \quad (35) \end{aligned}$$

$$-r \left( \frac{f}{r} \right)' + f'' + (f h_1')' = 0. \quad (36)$$

معادله  $h_2$  دقیقاً با معادله  $h_1$  یکسان است. معادله (۳۶) حل دقیقی برای  $h_3$  دارد:

$$h_3 = -\log \left( \frac{f}{C_3 r^2} \right) + C_3 \int \frac{dr}{f(r)}, \quad (37)$$

که در آن  $C_1$  و  $C_3$  ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند. با شرط  $h_3 \rightarrow 0$  در مرز خواهیم داشت  $C_3 = -\frac{\Lambda}{3}$  و برای این که  $h_3$  در روی افق تکین نباشد، مقدار  $C_1$  را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$C_1 = 4\pi T. \quad (38)$$

با جایگذاری جواب‌ها در (۲۵) و دوبار مشتق‌گیری نسبت به مقدار مرزی  $\tilde{A}_\infty^{(3)}$ ، تابع گرین اقلیدسی به صورت زیر در می‌آید:

$$G_{xx}^{(33)}(\omega) = \left( \tilde{A}_x^{(3)} \right)^* f(r) \partial_r \tilde{A}_x^{(3)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = -\frac{i\omega C_1}{4\pi T}, \quad (39)$$

رسانندگی با استفاده از فرمول کوپو (۲۴) و با توجه به (۳۸) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma_{xx}^{(33)} = 1. \quad (40)$$

برای حل معادله (۳۵)، از بسط در نزدیکی مرز  $r \rightarrow \infty$  استفاده می‌کنیم:

$$h_1(r) \approx h_{1,0} + \frac{h_{1,1}}{r} + \frac{h_{1,2}}{r^2} + \dots, \quad (41)$$

که در آن  $\omega$  بسامد میدان است. ما می‌توانیم رسانندگی جریان رنگ را با استفاده از فرمول گرین-کوپو به دست آوریم

$$\begin{aligned} \sigma_{ab}^{ij}(\omega) = & -\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \text{Im} \langle J_a^i(\omega) J_b^j(-\omega) \rangle = \\ & -\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \text{Im} \frac{\delta^2 S}{\delta \tilde{A}_i^a \delta \tilde{A}_j^b}, \quad (24) \end{aligned}$$

حد  $\omega \rightarrow 0$  مربوط به این است که رسانندگی جریان مستقیم مدنظر است که در آن بسامد را صفر می‌گیریم. در رابطه فوق، شاخص‌های  $a$  و  $b$  مربوط به گروه  $SU(2)$  و شاخص‌های  $i$  و  $j$  جهت‌های  $x$  و  $y$  هستند. با توجه به تقارن دورانی در صفحه  $xy$  انتظار می‌رود رسانندگی کمیتی نرده‌ای باشد  $\sigma_{ab}^{ij} = \sigma_{ab} \delta^{ij}$ .

حال میدان‌ها را به صورت  $\tilde{A}_x = \tilde{A}_x(r) e^{i\alpha x}$  در نظر می‌گیریم. در حد هیدرودینامیک، کافی است میدان‌های  $\tilde{A}$  را در حد  $\omega$  خیلی کوچک به دست آوریم. برای این منظور ابتدا رابطه (۲۱) را در کنش قرار می‌دهیم و تا مرتبه دوم  $\tilde{A}$  نگاه می‌داریم.

$$\begin{aligned} S^{(2)} = & -\int d^4x \frac{1}{r^2 f} \left[ -r^2 f^2 \left( (\partial_r \tilde{A}_x^{(1)})^2 + (\partial_r \tilde{A}_x^{(2)})^2 + (\partial_r \tilde{A}_x^{(3)})^2 \right) \right. \\ & \left. + \left( (\tilde{A}_x^{(1)})^2 + (\tilde{A}_x^{(2)})^2 \right) (r^2 \omega^2 + (ra_0 - q)^2) + r^2 \omega^2 (\tilde{A}_x^{(3)})^2 \right], \quad (25) \end{aligned}$$

با وردش گرفتن از این کنش به معادلات زیر می‌رسیم:

$$r^2 f \left( f \tilde{A}_x^{(1)'} \right)' + (r^2 \omega^2 + (ra_0 - q)^2) \tilde{A}_x^{(1)} = 0, \quad (26)$$

$$r^2 f \left( f \tilde{A}_x^{(2)'} \right)' + (r^2 \omega^2 + (ra_0 - q)^2) \tilde{A}_x^{(2)} = 0, \quad (27)$$

$$f \left( f \tilde{A}_x^{(3)'} \right)' + \omega^2 \tilde{A}_x^{(3)} = 0, \quad (28)$$

ابتدا حل معادلات را در نزدیکی افق به دست می‌آوریم. برای این منظور از بسط نزدیک افق  $f \sim 4\pi T (r - r_h)$  و

$$\tilde{A}_x^{(a)} \sim (r - r_h)^{z_a}, \quad a = 1, 2, 3 \quad (29)$$

استفاده می‌کنیم و در نتیجه:

$$z_1 = z_2 = \pm i \frac{\sqrt{(a_0 - q / r_h)^2 + \omega^2}}{4\pi T}, \quad (30)$$

$$z_3 = \pm i \frac{\omega}{4\pi T}, \quad (31)$$

حال جواب در کل دامنه  $\Gamma$  را، بسطی از  $\omega$  به صورت زیر فرض می‌کنیم:

با جایگذاری در (۳۵)

$$h_{11} = -\frac{h_{10}}{16\pi\Lambda^2 r_h T (\pi r_h T (\Lambda M - a \cdot q) + i \Lambda M (a, r_h - q))} \times [3a_0^2 \Lambda^2 r_h^2 + 36\pi^2 a_0^2 r_h^2 T^2 (\Lambda - a_0^2) + 36i\pi a_0^2 \Lambda r_h T (a_0 r_h - q) + \Lambda i \pi \Lambda^2 Q^2 r_h T (q - a_0 r_h) + \Lambda^2 (3q(q - 2a_0 r_h) + \pi^2 r_h^2 T^2 (\Lambda q^2 + 20))] \quad (42)$$

به طریقی مشابه با  $\sigma_{xx}^{(33)}$ ، برای  $\sigma_{xx}^{(11)}$  و  $\sigma_{xx}^{(22)}$  داریم:

$$\sigma_{xx}^{(11)} = \sigma_{xx}^{(22)} = -\frac{\Lambda}{3} (h_{11} + h_{11}^*), \quad (43)$$

اما با توجه به شرط مرزی  $\lim_{r \rightarrow \infty} h_{11} = 0$  در نزدیکی مرز  $h_{10} = 0$

به دست می آید که در نتیجه  $h_{11} = 0$  می شود و

$$\sigma_{xx}^{(11)} = \sigma_{xx}^{(22)} = 0, \quad (44)$$

بدین ترتیب رسانندگی رنگ  $\sigma_{xx}^{(ab)}$  برحسب شاخص های  $SU(2)$  قطری است و تنها در جهت سه، مقدار غیر صفر دارد. این جهت همان جهت میدان زمینه در (۲۰) است. به عبارت دیگر، قانون اهم کاملاً به صورت قطری در می آید:

$$\sigma_{aa} = \frac{\delta J_a^x}{\delta E_a^x}, \quad (45)$$

که در آن  $a = 3$  از طرفی رابطه (۴۰) نامساوی (۹) را اشباع می کند.

#### ۴. نتیجه گیری

ما برای یک مدل غیر آبلی یانگ-میلز با گروه پیمانهای  $SU(2)$  در  $2+1$  بعد، رسانندگی رنگ را با استفاده از تناظر گرانش/نظریه پیمانهای به دست آوردیم. دوگان گرانشی را یک نظریه اینشتین با سیاه شامه رایزنر-نوردستروم در  $3+1$  بعد در نظر گرفتیم که جواب های آن در [۱۴] معرفی شده اند. برای

#### مراجع

1. J M Maldacena, *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113.
2. O Aharony, S S Gubser, J M Maldacena, H Ooguri, and Y. Oz, *Phys. Rept.* **323** (2000) 183.
3. J Casalderrey-Solana, H Liu, D Mateos, K Rajagopal and U A Wiedemann, "Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions," arXiv:1101.0618.
4. D Mateos, *Class. Quant. Grav.* **24** (2007) S713.
5. S Bhattacharyya, V E Hubeny, S Minwalla, and M Rangamani, *JHEP* **045** (2008) 0802.
6. M Rangamani, *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 224003.
7. J Bhattacharya, S Bhattacharyya, S Minwalla, and A Yarom, *JHEP*, **147** (2014) 1405.
8. P Kovtun, *J. Phys.* **A45** (2012) 473001.
9. D F Litim and C Manuel, *Nucl. Phys. B* **562** (1999) 237.

- (2009) 113.
17. D T Son and A O Starinets, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **57** (2007) 95.
18. G Policastro, D T Son, and A O Starinets, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 081601.
19. G Policastro, D T Son, and A O Starinets, *JHEP* **043** (2002) 0209.
20. A Donos and J P Gauntlett, *JHEP* **081** (2014) 1411.
21. S A Hartnoll, C P Herzog and G T Horowitz, *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 031601.
10. S Grozdanov, A Lucas, S Sachdev, and K Schalm, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 22 (2015) 221601.
11. M Baggioli and O Pujolas, *JHEP* **040** (2017) 1701.
12. B Goutéraux, E Kiritsis and W J Li, *JHEP* **122** (2016) 1604.
13. K Bitaghsir Fadafan, *Phys. Lett. B* **762** (2016) 399.
14. B L Shepherd and E Winstanley, *Phys. Rev. D* **93**, **6** (2016) 064064.
15. N Banerjee and S Dutta, arXiv:1112.5345 [hep-th].
16. D T Son, *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)* **192-193**