

حد سرعت کوانتومی تولید درهم‌تنیدگی اتم- یون در اتصال جوزفسون

مصطفی رجبی ابقاء^۱ و شاهپور سعیدیان^{۲،۱}

۱. دانشکده فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان
۲ مرکز پژوهشی اپتیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان

پست الکترونیکی: mrebgaha@iasbs.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۶/۱۰؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۰۱/۲۷)

چکیده

در این پژوهش به مطالعه تونل‌زنی یک اتم در داخل یک چاه پتانسیل دوتایی پرداخته‌ایم. اتم در برهم‌کنش با یک یون است که در یک چاه هماهنگ ساده در مرکز چاه دوتایی قرار دارد. تونل‌زنی اتم را می‌توان با استفاده از اسپین و یا حالت‌های فضایی یون کنترل کرد. با در نظر گرفتن یک پتانسیل مدل نشان داده‌ایم که می‌توان یک حالت درهم‌تنیده بین حالت فضایی یون و تابع موج اتم تولید کرد. با استفاده از روش کنترل بهینه به بررسی سریع‌ترین فرایند ممکن برای دستیابی به این حالت درهم‌تنیده پرداخته‌ایم. این دستگاه می‌تواند به عنوان کیوبیت در کامپیوترهای کوانتومی مورد استفاده قرار گیرد.

واژه‌های کلیدی: درهم‌تنیدگی اتم-یون- الگوریتم پایه‌های تصادفی- کنترل بهینه- حد سرعت کوانتومی

۱. مقدمه

اهمدوسی، در اثر برهم‌کنش‌های غیر قابل اجتناب با محیط، اطلاعات آن در محیط گم می‌شود. بنابراین باید هر گونه آماده‌سازی، پردازش و اندازه‌گیری روی کیوبیت قبل از واهمدوسی آن انجام شود. به عبارت دیگر برای در امان ماندن از اثرات مخرب واهمدوسی لازم است این فرایندها با بیشینه سرعت ممکن انجام شوند. نشان داده شده است که این سرعت به خاطر وجود اصل عدم قطعیت انرژی- زمان، یک حد بنیادی غیر قابل اجتناب دارد که به حد سرعت کوانتومی^۱ (QSL) معروف است. بنا به تعریف، حد سرعت کوانتومی کمترین زمان

امروزه شاهد پیشرفت‌های بسیار سریعی در حوزه فناوری‌های کوانتومی هستیم. به خصوص توانایی‌های کنونی در حوزه اتم‌های فراسرد به محققان اجازه می‌دهد تا در آزمایشگاه روی دستگاه‌های پیچیده کوانتومی کنترل دقیقی داشته باشند. با این وجود این کنترل‌ها هنوز بهینه نیستند؛ به گونه‌ای که در حال حاضر بسیاری از پروتکل‌هایی که در حوزه فناوری‌های کوانتومی پیشنهاد داده می‌شوند از واهمدوسی رنج می‌برند. به عنوان مثال یک کیوبیت فقط تا مدت زمان محدودی می‌تواند اطلاعات کوانتومی را در خود ذخیره کند و بعد از زمان

۱. Quantum speed limit

می‌شود تا با توجه به توانایی‌های بالقوه آنها، دستگاه‌های کوانتومی برای انجام کارهای پیچیده‌ای مانند ذخیره‌سازی اطلاعات کوانتومی، ارتباطات کوانتومی، پردازش کوانتومی مورد استفاده قرار بگیرند. لازمه همه این تلاش‌ها آن است که تحول دستگاه کوانتومی درست انجام بگیرد، به این معنی که عاری از خطا باشد. عموماً برای این منظور از تکنیک‌های کنترلی پیچیده‌ای استفاده می‌شود. یکی از این تکنیک‌ها کنترل بهینه کوانتومی یا QOC است [۷-۹]. QOC روشی بسیار موفق در بهینه‌سازی دستگاه‌های کوانتومی بخصوص دستگاه‌های کم ذره است. این روش مسیر بهینه تحول دینامیک دستگاه برای رسیدن به حالت مورد نظر در کمترین زمان ممکن را به دست می‌دهد. بنابراین QOC یک ابزار پرکاربرد در حوزه فناوری کوانتومی است.

با توجه به قضیه QSL، حتی این تحول‌های بهینه هم نمی‌توانند در زمان‌های به دلخواه کوتاه انجام گیرند. یعنی یک مقدار کمینه برای τ وجود دارد که زیر آن، الگوریتم در همگرا شدن به حالت مطلوب شکست می‌خورد، در حالی که برای مقادیر بالاتر از آن می‌توان به این حالت رسید.

یک پارامتر مهم برای شناسایی مسیر بهینه، فیدلیتی $F = |\langle \psi_T | \psi_t \rangle|$ یا متمم آن نافیدلیتی $IF = 1 - F$ است. نافیدلیتی معیاری از فاصله حالت نهایی $|\psi_T\rangle$ از حالت هدف $|\psi_T\rangle$ است به گونه‌ای که هرچه حالت دستگاه به حالت هدف نزدیک‌تر باشد نافیدلیتی کوچک‌تر است. به کمک QOC می‌توان مسیر تحولی دستگاه را به گونه‌ای بهینه کرد که در کمترین زمان ممکن به کمترین نافیدلیتی ممکن دست پیدا کرد. بررسی اتم‌های فراسرد درک ما را از دستگاه‌های بس‌ذره‌ای افزایش داده و ما را قادر می‌سازد که دستگاه‌های حالت جامد، میدان‌های مصنوعی پیمان‌های و ... را شبیه‌سازی کنیم [۱۰-۱۲]. از طرف دیگر یون‌های به دام افتاده کاربردهای وسیعی در زمینه اپتیک کوانتومی، فرایندهای اطلاعات کوانتومی و اندازه‌گیری‌های دقیق پیدا کرده‌اند [۱۳-۱۵].

در سال‌های اخیر ترکیب اتم‌های فراسرد با یون‌ها بسیار مورد توجه قرار گرفته است و چشم‌اندازهای جدیدی در

لازم برای آماده‌سازی یا انتقال یک دستگاه کوانتومی به یک حالت معین است [۱-۴]. اثبات‌های مختلفی برای QSL وجود دارد. یکی از ساده‌ترین آنها توسط مارگلو و لویتین ارائه شده است که تحت عنوان قضیه مارگلو-لویتین شناخته می‌شود [۳]. آنها نشان دادند که سرعت تحول یک دستگاه نمی‌تواند از یک مقدار بیشینه که به متوسط انرژی دستگاه بستگی دارد تجاوز کند. این قضیه را در حالتی که هامیلتونی دستگاه مستقل از زمان باشد به راحتی می‌توان ثابت کرد. اگر بر هم نهی حالت‌های اولیه و تحول یافته دستگاه را در پایه متشکل از ویژه‌حالت‌های هامیلتونی $\{E_n\}$ بسط دهیم به دست می‌آوریم

$$S(t) = \langle \psi_0 | \psi_t \rangle = \sum_n |C_n|^2 \exp(-iE_n t / \hbar), \quad (1)$$

در اینجا C_n ها ضرایب بسط حالت اولیه در پایه مورد نظر هستند. حال با در نظر گرفتن قسمت حقیقی این رابطه و استفاده از قضیه مثلثاتی $\cos x \geq 1 - \frac{x}{\pi}(x + \sin x)$ که برای $x > 0$ صادق است به نامساوی زیر می‌رسیم (فرض می‌کنیم $\langle H \rangle > 0$)

$$\operatorname{Re}[S(t)] \geq \sum_n |C_n|^2 \left[1 - \frac{x}{\pi} \left(\frac{E_n t}{\hbar} + \sin \left(\frac{E_n t}{\hbar} \right) \right) \right] = 1 - \frac{x}{\pi} \frac{\langle H \rangle}{\hbar} t + \frac{x}{\pi} \operatorname{Im}[S(t)], \quad (2)$$

از طرفی اگر حالت‌های اولیه و نهایی بر هم عمود باشند داریم $\operatorname{Re}[S(t)] = \operatorname{Im}[S(t)] = 0$. به عبارت دیگر $\operatorname{Re}[S(t)] = \operatorname{Im}[S(t)] = 0$. در نتیجه می‌توان نوشت

$$\tau_{QSL} \geq \frac{\pi \hbar}{x H}, \quad (3)$$

بنابر اهمیت آن مسائل مورد توجه دانشمندان در زمینه رایانش، اطلاعات و فرایندهای کوانتومی است. این مفهوم جذاب در سال‌های اخیر به علت توسعه در زمینه فناوری‌های کوانتومی و وجود قابلیت اندازه‌گیری در آزمایشگاه‌های مربوط به اتم‌های فراسرد بسیار مورد توجه قرار گرفته است. آزمایش‌های اخیر نشان داده است که می‌توان به حد سرعت کوانتومی دست پیدا کرد [۵ و ۶].

حالت‌های مربوط به دستگاه‌های کوانتومی معمولاً شکننده‌اند. با این وجود تلاش‌های روزافزون زیادی انجام

مطالعه دستگاه‌های کوانتومی ایجاد کرده است. در یک دستگاه هیبریدی شامل اتم‌های فراسرد و یون‌ها، مزایای هر دو دستگاه با هم ترکیب شده و به ما این امکان را می‌دهد که مسائل بسیاری از جمله تشکیل یون‌های مولکولی در یک چگالیده بوز انیشتین [۱۶]، انتقال بار [۱۷]، ویژگی‌های پراکندگی [۱۸] و [۱۹]، اثر کاندو [۲۰]، برانگیختگی‌های تجمعی [۲۱]، سردسازی یون‌ها به وسیله گازهای اتمی [۲۲-۲۵]، واکنش‌های شیمیایی اتم‌های فراسرد [۲۶-۲۹] و بررسی فرایندهای واهمدوسی اسپینی و برهم‌کنش‌های تبادل اسپینی [۳۰] را بررسی کنیم. دستگاه‌های اتم-یون آزمایشگاه جدیدی را برای بررسی برخورد‌های کشسان و ناکشسان اتم-یون [۳۱-۳۶] و تولید حالت‌های درهم‌تنیده اتم-یون [۳۷ و ۳۸] فراهم می‌کند.

اثر جوزفسون مثالی از ماهیت کوانتومی ماکروسکوپی است. این اثر به رفتاری اشاره دارد که در آن به کمک پدیده تونل‌زنی کوانتومی، جریانی از ذرات بین دو چاه پتانسیل که با یک اتصال ضعیف به هم متصل شده‌اند (و اصطلاحاً به آن اتصال جوزفسون می‌گویند) برقرار می‌شود. چاه دوگانه‌ای را در نظر بگیرید که توسط یک سد ضعیف از هم جدا شده‌اند. اگر هر چاه دارای یک تابع موج ماکروسکوپی باشد که به صورت $\psi_j(x) = \sqrt{n_j} e^{i\theta_j}$ (در اینجا n چگالی ذرات و θ فاز تابع موج است. $L, R = z$ به چاه سمت چپ و راست اشاره دارند)، می‌توان نشان داد که یک جریان بدون اتلاف (ابر جریان) از ذرات در پاسخ به اختلاف فاز $(\theta_L - \theta_R)$ و یا اختلاف چگالی $(n_L - n_R)$ بین دو چاه جاری می‌شود [۳۹ و ۴۰].

جذابیت این دستگاه‌ها در فناوری کوانتومی به خاطر طولانی بودن زمان همدوسی آنهاست که آنها را به کاندیده‌های خوبی برای بیت‌های کوانتومی (کیوبیت‌ها) تبدیل کرده است [۴۱ و ۴۲].

اگرچه اثر جوزفسون ابتدا در دستگاه‌های ابررسانا دیده شد اما مشاهده این اثر در دستگاه‌های اتمی در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است؛ چرا که چشم‌اندازی منحصر به فرد برای مطالعه دینامیک‌های غیر تعادلی با روش‌های کاملاً

کنترل‌پذیر را ارائه می‌دهد [۳۷ و ۴۳-۵۶]. در این کار به بررسی حد سرعت کوانتومی در یک اتصال جوزفسون می‌پردازیم. دستگاه را یک بعدی در نظر می‌گیریم. یک اتم در یکی از چاه‌های یک چاه پتانسیل دوتایی قرار گرفته است. همچنین یک یون در وسط این چاه دوتایی در یک تله هماهنگ ساده مقید شده است. طحواره این چیدمان در شکل ۱ ترسیم شده است. در این مقاله نشان می‌دهیم که می‌توان یک حالت در هم‌تنیده بین حالت فضایی اتم و حالت‌های فضایی پایه و برانگیخته یون که در [۳۸] پیشنهاد شده است، ایجاد کرد. سپس به بررسی حد سرعت کوانتومی به منظور تولید این حالت درهم‌تنیده می‌پردازیم. در برهم‌کنش اتم با یون پتانسیل برهم‌کنش به صورت $-1/x^4$ است [۱۹] که برای بررسی پراکندگی آنها باید از روش نیومروف [۵۷] و نظریه نقص کوانتومی [۵۸] استفاده کرد.

نظریه نقص کوانتومی (QDT) روشی قدرتمند برای توصیف پراکندگی است بخصوص وقتی که شکل دقیق برهم‌کنش در فواصل کوچک مشخص نیست و تقریب شبه پتانسیل هم که معمولاً در مطالعه تحلیلی پراکندگی به کار می‌رود قابل اعمال نیست [۵۸]. می‌توان نشان داد که فرایند پراکندگی به شکل و جزئیات پتانسیل برهم‌کنش در فواصل کوتاه بستگی ندارد. این خاصیت عمومی نتیجه این واقعیت است که ذرات شرکت‌کننده در فرایند پراکندگی بیشتر اوقات از هم دور بوده و جزئیات پتانسیل کوتاه برد را نمی‌بینند. این ویژگی به نظریه QDT این امکان را می‌دهد تا فرایند پراکندگی را با تعداد محدودی پارامتر (که به پارامترهای نقص کوانتومی معروفند) توصیف کند.

با فرض این که اتم گشتاور چهار قطبی دائمی نداشته باشد (مانند اتم‌های فلزی-قلیایی در حالت‌های پایه آنها)، برهم‌کنش بلند برد اتم-یون ناشی از برهم‌کنش بین میدان الکتریکی یون و دو قطبی الکتریکی القا شده اتم است که در فواصل دور به شکل $V(r) \sim -c_4/r^4$ است. در اینجا r فاصله میان اتم و یون بوده و $c_4 = \alpha e^2/2$ است که α قطبش‌پذیری دو قطبی ایستایی اتم و e بار یون است. با حل معادله شرودینگر برای

$$\psi_e(x) \sim |x| \sin\left(\frac{1}{|x|} + \varphi_e\right), \quad (5)$$

$$\psi_o(x) \sim x \sin\left(\frac{1}{x} + \varphi_o\right). \quad (6)$$

پارامترهای نقص کوانتومی φ_o و φ_e به ساختار درون اتم و یون وابسته بوده و به ترتیب به عنوان فاز کوتاه برد زوج و فرد معرفی می‌شوند. مقادیر این پارامترها را می‌توان با تطبیق جواب‌های بالا با توابع موج در فواصل دور پیدا کرد.

۲. تعریف مسئله

به منظور بررسی دینامیک اتم در چاه پتانسیل دوتایی، فرض می‌کنیم که یون در بین دو چاه و درون یک پتانسیل هماهنگ ساده قرار گرفته است. هامیلتونی چنین دستگاهی به صورت زیر خواهد بود:

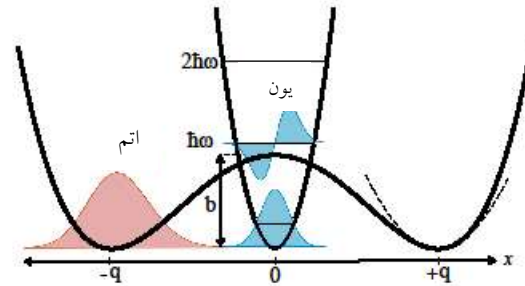
$$H = (P_a^\dagger) / (2m_a) + V_{dw}(x_a) + (P_i^\dagger) / (2m_i) + \quad (7)$$

$1 / 2m_i \omega_i^\dagger x_i^\dagger + V_{ai}(x_a - x_i)$,
که در آن P_a , m_a و x_a به ترتیب تکانه، جرم و مکان اتم، P_i , m_i و x_i به ترتیب تکانه، جرم و مکان یون، و ω_i بسامد تله یون است. $V_{dw}(x_a)$ پتانسیل چاه دوتایی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_{dw}(x_a) = \frac{b}{q^\dagger} (x_a^\dagger - q^\dagger)^\dagger, \quad (8)$$

که در آن ارتفاع سد بین دو چاه پتانسیل و $2q$ فاصله دو کمینه در چاه پتانسیل دوتایی از هم است. سد پتانسیل در مرکز چاه دوتایی و کمینه‌ها در $x = \pm q$ قرار دارند. این پتانسیل را می‌توان در کمینه با یک پتانسیل هماهنگ ساده با بسامد $\omega_e = \sqrt{\hbar b / m_a q^\dagger}$ تقریب زد. رابطه (۷) را می‌توان با نظریه نقص کوانتومی حل کرد. $V_{ai}(x_a - x_i)$ پتانسیل برهم‌کنش بین اتم و یون است که به منظور به کارگیری روش فوریه سریع (FFM) آن را با یک پتانسیل مدول جایگزین می‌کنیم. چنین پتانسیل مدلی باید سه شرط زیر را برآورده کند:

۱- باید در فواصل دور به شکل $1/x^\dagger$ باشد تا بتواند نتایج حالت مقید (حداقل تعدادی از آنها) و پراکندگی را به



شکل ۱. اتم در داخل یک چاه پتانسیل دوتایی قرار گرفته و تابع موج آن به رنگ قرمز کشیده شده است. اتم در برهم‌کنش با یک یون قرار دارد. یون در مرکز چاه پتانسیل دوتایی و داخل یک پتانسیل هماهنگ ساده قرار دارد (سطح انرژی یون به اندازه $\hbar\omega/2$ جابه‌جا شده است). خط‌چین سیاه در چاه سمت راست تقریبی از چاه پتانسیل هماهنگ ساده است.

این پتانسیل تابع موج پراکندگی فراسرد اتم- یون در فواصل دور به دست می‌آید. البته در فواصل نزدیک (زیر چند نانومتر) جایی که توابع موج الکترون‌های اتم و یون روی هم می‌افتند شکل برهم‌کنش بسیار پیچیده است. مطابق QDT نقش این قسمت القای یک انتقال فاز φ در تابع موج است. برای درک این موضوع، معادله شرودینگر مربوط به پراکندگی فراسرد اتم از یون در یک بعد را در نظر بگیرید. فاصله اتم از یون را با x نشان می‌دهیم. در فواصل کوتاه ($x \ll 1/\sqrt{E}$) می‌توان از هر پتانسیل دیگری در برابر پتانسیل برهم‌کنش صرف‌نظر کرد. از طرفی با توجه به آنچه که در بالا در مورد خاصیت عمومی پراکندگی گفته شد شکل دقیق پتانسیل در فواصل کوتاه اهمیتی ندارد بنابراین برای سادگی آن را به همان شکل

$V(r) = -c_\dagger / x^\dagger$ در نظر می‌گیریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{c_\dagger}{x^\dagger} \right] \psi(x) = E\psi(x). \quad (4)$$

این معادله شامل جواب‌های فرد (φ_o) و زوج (φ_e) می‌شود و از آنجا که اتم و یون تمیزپذیرند جواب عمومی این معادله، ترکیب خطی از φ_e و φ_o است. در این معادله در حد $x \rightarrow 0$ می‌توان از E در برابر بقیه جملات صرف‌نظر کرد. بنابراین در این ناحیه، تابع موج به صورت زیر خواهد بود:

شکل درست باز تولید کند.

۲- واگرایی غیر فیزیکی را که در پتانسیل قطبش (به خاطر عدم اعتبار آن در فواصل کوتاه) وجود دارد تصحیح کند. همچنین نوسانات سریع تابع موج در فواصل کوتاه را که در روش‌های محاسباتی موجود کار با آنها بسیار دشوار است کاهش دهد.

۳- شرایط مرزی که با نظریهٔ نقص کوانتومی اعمال می‌شود (معادلات ۵ و ۶) باید طوری در پتانسیل جدید معادل‌سازی شوند که ترکیب انواع پارامترهای نقص کوانتومی (φ_0 و φ_e) را به درستی شامل شود.

یک انتخاب مناسب برای شرایط بالا پتانسیل مدل زیر است [۵۹]:

$$V_{mod}(x) = v_0 e^{-\gamma x^2} - \frac{1}{x^4 + 1/\omega}, \quad (9)$$

مقادیر پارامترهای γ و ω با استفاده از پارامترهای نظریهٔ نقص کوانتومی یعنی φ_0 و φ_e به دست می‌آیند. $v_0 = 3\omega$ ارتفاع سد است. طول مشخصه $R^* = \sqrt{ae^2 m_A / \hbar^2}$ و انرژی مشخصه $E^* = (\hbar^2 / 2m_A R^{*2})$ برای مقیاس‌بندی مجدد هامیلتونی استفاده می‌شود. در این کار از اتم ^{87}Rb و یون $^{171}\text{Yb}^+$ استفاده می‌کنیم که برای آنها مقادیر طول و انرژی

به صورت $R^* = 375/31 \text{ nm}$ و $E^*/\hbar = 0/41 \text{ kHz}$ هستند. یون

مورد نظر در این مسئله می‌تواند دو شکل اسپینی متفاوت داشته باشد (\uparrow و \downarrow) که معادل با این دو شکل اسپینی دو پارامتر نقص کوانتومی تعریف می‌شود. مقادیر پارامترهای نقص کوانتومی

برای فاز زوج و فرد، $\phi_e^\downarrow = 0/23\pi$ و $\phi_e^\uparrow = 0/45\pi$ و $\phi_0^\uparrow = 0/3\pi$ و $\phi_0^\downarrow = 0/23\pi$ و پارامترهای معادل این

مقادیر $\omega^\uparrow = 8^\circ$ و $\gamma^\uparrow = \gamma_{min}$ در پتانسیل مدل به صورت

$\omega^\downarrow = 29^\circ$ و $\gamma^\downarrow = 10^\circ \gamma_{min}$ است که در آن $\gamma_{min} = 4\sqrt{10}\omega$

است [۴۸]. در طی فرایند یکی از پارامترهای اسپینی به عنوان مثال ω^\downarrow و γ^\downarrow را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که حالت اسپینی بدون تغییر باقی می‌ماند. همچنین $b=5/5$ قرار داده می‌شود. با جایگذاری پتانسیل مدل در رابطه (۷) و استفاده از

مقیاس جدید، هامیلتونی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H = -\frac{\partial^2}{\partial x_a^2} + V_{dw}(x_a) - \frac{m_a}{m_i} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} \frac{m_a}{m_i} \left(\frac{R^*}{l_i} \right)^2 x_i^2 + V_{mod}(x_a - x_i),$$

که در آن $l_i = \sqrt{\hbar / m_i \omega_i}$ تعریف می‌شود.

۳. تولید حالت درهم تنیده

فرایند تولید حالت درهم‌تنیده که ابتدا در [۳۷] بین حالت اسپینی یون و حالت فضایی اتم‌ها پیشنهاد شد به شرح زیر است. در شروع فرایند فرض می‌شود که اتم در چاه سمت چپ است و فاصلهٔ بین دو چاه به قدری زیاد است که توابع موج اتم و یون با هم همپوشانی ندارند. یون در ابتدا در برهم‌نهشی از حالت‌های پایه و برانگیختهٔ چاه پتانسیل هماهنگ ساده $\sqrt{2}/\sqrt{2} (|0\rangle + |1\rangle)$ قرار دارد. سپس فاصلهٔ بین دو چاه را کاهش داده و صبر می‌کنیم تا تونل‌زنی اتفاق بیفتد. بسته به این که یون در حالت پایه یا برانگیخته باشد سرعت تونل‌زنی متفاوت خواهد بود. طوری این فرایند تنظیم می‌شود که اگر یون در حالت پایه باشد اتم در انتهای فرایند در چاه سمت راست و اگر یون در حالت برانگیخته باشد اتم در چاه سمت چپ باشد. در واقع این فرایند طوری انجام می‌شود که با توجه به قرار داشتن یون در برهم‌نهشی از حالت‌های پایه و برانگیخته، در انتها حالت درهم‌تنیده $|\psi_L\rangle + |\psi_R\rangle$ را داشته باشیم. تابعیت زمانی این فرایند به شکل یک تابع کسینوسی انتخاب شده است که به شکل زیر است:

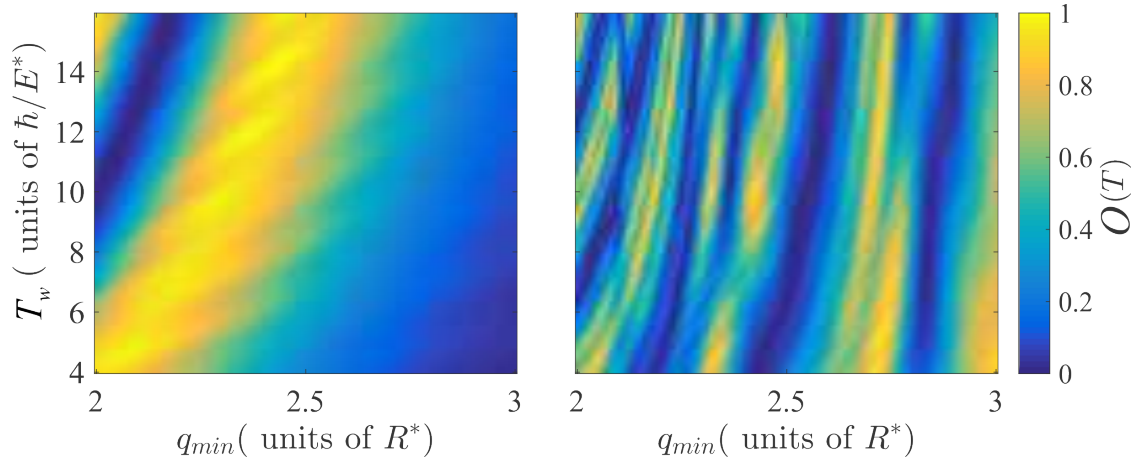
$$q(t) = \begin{cases} q_0 & t < 0 \\ \frac{q_0 - q_{min}}{2} f(t) + \frac{q_0 + q_{min}}{2} & 0 < t < T_1 \\ \frac{q_{min} - q_0}{2} f(t - T) + \frac{q_0 + q_{min}}{2} & T_1 < t < T_2 \\ q_0 & t > T \end{cases}, \quad (11)$$

$q(t)$ میدان کترلی نامیده می‌شود. در این رابطه

$f(t) = \cos(\Omega t)$ با $\Omega = \frac{\pi}{T_1}$ ، $T_1 = T_r$ و $T_2 = T_w + T_r$

است. $T = 2T_r + T_w$ زمان لازم برای افزایش یا کاهش

فاصلهٔ بین دو چاه و T_w زمان انتظار برای رخ دادن تونل‌زنی



شکل ۲. همپوشانی تابع موج مطلوب و تابع موج نهایی که با رویش زمان انتظار T_w و فاصله کمینه q_{min} به دست آمده است. سمت چپ (راست) مربوط به حالتی است که یون در زمان اولیه در حالت پایه (برانگیخته اول) قرار دارد.

روش خاص از QOC به نام روش پایه‌های تصادفی بریده شده^۱ (CRAB) استفاده می‌کنیم. هدف ما کمینه کردن نافیدلیتی است که بنا به تعریف برای حالت مطلوب $|\phi\rangle$ و حالت تحول یافته $|\psi(T)\rangle$ برابر است با $IF = 1 - |\langle\psi(T)|\phi\rangle|^2$ [۶]. در صورتی که یون در ابتدا در حالت پایه قرار داشته باشد حالت مطلوب دستگاه $|\psi_{R,0}\rangle$ است که برای آن خواهیم داشت $IF = 1 - O_{R,0}(T)$ و اگر یون در ابتدا در حالت برانگیخته باشد حالت مطلوب دستگاه $|\psi_{L,1}\rangle$ است که برای آن به دست می‌آوریم $IF = 1 - O_{R,0}(T)$. نافیدلیتی مربوطه برای فرایند تولید درهم‌تنیدگی را میانگین این دو در نظر می‌گیریم

$$F[q(t)] = (2 - O_{L,1}(T) - O_{R,0}(T)) / 2, \quad (12)$$

این کمیت یک تابعی از میدان کنترلی $q(t)$ است. ابتدا از یک حدس اولیه برای $q(t)$ (معادله ۱۱) شروع می‌کنیم. سپس تابع تصحیح $g(t)$ را که در فضای فوریه به شکل زیر نوشته می‌شود برای تصحیح $q(t)$ در آن ضرب می‌کنیم.

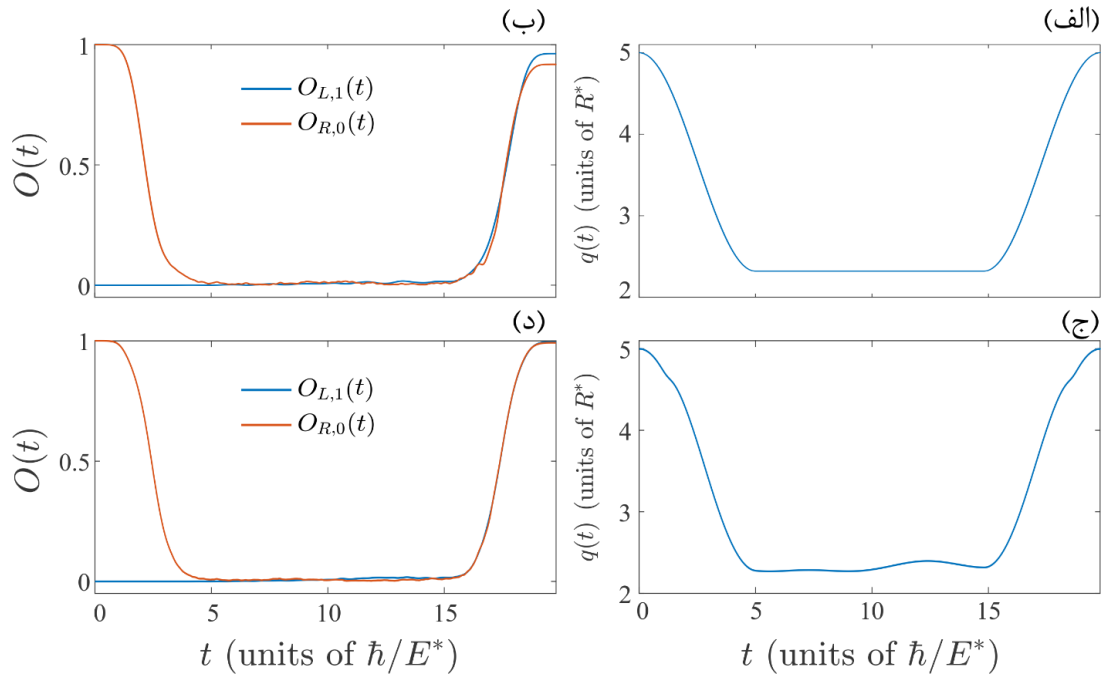
$$g(t) = 1 + \frac{\left(\sum_{n=1}^{N_c} A_n \sin(\omega_n t) + B_n \cos(\omega_n t) \right)}{\lambda(t)}. \quad (13)$$

در این رابطه N_c تعداد مؤلفه‌های فضای فوریه و ω_n هماهنگ‌های فوریه تصادفی است که به صورت

است. $2q_0$ فاصله بین دو چاه در زمان $t=0$ و $2q_{min}$ فاصله کمینه بین دو چاه در حین فرایند است. برای پیدا کردن فرایند مناسب، $q_0 = 5$ و $T_r = 5$ ثابت فرض می‌شوند و T_w را از ۴ تا ۱۵ و q_{min} را از ۲ تا ۳ تغییر می‌دهیم. در شکل ۲ تابع همپوشانی حالت مطلوب با حالت نهایی دستگاه نشان داده شده است. هدف آن است که اگر یون در حالت پایه نوسانگر باشد اتم در انتهای فرایند در چاه سمت راست و در صورتی که یون در حالت برانگیخته نوسانگر باشد اتم در چاه سمت چپ قرار بگیرد. شکل سمت چپ تابع همپوشانی راست برای حالت پایه $O_{R,0}(T) = |\langle\psi_{R,0}|\psi(T)\rangle|^2$ و شکل سمت راست تابع همپوشانی چپ برای حالت برانگیخته $O_{L,1}(T) = |\langle\psi_{L,1}|\psi(T)\rangle|^2$ را نشان می‌دهد. در صورتی که این توابع در انتهای فرایند برابر با یک باشند اتم به ترتیب در سمت راست یا چپ خواهد بود.

بازدهی این فرایند را می‌توان با محاسبه میزان همپوشانی تابع موج مطلوب و تابع موج به دست آمده بررسی کرد. در محدوده بررسی شده هیچ پارامتری که به ازای آن همپوشانی برای هر دو فرایند بالای ۹۹ درصد باشند یافت نشد. مثلاً در $T_w = 9/8$ و $q_{min} = 2/32$ توابع همپوشانی $O_{R,0}(T)$ و $O_{L,1}(T)$ به ترتیب برابر با ۹۶ درصد و ۹۲ درصد هستند. بنابراین برای این که بتوانیم به بهینه‌ترین حالت برسیم از یک

۱. Chopped random basis



شکل ۳. (الف) میدان کنترلی $q(t)$ بر حسب زمان، قبل از بهینه‌سازی، (ب) تابع همپوشانی تابع موج در حال تحول با تابع موج هدف بر حسب زمان، قبل از بهینه‌سازی، (ج) شکل بهینه شده میدان کنترلی $q(t)$ بر حسب زمان و (د) تابع همپوشانی تابع موج در حال تحول با تابع موج حالت هدف بر حسب زمان، پس از بهینه‌سازی.

۴. حد سرعت کوانتومی

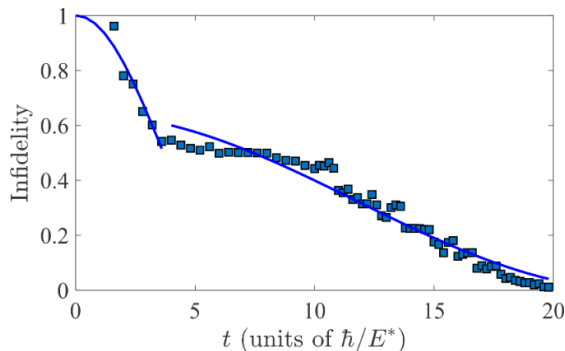
تا به اینجا نشان دادیم که می‌توان یک حالت درهم‌تنیده به صورت $|\psi_R\rangle|0\rangle + |\psi_L\rangle|1\rangle$ بین اتم و یون با بازدهی بالاتر از ۹۹ درصد ایجاد کرد. مدت زمان لازم برای تولید این حالت $19/8$ (در واحد \hbar/E^*) است که برای $^{171}\text{Yb}^+ - ^{87}\text{Rb}$ برابر $7/7$ میلی ثانیه است. سؤالی که در اینجا پیش می‌آید این است که آیا می‌توان فرایند سریع‌تری برای تولید این حالت در هم‌تنیده یافت؟ در واقع حد سرعت کوانتومی برای این فرایند چقدر است؟ کمیت نافیدلیتی را در نظر بگیرید. هرچه این مقدار به صفر نزدیک‌تر باشد در واقع بازدهی فرایند تولید حالت در هم‌تنیده مد نظر بیشتر خواهد بود. زمان T را با گام‌های $0/2$ کاهش داده و فرایند کنترل بهینه را بر روی هر گام تکرار می‌کنیم تا جایی که دیگر با ادامه دادن این بهینه‌سازی عدد نافیدلیتی قابل کاهش نباشد. نتایج به دست آمده در شکل ۴ آورده شده است. نمودار به دست آمده در توافق با شکل ۲

$r_n = 2\pi(n+r_n)/T$ تعریف می‌شوند. توزیع تصادفی یکنواخت روی $[-1/2, 1/2]$ است. همچنین $\lambda(t)$ تابعی است که شرایط مرزی را اعمال می‌کند طوری که مقدار اولیه و نهایی میدان کنترلی ثابت بماند (یعنی برای $t \rightarrow 0$ و $t \rightarrow T$ داریم $\lambda(t) \rightarrow \infty$). مسئله بهینه‌سازی سپس به عنوان اکسترم کردن یک تابع چند متغیره $IF[A_n, B_n, \omega_n]$ باز فرمول‌بندی می‌شود که می‌توان آن را با استفاده از الگوریتم‌های عددی استاندارد حل کرد. به صورت نظری ثابت شده است که مقدار کمینه در این‌گونه موارد به صورت نمایی با افزایش تعداد پارامترهای بهینه‌سازی کاهش می‌یابد [۶۰]. این خاصیت در بسیاری از موارد همگرایی سریع به میدان کنترلی بهینه را تضمین می‌کند. برای جزئیات بیشتر به مرجع [۶] مراجعه کنید. نتایج مربوط به $q(t)$ و توابع همپوشانی پیش و پس از بهینه‌سازی در شکل ۳ آورده شده است. بازده به دست آمده $(\eta = 1 - IF[q(t)])$ در این مورد بالاتر از ۹۹ درصد است.

به فرایندهایی سریع تر با مدت زمان $17/6$ (برابر $6/8$ میلی ثانیه) نیز دست یافت.

۵. نتیجه گیری

چاه‌های پتانسیل دوتایی را می‌توان با استفاده از انبرک‌های نوری یا امواج ایستای لیزرها [۶۱ و ۶۲] و یا با استفاده از میکروته‌ها یا تراشه‌های اتمی ایجاد [۶۳ و ۶۴] و اتم‌ها را درون تله گیر انداخت. همچنین یون‌ها را نیز می‌توان با استفاده از انبرک‌های نوری و تله‌های اپتیکی - پائولی به دام انداخت [۶۵ و ۶۶]. بنابراین از نظر تجربی امکان تولید دستگاه بررسی شده در این مقاله وجود دارد. در این کار با استفاده از یک پتانسیل مدل برای توصیف برهم کنش اتم- یون نشان دادیم که می‌توان یک حالت در هم تنیده بین حالت فضایی یون در تله نوسانگر و حالت فضایی اتم در چاه دوتایی تولید کرد. این کار را می‌توان با استفاده از کنترل بهینه تصادفی کوانتومی به بیشترین بازده ممکن رساند. همچنین نشان دادیم که می‌توان با استفاده از این روش حد سرعت کوانتومی این فرایند را به دست آورد که این مقدار برای اتم ^{87}Rb و یون $^{171}\text{Yb}^+$ برابر با $7/7$ میلی ثانیه است.



شکل ۴. نافیدلیتی بر حسب زمان که نشان دهنده کمترین سرعت قابل دستیابی است. نقاط مربع شکل داده‌های به دست آمده از طریق تکرار متوالی روش کنترل بهینه کوانتومی است و خطوط ممتد تابع برازش شده روی داده‌ها است.

در [۶] است. تابعیت این نافیدلیتی به صورت $\text{acos}^2(\beta T)$ است [۶]. بنابراین بر روی این نمودار دو تابع به این شکل برازش کرده‌ایم که برای قسمت اول و دوم نمودار ($\alpha=1$) و $(\beta=0/21)$ و $(\alpha=0/64)$ و $(\beta=0/07)$ به دست آمده است. همان طور که در نمودار مشخص است مقدار به دست آمده در قسمت قبل را می‌توان سریع‌ترین فرایند تولید این نوع از درهم‌تنیدگی با بالاترین بازدهی در نظر گرفت. با این حال اگر بتوان بازدهی بالاتر از نود درصد را قابل قبول دانست می‌توان

مراجع

1. P Pfeifer, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 3365.
2. Bhattacharyya, K. *J. Phys. A: Math. Gen.* **16** (1983) 2993.
3. N Margolus and L B. Levitin, *Physics D* **120** (1998) 188.
4. S Deffner and S Camppllell, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **50** (2017) 453001.
5. S van Frank, A Negretti, T Berrada, R Bcker, S Montangero, J F Schaff, T Schumm, T Calarco, and J Schmiedmayer, *Nature Communications* **5** (2014) 4009.
6. S van Frank, M Bonneau, J Schmiedmayer, S Hild, C Gross, M Cheneau, I Bloch, T Pichler, A Negretti, T Calarco, and S Montangero, *Scientific Reports* **6** (2016) 34187.
7. D C Brody, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **36** (2003) 5587.
8. V F Krotov, "Global Methods in Optimal Control Theory", Merceel Dekker, New York (1996).
9. I Walmsley, and H Rabitz, *Physics Today* **56** (2003) 43.
10. I. Bloch, J. Dalibard, and S. Nascimbne, *Nature Physics* **8** (2012) 267.
11. M Lewenstein, A Sanpera, V Ahu_nger, B Damski, A Sen(De), and U Sen, *Advances in Physics* **56** (2007) 243.
12. N Goldman, G Juzelinas, P hberg, and I B Spielman, *Reports on Progress in Physics* **77** (2014) 126401.
13. D Leibfried, R Blatt, C Monroe, and D Wineland, *Rev. Mod. Phys.* **75** (2003) 281.
14. H Häffner, C Roos, and R Blatt, *Physics Reports* **469** (2008) 155.
15. R Blatt and C F Roos, *Nature Physics* **8** (2012) 277.
16. R Cofé, V. Kharchenko, and M. D. Lukin, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 093001.
17. R Cofé, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 5316.
18. R. Cofé and A. Dalgarno, *Phys. Rev. A* **62** (2000) 012709.

- Gustavsson, and W D Oliver, *Applied Physics* **6** (2019) 021318.
43. T Schweigler, et al., *Nature* **545** (2017) 323.
 44. G Valtolina, et al., *Science* **350** (2015) 1505.
 45. A Burchianti, et al., *Phys. Rev. Lett.* **120** (2018) 025302.
 46. M Pigneur, et al., *Phys. Rev. Lett.* **120** (2018) 173601.
 47. G Niccoli and J Teschner, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* (2010) 09014.
 48. J M. Schurer, R Gerritsma, P Schmelcher, and A Negretti, *Phys. Rev. A* **93** (2016) 063602.
 49. A Smerzi, S Fantoni, S Giovanazzi, and S R Shenoy, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 4950.
 50. H Doerk, Z Idziaszek, and T Calarco, *Phys. Rev. A* **81** (2010) 012708.
 51. T Secker, R Gerritsma, A W. Glaetzle, and A Negretti, *Phys. Rev. A* **94** (2016) 013420.
 52. U Bissbort, et al., *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 080501.
 53. A Negretti, R Gerritsma, Z Idziaszek, F Schmidt-Kaler, and T Calarco, *Phys. Rev. B* **90** (2014) 155426.
 54. D González-Cuadra, P R Grzybowski, A Dauphin, and M Lewenstein, *Phys. Rev. Lett.* **121** (2018) 090402.
 55. A S Dehkharghani, E Rico, N T Zinner, and A Negretti, *Phys. Rev. A* **96** (2017) 043611.
 56. M R Ebgha, S Saeidian, P Schmelcher, and A Negreti, *Phys. Rev. A* **100** (2019) 033616.
 57. B R Johnson, *J. Chem. Phys.* **69** (1987) 4687 .
 58. M J Seaton, *Rep. Prog. Phys.* **46** (1983) 167.
 59. J M Schurer, P. Schmelcher, and A. Negretti, *Phys. Rev. A* **90** (2014) 033601.
 60. S Lloyd, and S Montangero, *Phys. Rev. Lett.* **113** (2014) 010502.
 61. M Albiez, R Gati, J Fölling, S Hunsmann, M Cristiani, and M K Oberthaler, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 010402 .
 62. R Gati and M K Oberthaler, *J. Phys. B* **40** (2007) R61.
 63. S Levy, E Lahoud, I Shomroni, and J Steinhauer, *Nature*, **449** (2007) 579 .
 64. Atom Chips, edited by J. Reichel and V. Vuletić Wiley-VCH, Weinheim, (2011).
 65. C Schneider, M Enderlein, T Huber, and T Schaetz, *Nature Photonics* **4** (2010) 772 .
 66. M Enderlein, T Huber, C Schneider, and T Schaetz, *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 233004 .
 19. Z Idziaszek, T Calarco, and P Zoller, *Phys. Rev. A* **76** (2007) 033409.
 20. J Bauer, C Salomon, and E Demler, *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 215304.
 21. J M Schurer, A Negretti, and P Schmelcher, *New Journal of Physics* **17** (2015) 083024.
 22. W W Smith, O P Makarov, and J Lin, *Journal of Modern Optics* **52** (2005) 2253.
 23. F H J Hall and S Willitsch, *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 233202.
 24. S Willitsch, M T Bell, A D Gingell, and T P Softley, *Phys. Chem. Chem. Phys.* **10** (2008) 7200.
 25. K Ravi, S Lee, A Sharma, G Werth, and S Rangwala, *Nature Communications* **3** (2012) 1126.
 26. C Zipkes, S Palzer, L Ratschbacher, C Sias, and M Kohl, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 133201.
 27. F H J Hall, M Aymar, N Bouloufa-Maafa, O Dulieu, and S Willitsch, *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011) 243202.
 28. L Ratschbacher, C Zipkes, C Sias, and M Khl, *Nature Physics* **8** (2012) 649652.
 29. A Rakshit and B Deb, *Phys. Rev. A* **83** (2011) 022703.
 30. A Härter, A Krüchow, A Brunner, W Schnitzler, S Schmid, and J H Denschlag, *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 123201.
 31. J Deiglmayr, A Göritz, T Best, M Weidemüller, and R Wester, *Phys. Rev. A* **86** (2012) 043438.
 32. A T Grier, M Cetina, F Oručević, and V Vuletić, *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 223201.
 33. W W Smith, D S Goodman, I Sivarajah, J E Wells, S Banerjee, R Côté, H H Michels, J A Montgomery, and F A Narducci, *Applied Physics B* **114** (2014) 75.
 34. S Schmid, A H ärter, and J H Denschlag, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 133202.
 35. C Zipkes, L Ratschbacher, S Palzer, C Sias, and M Khl, *Journal of Physics: Conference Series* **264** (2011) 012019.
 36. S Haze, S Hata, M Fujinaga, and T Mukaiyama, *Phys. Rev. A* **87** (2013) 052715.
 37. R Gerritsma, A Negretti, H Doerk, Z Idziaszek, T Calarco, and F Schmidt-Kaler, *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 080402.
 38. J Joger, A Negretti, and R Gerritsma, *Phys. Rev. A* **89** (2014) 063621.
 39. B D Josephson, *Physics Letters* **1** (1962) 251.
 40. B D Josephson, *Reviews of Modern Physics* **36** (1964) 216.
 41. M H Devoret, and J M Martinis, *Quantum Information Processing* **3** (2004) 163.
 42. P Krantz, M Kyaergaard, F Yan, T P Orlanb, S