

تعمیم رابطه ناجابه‌جایی هندسی به یک خمینه عمومی

ابوالفضل جعفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شهرکرد

پست الکترونیکی: jafari-ab@sku.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۸/۲۱؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۱۰/۱۳)

چکیده

در چارچوب مکانیک کوانتومی و بر پایه هندسه ناجابه‌جایی در فضا-زمان مینکوفسکی، رابطه ناجابه‌جایی مختصات را به فضا-زمانی غیر از فضا-زمان مینکوفسکی تعمیم می‌دهیم. در این مقاله، با استناد به اختیار در وارد کردن عملگر واحد در حوزه کوانتومی، از عملگر انتقال بهره برده و از آن عملگر ستاره‌ی وایل-موپال را استخراج می‌کنیم. سپس این عملگر را برای یک فضا-زمان عمومی‌تر گسترش می‌دهیم و با استفاده از تعمیم یافته عملگر ستاره‌ی وایل-موپال و اعمال آن بین مختصات تا مرتبه اول از پارامتر انتقال، رابطه ناجابه‌جایی هندسی را در یک خمینه عمومی پیدا می‌کنیم. از اصلی‌ترین مفاهیم استفاده شده در این مقاله، هم‌ارزی موضعی خمینه شبه‌ریمانی با فضا-زمان مینکوفسکی است.

واژه‌های کلیدی: ناجابه‌جایی هندسی، مکانیک کوانتومی، عملگر انتقال، ضرب ستاره‌ی وایل-موپال، هم‌ارزی موضعی

۱. مقدمه

فضایی کوچک مانند اندازه‌های اتمی، با چالش‌ها و مشکلاتی برخورد می‌کنند. در عبور از مقیاس‌های اتمی به مقیاس‌های زیرتر نیز به یک دشواری عظیم‌تر و البته جدید برخورد می‌کنیم. این مشکل، تغییر خود فیزیک است [۱-۴]. شنایدر^۱ به منظور حل برخی از مسائل در حوزه نظریه ریسمان، فرضی کرد مبنی بر این که مختصات هندسی فضا با یکدیگر جابه‌جا نمی‌شوند و به این ترتیب از حد هندسه نقطه‌ای عبور کرد. هرچند این حدس، نظریه مورد مطالعه را بهنجارپذیر کرد ولی به زودی خود به مشکل دیگری تبدیل شد و آن تغییر فیزیک روی

فضا-زمان پیوسته، بازه‌ها و فواصل کوچک را دسترس‌پذیر می‌سازند. امکان دسترسی به فواصل کوتاه است که ما را به مفاهیم درست دیفرانسیل خمینه‌ها می‌رساند. ما امروزه توانایی نوشتن قوانین بنیادی فیزیک روی خمینه‌های دیفرانسیل‌پذیر را به دست آورده‌ایم. از این دست، می‌توان به نظریه میدان‌ها، میدان‌های پیمانه‌ای، میدان‌های کوانتومی و نظریه گرانش اشاره کرد. البته این منظر نیز بدون مشکل نیست. باید گفت که فیزیکدانان همواره در حوالی مرزهای مقیاس، مانند نسبت سرعت ذرات به سرعت نور، یا مطالعه فیزیک در اندازه‌های

که طبق تعریف این نگاشت، با معرفی $\hat{*} = e^{\frac{i}{2} \bar{\partial}_i \theta^{ij} \bar{\partial}_j}$ حاصل ضرب دو تابع دلخواه در هندسه ناجابه‌جایی چنین بیان می‌شود [۳، ۴ و ۱۰]:

$$f(y) \hat{*} g(y) = f(y)g(y) + \frac{i}{2} \theta^{ij} \frac{\partial f(y)}{\partial y^i} \frac{\partial g(y)}{\partial y^j} + \dots \quad (5)$$

لازم به ذکر است که کمیت‌های کلاه‌دار - *Hat* - مختصات یا توابعی از مختصات ناجابه‌جایی هستند و مختصات یا توابع بدون کلاه (*Hat*) مختصات جابه‌جاپذیر یا توابعی از مختصات جابه‌جاپذیر هستند. شکل اصلی ضرب ستاره به صورت $\hat{*} = e^{\frac{i}{2} \bar{\partial}_i \theta^{ij} \bar{\partial}_j}$ است که نمایش تانسوری آن چگونگی اثر کردن مشتقات روی توابع است. البته رابطه آمده در این مقاله نیز ابهامی ندارد و ما می‌توانیم از این شکل از نگاشت ضرب ستاره استفاده کنیم. قانون ساده‌ای نیز وجود دارد که براساس آن می‌توان فیزیک روی هندسه ناجابه‌جایی را به راحتی از نسخه معمولی آن بازنویسی کرد. کافی است که در هر نظریه به جای ضرب معمولی تعریف شده بین توابع یا کمیت‌ها، ضرب ستاره جایگذاری کنیم [۳، ۴ و ۱۰].

بر اساس اصل هم‌ارزی در نسبیت عام، همواره امکان دستیابی به نسبیت خاص به صورت موضعی وجود دارد. در مختصات نرمال فرمی، هر ابرسطح فضاگونه با x^μ ثابت، توسط مجموعه‌ای از ژئودزیک‌های فضایی ساخته می‌شود که بر ژئودزیک زمانگونه که رویداد در مسیر آن در حال وقوع است، متعامد هستند. در مقابل آن، مختصات نرمال ریمان به صورت محلی و موضعی در همسایگی رویداد تعریف می‌شوند. در حد همسایگی‌های بسیار کوچک، می‌توان مسیرهای ژئودزیک را به صورت مستقیم در نظر گرفت. هرچند تحقق جمله قبل به شدت به شرایط متریک وابسته است، مادامی که در هندسه فضا-زمان و یا دست کم در همسایگی مورد مطالعه، تکینگی نباشد، تعبیر آن، دسترس‌پذیر است. در این شرایط، می‌توان از بسط دنباله‌دار تانسور متریک و بسط ضرایب کریستوفل با پارامتر بسط تانسور خمش ریمان استفاده کرد [۱۱-۱۶].

خمینه‌هایی بود که در آنها ناجابه‌جایی بین مختصات فضا پذیرفته شده بود [۵-۹]. ما می‌توانیم هندسه ناجابه‌جایی را با تعویض مختصات y با عملگرهای \hat{y} مشخص کنیم که در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$[\hat{y}^\mu, \hat{y}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}(\hat{y}), \quad (1)$$

پارامتر $\theta^{\mu\nu}$ کمیتی حقیقی و پادمقارن است. آن را پارامتر ناجابه‌جایی می‌نامند. شاخص‌های یونانی نشان دهنده مولفه‌های فضا-زمان هستند و مقادیر ۰ تا ۳ را اختیار می‌کنند. در مراجع [۹ و ۱۰] نشان داده می‌شود که بر اساس قانون علیت، مولفه زمان نمی‌تواند در رابطه (۱) مشارکت کند. بنابراین رابطه ناجابه‌جایی در یکی از عام‌ترین شکل‌های خود به صورت

$$[\hat{y}^i, \hat{y}^j] = i\theta^{ij}(\hat{y}), \quad (2)$$

خواهد بود. متغیرهای لاتین، شاخص‌های فضایی بوده و ارزش آنها ۱، ۲ و ۳ خواهد بود. به هر حال پارامتر ناجابه‌جایی در حالت کلی تابعی از مختصات (در یک برداشت عمومی، تابعی از مختصات کامل حتی شامل زمان) است. از نظر هندسی و از منظر فیزیک، در یک رژیم آرام-تغییر، خواص خمینه‌ها مستقل از زمان است. بنابراین هر چند این مطلب کلیت ندارد ولی در این مقاله پارامتر ناجابه‌جایی را فقط تابع مختصات فضایی و مشخصات هندسی فضا-زمان را نیز مستقل از زمان می‌دانیم. آنچه که از پارامتر ناجابه‌جایی در دسترس داریم شکل ماتریسی آن در فضا-زمان مینکوفسکی است:

$$\theta^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta^{12} & \theta^{13} \\ 0 & \theta^{21} & 0 & \theta^{23} \\ 0 & \theta^{31} & \theta^{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

همه کمیت‌های رابطه (۳) کمیت‌هایی ثابت هستند.

با تبدیل مختصات به عملگرهای جابه‌جاناپذیر، ابهامی در حاصل ضرب توابع این مختصات ظاهر خواهد شد که با نگاشت وایل-مویال می‌توان این ابهام را مرتفع کرد. نگاشت وایل-مویال در شکل نهایی خود، به صورت ضرب ستاره (*star-product*) بین کمیت‌های شامل مختصات ناجابه‌جایی نمایش داده می‌شود:

$$\hat{f}(\hat{y}) \hat{g}(\hat{y}) = f(y) \hat{*} g(y), \quad (4)$$

اجزاء Λ شرط زیر را اغناء می کنند:

$$\Lambda_i(\mathbf{y}) = \begin{cases} \Lambda_i, & y \in \Omega \\ 0, & y \in \partial\Omega \cup \Omega' \end{cases} \quad (7)$$

در این صورت دسترس پذیر بودن انتقال با فرض کوچکی همسایگی Ω بدیهی است.

اگر هندسه فضا- زمان رابطه ناجابه جایی داشته باشد، آنگاه

تفکیک انتقال انباشته به انتقال های خالص دسترس پذیر نخواهد بود: $e^{-\frac{i}{\hbar}\Lambda_x \hat{P}_x} e^{-\frac{i}{\hbar}\Lambda_y \hat{P}_y} \neq e^{-\frac{i}{\hbar}\Lambda \hat{P}}$ ؛ چرا که رابطه بدیهی ترتیب

انتقال $\hat{T}_i \hat{T}_j = \hat{T}_j \hat{T}_i$ اکنون برقرار نیست. بدون از دست دادن

کلیت مسئله و در یک اقدام جالب، همسایگی Ω را در حوالی

مبداء مختصات می گیریم. بنابراین می توانیم پارامتر انتقال را به

$$\text{صورت } \Lambda = y_i \hat{e}^i \quad \text{در نظر بگیریم. دیده خواهد شد که انتخاب} \quad (8)$$

از حجم کار خواهد کاست و انتخاب بهتری خواهد بود. با

توجه به دو رابطه $\langle x | e^{-\frac{i}{\hbar}a\hat{P}_x} \propto \langle x - a |$ و

$\langle x | e^{\frac{i}{\hbar}a\hat{P}_x} \propto \langle x + a |$ دیده می شود که اثر تکانه روی

"کت" و "برا" متفاوت است. تفاوت آنها در علامت آنها است

$$\langle x | \hat{p}_x \propto \langle x - \frac{i}{\hbar} \partial_x | \langle x |$$

$(+\frac{i}{\hbar} \partial_x) \langle x | \langle x + \frac{i}{\hbar} \partial_x |$. این همان دلیل هرمیتی بودن آن

است. این تفاوت علامت فقط در زمان نمایش مکان و اطلاق

عمل از چپ یا راست اهمیت دارد.

جابجه جاگرها نیز به صورت های

$$\langle x | [x, \hat{p}_x] | \psi \rangle = x(-i\partial_x)\psi(x) - (-i\partial_x)(x\psi(x)) = i,$$

$$\langle \psi | [\hat{p}_x, x] | x \rangle = \bar{\psi}(x)(+i\partial_x)x - (+i\partial_x)(\bar{\psi}(x)x) = -i,$$

این ادعا را نشان می دهند. این ویژگی نیز در این مقاله بدون

ابهام است.

در مکانیک کوانتومی، عملگر واحد $\hat{\mathcal{I}} = \int d\mathbf{v} | \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{y} |$ را

می توان به دلخواه وارد محاسبات کرد. در این رابطه

$d\mathbf{v} = d^{d-1}y$ دیفرانسیل حجم در فضا- زمان d بعدی است.

این را قانون اختیار می نامیم و آن را درباره عملگر انتقال به کار

خواهیم برد. با وارد کردن این عملگر در نمایش عملگر انتقال،

در همسایگی Ω ، پارامتر انتقال، شرط کوچکی خود را به

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 - R_{l0k} x^l x^k, \\ g_{0i} &= -\frac{r}{r} R_{0lik} x^l x^k, \\ g_{ij} &= \delta_{ij} - \frac{1}{r} R_{iljk} x^l x^k, \\ g &= -1 + \frac{1}{r} (R_{lk} - 2R_{l0k}) x^l x^k. \end{aligned} \quad (6)$$

۲. ارائه نظریه

در کار حاضر، فرض می کنیم که تمام توابع متعلق به C^∞ بوده

و توابعی هموار و مشتق پذیری بی انتها دارند و در مرزهای

فضایی سریع تر از هر تابع دیگری (سریع تر از تابع $\frac{1}{r}$) به صفر

میل می کنند. همچنین در سطح مکانیک کوانتومی، عملگر انتقال

انباشته را به صورت $\hat{T} = e^{-\frac{i}{\hbar}\Lambda \hat{P}}$ ، با تاکید بر نقش عملگر

تکانه \hat{P} و مولد انتقال، می شناسیم. انباشتگی در انتقال (عملگر

انتقال انباشته) به این معنی است که این عملگر قابل تفکیک به

عملگرهای انتقال جدا شده در جهت های خالص نیست. نمونه

پیشین آن در عملگر دوران سه بعدی است که به علت

ناسازگاری بین مولدهای دوران در جهت های خالص، لزوماً

نمی توان یک دوران کلی تفکیک شده را به سه عملگر پشت

سرهم جدا کرد. البته با کمک زوایای اویلر و به صورت

قراردادی، این جداسازی امکان پذیر است. در یک نگاه

جهانشمول، Λ کمیته برداری و از جنس طول است و برای

داشتن بسط رابطه عملگر انباشته، عدد طبیعی n وجود دارد

که نامساوی (به ازاء نرم $|\Lambda|$) $\langle \langle \Lambda \rangle \rangle$ ، دسترس پذیر است

و این نامساوی کمیته مقیاس منطقی دارد. از منظر فیزیک،

اندازه ویژه مقادیر متناظر با عملگر انتقال - که بعد از این به

جای عملگر انتقال انباشته به کار می بریم - می بایست همگرا و

دسترس پذیر باشد. این دلیل برای مطلب بیان شده کافی است.

در واقع کوچک بودن پارامتر انتقال یک شرط کافی برای تحقق

مطلب بیان شده است. در واقع لزومی ندارد کمیته انتقال

کوچک باشد ولی برای داشتن بسط عملگر انتقال، این مطلب

ضروری است. می توان شرط کوچکی پارامتر انتقال را به

ناحیه ای از فضا که آن را با Ω نشان می دهیم، محدود کرد. در

این صورت عملگر انتقال به صورت خوش تعریف

(γ) در نظر می‌گیریم. تقاضا می‌کنیم که یکی از توابع در مسیر اول و تابع دیگر در مسیر دوم انتقال داده شوند. به این ترتیب که در انتقال دو تابع در صورت‌مندی هایزنبرگ، تابع سمت راست حاضر در ضرب، ابتدا در جهت محور افقی و سپس در راستای محور عمودی انتقال یابد در حالی که تابع سمت چپ، ابتدا در جهت محور عمودی و پس از آن در راستای محور افقی انتقال داده شود. بنابراین برای عملگر میانی خواهیم داشت:

$$e^{+i\hat{p}_y \Lambda_r} e^{+i\hat{p}_x \Lambda_l} e^{-i\Lambda_r \hat{p}_y} e^{-i\Lambda_l \hat{p}_x} = e^{i\hat{\mathbf{M}} - i\hat{\mathbf{W}} - \hat{p}_y [\Lambda_r, \Lambda_l] \hat{p}_x}$$

همچنین از راه و روش مشابه، می‌توان به رابطه دیگری رسید:

$$e^{+i\hat{p}_y \Lambda_r} e^{+i\hat{p}_x \Lambda_l} e^{-i\Lambda_r \hat{p}_y} e^{-i\Lambda_l \hat{p}_x} = e^{i\hat{\mathbf{M}} - i\hat{\mathbf{W}} - \frac{1}{\hbar} \hat{p}_y [\Lambda_r, \Lambda_l] \hat{p}_x + \frac{1}{\hbar} \hat{p}_x [\Lambda_r, \Lambda_l] \hat{p}_y},$$

به این ترتیب نتیجه برابر است با

$$e^{+i\hat{p}_y \Lambda_r} e^{+i\hat{p}_x \Lambda_l} e^{-i\Lambda_r \hat{p}_y} e^{-i\Lambda_l \hat{p}_x} = e^{i\hat{\mathbf{M}} - i\hat{\mathbf{W}} - \frac{1}{\hbar} \hat{p}_i [\Lambda^i, \Lambda^j] \hat{p}_j}$$

که با انتخاب رابطه (Λ)، جمله اول صفر خواهد شد

$$i\hat{\mathbf{M}} - i\hat{\mathbf{W}} = 0,$$

آنگاه رابطه نهایی به شکل معادله

$$e^{+i\hat{p}_y \Lambda_r} e^{+i\hat{p}_x \Lambda_l} e^{-i\Lambda_r \hat{p}_y} e^{-i\Lambda_l \hat{p}_x} = e^{-\frac{1}{\hbar} \hat{p}_i [\Lambda^i, \Lambda^j] \hat{p}_j}, \quad (9)$$

خواهد شد. با در نظر گرفتن ناحیه انتقال که قبلا در نظر گرفته‌ایم، نمایش مکانی عملگر میانی که به صورت رسمی

$$e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{\Omega} dx dy \langle x | \frac{\partial}{\partial x_i} [\Lambda^i, \Lambda^j] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_j} \langle y |$$

است، به صورت

$$e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{\Omega} ds \langle s | \frac{\partial}{\partial s_i} [\Lambda^i, \Lambda^j] \frac{\partial}{\partial s_j} \langle s |}$$

بدون ابهام

علامت اثر از چپ یا راست به واسطه عبور "کت" یا "برا" بوده

است. این عملگر در نهایت برای مورد بدون ابهام به صورت

$$\langle x | e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{\Omega} dz ds \langle z | \frac{\partial}{\partial z_i} [\Lambda^i, \Lambda^j] \delta(\mathbf{z} - \mathbf{s}) \frac{\partial}{\partial s_j} \langle s |} / y \rangle, \quad (10)$$

ساخته و به کار برده می‌شود. با اعمال فرض (Λ)، رابطه ناجابه‌جایی بین Λ -ها به صورت

$$[\Lambda^i, \Lambda^j]_{\Lambda^i = \hat{y}^i, \Lambda^j = -\hat{y}^j} = -\frac{i}{\hbar} \theta^{ij}$$

توابع روی خمینه ناجابه‌جایی پس از انتقال، به صورت رابطه

حدود انتگرال خواهد داد و این تفویض حدود نیز بدون ابهام قابلیت رفت و برگشت دارد. برای راحتی نوشتار می‌گیریم $\hbar = 1$ ، به این ترتیب برای ترکیب انتقال جمعی در هندسه ناجابه‌جایی و با حفظ جمله‌ها تا مرتبه اول از پارامتر انتقال، عملگر انتقال چنین خواهد شد:

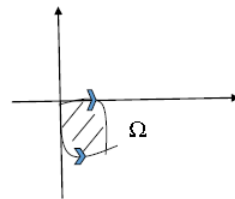
$$\hat{T}_i \hat{T}_j = e^{-i\Lambda_i \hat{p}_i} e^{-i\Lambda_j \hat{p}_j} = e^{-i\Lambda_i \hat{p}_i - i\Lambda_j \hat{p}_j - \frac{1}{\hbar} [\Lambda_i \hat{p}_i, \Lambda_j \hat{p}_j] + \dots}$$

این مقاله، همواره از مراتب بالاتر کمیت‌های کوچک صرف‌نظر می‌کنیم و بدون ذکر صریح، آنرا در مورد همه روابط رعایت خواهیم کرد. در مکانیک کوانتومی و در دیدگاه هایزنبرگ، تبدیل و انتقال توابع در همسایگی مبداء و برای یک جهت خاص به صورت $f(y) = e^{+iy\hat{p}} f(0) e^{-iy\hat{p}}$ داده می‌شود. این رابطه زمانی وقتی اعتبار دارد که عملگر انتقال در دسترس باشد که الزام بر کوچک بودن همسایگی انتقال است. برای سادگی در تکرار نوشتار، عملگرهای جدیدی را تعریف می‌کنیم: $\hat{M} = \hat{p} \cdot \Lambda$ و $\hat{W} = \Lambda \cdot \hat{p}$

نوشت

$$f(y)g(y) = e^{+iy\hat{p}_y} f(0) e^{-iy\hat{p}_y} e^{+iy\hat{p}_y} g(0) e^{-iy\hat{p}_y} = e^{+iy\hat{p}_y} f(0)g(0) e^{-iy\hat{p}_y},$$

عملگر انتقال جهت - خالص را که در رابطه حاصل ضرب و بین دو تابع در هم ضرب شده $g(0)$ و $f(0)$ و در راستای محورهای انتخاب شده (جهت - خالص) قرار دارد عملگر میانی می‌نامیم. در ادامه، این عملگر نقش تعیین کننده‌ای در روند محاسبات ما خواهد داشت. حذف شدن عملگر میانی، معنی بسیار جالبی دارد: حاصل ضرب توابع در همسایگی مبداء، برابر است با انتقال حاصل ضرب آنها در مبداء. بر اساس این نتیجه، به دنبال همسایگی و چگونگی انتقال در حوالی مبداء خواهیم بود. همسایگی و مسیر انتقال جهت - خالص را به صورت



در نظر می‌گیریم. در چارچوب مختصات فرمی، محورهای بالا را در جهت‌های اصلی و ژئودزیک‌ها مثلا x و y (یعنی λ و

صورت $\mathfrak{I}(t) = \int_{all\ space} d^d y / y > \sqrt{-g(y)} < y /,$ بوده و بر

حسب مختصات کامل نوشته می‌شود.

در مرجع [۱۵] و در هندسه معمولی، تکانه عمومی به صورت

$$\langle x / \hat{D}_k / y \rangle = -i \frac{\partial}{\partial x^k} \delta(x, y) - \frac{i}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \ln(-g(x)) \right) \delta(x, y),$$

تعریف شده است که در آن از تعریف

$$\langle x / y \rangle \equiv \delta(x, y) = \frac{\delta(x-y)}{\sqrt{-g(x)}}$$

آخر در هندسه ناجابه‌جایی درست نیست و مورد تردید قرار

می‌گیرد و به عنوان انتگرالده و زیر انتگرال، به شکل قانون

$$\sqrt{-g(\hat{x})} \delta(\hat{x}, \hat{y}) \sqrt{-g(\hat{y})} = \delta(\hat{x} - \hat{y})$$

تصویح می‌شود. اثبات درستی این تصحیح با وارد کردن عملگر واحد

بین دو کمیت و بررسی نتیجه نهایی میسر است:

$$\langle f / g \rangle = \int d\hat{x} \int d\hat{y} \langle f / \bar{x} \rangle \langle \bar{x} / \bar{y} \rangle \langle \bar{y} / h \rangle = \int d\hat{x} \int d\hat{y} f(\hat{x}) \sqrt{-g(\hat{x})} \delta(\hat{x}, \hat{y}) \sqrt{-g(\hat{y})} h(\hat{y}), \quad (12)$$

رابطه (۱۲) به عنوان انتگرالده قابل تعمیم به صورت کلی‌تر

$$A(\hat{x}, \hat{y}) \delta(\hat{y}, \hat{z}) = \delta(\hat{x}, \hat{y}) A(\hat{y}, \hat{z}),$$

قانون اختیار

$$\langle \hat{x} / \hat{A} / \hat{y} \rangle = \int d\hat{z} \delta(\hat{x}, \hat{z}) A(\hat{z}, \hat{y}) = \int d\hat{z} A(\hat{x}, \hat{z}) \delta(\hat{z}, \hat{y}), \quad (13)$$

درستی روابط (۱۲) و (۱۳) به شکل عمومی، فقط به صورت

انتگرالده و زیر انتگرال صحیح است. به این ترتیب قانونی

نزدیک‌تر خواهد بود:

$$\sqrt{-g(\hat{x})} \delta(\hat{x}, \hat{y}) = \delta(\hat{x} - \hat{y}) = \delta(\hat{x}, \hat{y}) \sqrt{-g(\hat{y})}$$

این روابط در بخش بعدی، بسیار کارآمد هستند و حذف

توابع زیر انتگرال را ممکن می‌سازند. در ادامه، لازم به ذکر

است که به سطح کار در این مقاله اشاره کنیم که از مرتبه

حضور ضرایب کریستوفل تا مرتبه اول است بنابراین از تمام

جملات با توان بالاتر ضرایب کریستوفل صرفنظر خواهیم کرد.

این مطلب به جابه‌جاپذیری بودن تمام توابع متریک (همه توابع

متعلق به C^∞ هستند) می‌انجامد؛ چرا که هر مشتق از تابع

متریک به ضرایب کریستوفل می‌انجامد:

$$\langle \hat{f} / \hat{g} \rangle = \langle f / \hat{*} / g \rangle = \langle f / e^{\frac{i}{2} \hat{p}_i \theta^{ij} \hat{p}_j} / g \rangle$$

که نمایش مکانی به صورت زیر دارد:

$$\begin{aligned} & \int dx \langle f / x \rangle \langle x / e^{\frac{i}{2} \int_{\Omega} ds / s > \frac{\partial}{\partial s^i} \theta^{ij} \frac{\partial}{\partial s^j} < s /} / y \rangle \langle y / g \rangle \\ & = \int_{all\ space} dx \langle f(x) / x \rangle \langle \mathfrak{I} + \\ & \frac{i}{2} \int_{\Omega} ds / s > \frac{\partial}{\partial s^i} \theta^{ij} \frac{\partial}{\partial s^j} < s / + \dots / y \rangle \langle g(y) \rangle \quad (11) \\ & = \int_{all\ space} dx \langle f(x) \delta(x-y) \rangle \langle g(y) \rangle + \\ & \frac{i}{2} \int_{\Omega} ds f(x) \delta(x-s) \frac{\partial}{\partial s^i} \theta^{ij} \frac{\partial}{\partial s^j} \delta(s-y) \langle g(y) \rangle + \dots \\ & = f(y) g(y) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y^i} f(y) \right) \theta^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial y^j} g(y) \right) + \dots \end{aligned}$$

در حذف دلتای دیراک در رابطه بالا ابهامی نیست زیرا

کمیت‌های زیر انتگرال، جابه‌جاپذیر شده‌اند.

۳. تعمیم به یک هندسه عمومی

در این بخش عملگر ستاره‌ساز وایل-مویال که در بخش قبل

پیدا کرده‌ایم را به فضا-زمانی غیر از فضا-زمان مینکوفسکی

تعمیم خواهیم داد. برای این منظور، دقت می‌کنیم که زمان در

مکانیک کوانتومی به صورت عملگر ظاهر نمی‌شود و در رابطه

ناجابه‌جایی نیز مشارکت نمی‌کند. دست کم جمله دوم، فرض

اولیه ما در این مقاله است. در دیدگاه چارچوب فرمی، صفحات

فضایی در محل رویداد از فضا-زمان بر ژئودزیک متعامد بوده

و برای این ابر سطح‌ها، زمان ثابت است. پس می‌توانیم همه

کمیت‌ها شامل "کت‌ها"، "براه" و عملگرها و همچنین عملگر

واحد را تابع زمان بدانیم ولی در ابر سطح‌ها آنها را بدون تغییر

بگیریم. جمله بالا به این معنی است که برای یک فضا-زمان

d بعدی، عملگر واحد برابر است با

$$\mathfrak{I}(t) = \int_{all\ space} d^{d-1} \mathbf{y} / \mathbf{y}; t > \sqrt{-g(\mathbf{y}; t)} < \mathbf{y}; t /,$$

در این رابطه و در ادامه در همه روابط، $-g(\mathbf{y})$ دترمینان

متریک است. در ادامه بدون از دست دادن کلیت مسئله،

$|\mathbf{y}; t \rangle$ را به صورت $|y \rangle$ نمایش می‌دهیم. در این موقعیت

می‌پذیریم که کلیه کمیت‌ها و عملگرها به خصوص دیفرانسیل

حجم $d^d y = d^{d-1} y dt \delta(t - \tau)$ ، براساس زمان ابر سطح، τ ،

قابل بازنویسی هستند. به این ترتیب عملگر واحد نیز به

براساس رابطه (۱۶)، اندازه تصحیح برابر است با $\hat{\mathfrak{R}} = -\frac{i}{\gamma} \Gamma_{k\alpha}^\alpha$. زیرا $\langle \bar{\mathbf{x}} / (\hat{p}_k - \frac{i}{\gamma} \Gamma_{k\alpha}^\alpha) = -i \partial_k (\langle \bar{\mathbf{x}} /) < \bar{\mathbf{x}} \rangle$ که به معنی برابری $\hat{D}_k = \hat{p}_k - \frac{i}{\gamma} \Gamma_{k\alpha}^\alpha \mathfrak{I}$ است. هر میتی بودن آن به ظاهر محرز نیست اما این ویژگی در زیر انتگرال مشخص می‌شود:

$$\begin{aligned} \bar{f} u u (\hat{p}_k - \frac{i}{\gamma} \Gamma_{k\alpha}^\alpha) h &\rightarrow -i \bar{f} u u h'_k - \frac{i}{\gamma} \bar{f} u \Gamma_{k\alpha}^\alpha u h \rightarrow \\ \circ (\text{Bound}) + \partial_k (-i f) u u h + (-i f) u \Gamma_{k\alpha}^\alpha u h - \frac{i}{\gamma} \bar{f} u \Gamma_{k\alpha}^\alpha u h \\ &= \overbrace{(-i \partial_k f) u u h} + \overbrace{(-\frac{i}{\gamma} f) u \Gamma_{k\alpha}^\alpha u h}, \end{aligned}$$

که در آن u همان دترمینان متریک است: $u \equiv (-g)^{\frac{1}{2}}$ و منظور از علامت "بار" در بالای توابع، همیوغ مختلط آنها است. بنابراین عملگر کواریانت موثر در فضای دوگان (که می‌توان رابطه نهایی آنرا مانند روش بالا به دست آورد) به صورت $\hat{D}_k^\dagger | \bar{\mathbf{x}} \rangle = -i (| \bar{\mathbf{x}} \rangle) \partial_k$ تکانه در فضای دوگان چنین به دست می‌آید: $\hat{D}_{k, \text{on Duall Space}} = \hat{p}_k - \frac{i}{\gamma} \mathfrak{I} \Gamma_{k\alpha}^\alpha$ با این تعریف سازگار، هنوز عملگر کواریانت زیر انتگرال هر میتی است: به عنوان انتگرالده $\langle \bar{\mathbf{x}} | \hat{\mathbf{D}}^\dagger | \bar{\mathbf{y}} \rangle = \langle \bar{\mathbf{x}} | \hat{\mathbf{D}} | \bar{\mathbf{y}} \rangle$.

این مطلب ممکن است کمی ابهام داشته باشد. برای رفع ابهام و برای اثبات هر میتی بودن آن، کافی است که به این نکته توجه کنیم که عمل مشتق گیری در دو رابطه $\langle \bar{\mathbf{x}} | \hat{\mathbf{D}}, \langle \bar{\mathbf{x}} | \bar{\mathbf{y}} \rangle$ و $\langle \bar{\mathbf{x}} | \hat{\mathbf{D}}^\dagger | \bar{\mathbf{y}} \rangle$ به سمت راست و چپ است. در واقع به صورت مستقیم برابری $\langle \bar{\mathbf{x}} | \hat{\mathbf{D}}^\dagger | \bar{\mathbf{y}} \rangle = +i \delta(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \nabla_y$ و $\langle \bar{\mathbf{x}} | \hat{\mathbf{D}} | \bar{\mathbf{y}} \rangle = -i \nabla_x \delta(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ به خاطر عبور کت و برا از چپ به راست و از راست به چپ صورت می‌گیرد. بنابراین به عنوان رابطه نهایی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}}_{\text{Acts on Right}(H)} &= \hat{\mathbf{p}} - \frac{i}{\gamma} \Gamma \mathfrak{I}, \\ \hat{\mathbf{D}}_{\text{Acts on Left}(H^*)} &= \hat{\mathbf{p}} - \frac{i}{\gamma} \mathfrak{I} \Gamma, \end{aligned} \tag{۱۷}$$

با این دو عملگر، اکنون عملگر انتقال از طرف راست، عمل کننده در فضای هیلبرت و در همسایگی کوچک Ω را بر

$(-g(\hat{y}))^{\frac{1}{2}}_{,\mu} = (-g(\hat{y}))^{\frac{1}{2}}_{,\mu} \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha(\hat{y})$ بنا بر این برای هردو تابع دلخواه اما نرم از متریک، جابه‌جا پذیر بودن بدیهی است:

$$\begin{aligned} f(g(\hat{y})) h(g(\hat{y})) &= f(g(y)) * h(g(y)) = \\ f(g(y)) h(g(y)) &+ \frac{i}{\gamma} (f'_g g_i) (h'_g g_j) + \dots \\ &= f(g(y)) h(g(y)) + \alpha(\Gamma)^\wedge r, \end{aligned} \tag{۱۴}$$

رابطه

$$\begin{aligned} \delta_{,\hat{x}^k}(\hat{x}, \hat{y}) + \delta_{,\hat{y}^k}(\hat{x}, \hat{y}) &= \\ -\frac{1}{\gamma} (\Gamma_k(\hat{x}) \delta(\hat{x}, \hat{y}) + \delta(\hat{x}, \hat{y}) \Gamma_k(\hat{y})), \end{aligned}$$

معادله دیگری است که می‌توان درستی آن را به صورت مستقیم نشان داد. با اعمال قانون تعویض برابری (۱۳)، نتیجه رابطه آخر معادل است با

$$\delta(\hat{x}, \hat{y}) \Gamma(\hat{y}) = \Gamma(\hat{x}) \delta(\hat{x}, \hat{y}),$$

اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم عملگر انتقال در هندسه عمومی را پیشنهاد دهیم. مولد این عملگر را تکانه کواریانت $\hat{\mathbf{D}}$ می‌نامیم. از آنجا که در هندسه مینکوفسکی، برابری $\langle \mathbf{x} | \hat{\mathbf{p}} | \mathbf{y} \rangle = -i \hat{\nabla} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x} | \hat{\mathbf{p}}^\dagger | \mathbf{y} \rangle$ (البته مشتق گیری نسبت به متغیر x خواهد بود، ∇_x) برقرار است، با تعریف پایه جدید $\langle \bar{\mathbf{x}} / = \langle \mathbf{x} / (-g)^{\frac{1}{2}}$ و Γ_k به عنوان مشتق متریک، تقاضا می‌کنیم که عملگر کواریانت در رابطه زیر

$$\langle \bar{\mathbf{x}} | \hat{\mathbf{D}} | \bar{\mathbf{y}} \rangle = \langle \bar{\mathbf{x}} | \hat{\mathbf{D}}^\dagger | \bar{\mathbf{y}} \rangle \equiv -i \hat{\nabla}_x \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{۱۵}$$

صدق کند. برای به دست آوردن شرط برقراری رابطه (۱۵)، عملگر کواریانت را بر حسب عملگر فضا- زمان مینکوفسکی بازنویسی می‌کنیم، $\hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{p}} + \mathfrak{R}$ برای تعیین $\hat{\mathfrak{R}}$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{x}} | \hat{\mathbf{p}} = (-g)^{\frac{1}{2}} \langle \mathbf{x} | \hat{\mathbf{p}} = \\ (-g)^{\frac{1}{2}} (-i \nabla) \langle \mathbf{x} / = -i \nabla (\langle \bar{\mathbf{x}} /) + i (\nabla (-g)^{\frac{1}{2}}) \langle \mathbf{x} /, \end{aligned}$$

اما $\partial_k (-g)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\gamma} (-g)^{\frac{1}{2}} \Gamma_{k\alpha}^\alpha$ بنا بر این

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{x}} | \hat{p}_k = -i \partial_k (\langle \bar{\mathbf{x}} /) + i \frac{1}{\gamma} (-g)^{\frac{1}{2}} \Gamma_{k\alpha}^\alpha \langle \mathbf{x} / = \\ -i \partial_k (\langle \bar{\mathbf{x}} /) + i \frac{1}{\gamma} \Gamma_{k\alpha}^\alpha \langle \bar{\mathbf{x}} /, \end{aligned} \tag{۱۶}$$

و آنگاه رابطه نهایی به شکل

$$e^{+i\hat{D}_y\Lambda_r} e^{+i\hat{D}_x\Lambda_l} e^{-i\Lambda_r\hat{D}_y} e^{-i\Lambda_l\hat{D}_x} = e^{-\frac{1}{r}[\hat{D}_i\Lambda^i, \Lambda^j\hat{D}_j]} \quad (۱۹)$$

در می‌آید. برای ساده‌سازی این رابطه، فرض می‌کنیم که بتوان رابطه‌توانی را به صورت خلاصه در دو جمله نوشت: $[\hat{D}_j\Lambda^j, \Lambda^i\hat{D}_i] = A + B$ ، در ادامه با حذف شدن چهار جمله درون A و B ، مقادیر باقیمانده چنین خواهند بود:

$$A = i\hat{D}_i\theta^{ij}\hat{D}_j, \\ B = \frac{1}{r}(\Gamma_{j,i} - \Gamma_{i,j})[\Lambda^i, \Lambda^j]_{\Lambda^i=y^i, \Lambda^j=y^j} = \frac{i\theta^{ij}}{r}(\Gamma_{j,i} - \Gamma_{i,j}),$$

بر حسب این نتایج، نمایش مکانی عملگر رابطه (۱۹) را می‌توان با وارد کردن عملگر واحد به دست آورد. با در نظر گرفتن ناحیه انتقال که در بخش نخست فرض کردیم و نتیجه بدون ابهام بالا، نمایش مکانی چنین به دست می‌آید:

$$e^{+\frac{i}{r}\int_{\Omega} ds\bar{s} > \{ (+i\frac{\partial}{\partial s^i})\theta^{ij} (-i\frac{\partial}{\partial s^j}) + \frac{\theta^{ij}}{r}(\Gamma_{j,i} - \Gamma_{i,j}) \} < \bar{s} /} \quad (۲۰)$$

رابطه آخر همچنین به صورت

$$e^{+\frac{i}{r}\int_{\Omega} dz ds / z > \frac{\partial}{\partial z_i} [\hat{y}^i, \hat{y}^j] \delta(\mathbf{z}-\mathbf{s}) \frac{\partial}{\partial s_j} < s /} / y >$$

نیز قابل استفاده است. با قرار دادن نمایش مکانی عملگر میانی، ضرب بین دو تابع دارای رابطه‌ای به صورت

$$(۲۱)$$

$$\int_{all\ space} dx < f | \bar{x} > < \bar{x} / e^{i\int_{\Omega} ds\bar{s} > \{ (+i\frac{\partial}{\partial s^i})\theta^{ij} (-i\frac{\partial}{\partial s^j}) + \frac{\theta^{ij}}{r}(\Gamma_{j,i} - \Gamma_{i,j}) \} < \bar{s} /} / \bar{y} > < \bar{y} / h > \\ = \int_{all\ space} dx (f(\bar{x}) < \bar{x} / \mathfrak{I} + \\ \frac{i}{r} \int_{\Omega} ds\bar{s} > \{ (+i\frac{\partial}{\partial s^i})\theta^{ij} (-i\frac{\partial}{\partial s^j}) + \\ \frac{\theta^{ij}}{r}(\Gamma_{j,i} - \Gamma_{i,j}) \} < \bar{s} / \dots \} > h(\bar{y})) \\ = \int_{all\ space} dx (f(x) \delta(x,y) h(y) + \\ \frac{i}{r} \int_{\Omega} ds f(\bar{x}) \delta(x-s) \{ (\frac{\partial}{\partial s^i})\theta^{ij} (\frac{\partial}{\partial s^j}) + \\ \frac{\theta^{ij}}{r}(\Gamma_{j,i} - \Gamma_{i,j}) \} \delta(s-y) h(\bar{y}) + \dots),$$

است؛ چرا که از رابطه (۲۰) و برای زیر انتگرال داریم

حسب تکانه کواریانت پیشنهاد می‌دهیم: $\hat{T}_i(\Omega) = e^{-i\Lambda_i\hat{D}_i}$ به همین روش، عملگر انتقال از طرف چپ، عمل کننده در فضای دوگان هیلبرت و در همسایگی کوچک Ω و بر حسب تکانه کواریانت چنین خواهد بود: $\hat{T}_i(\Omega) = e^{-i\hat{D}_i\Lambda_i}$ با استراتژی بخش قبلی، عملگر میانی به صورت

$$e^{+i\hat{D}_y\Lambda_r} e^{+i\hat{D}_x\Lambda_l} e^{-i\Lambda_r\hat{D}_y} e^{-i\Lambda_l\hat{D}_x} = e^{i\hat{M}-\frac{1}{r}[\hat{D}_y\Lambda_r, \hat{D}_x\Lambda_l]} e^{-i\hat{W}-\frac{1}{r}[\Lambda_r\hat{D}_y, \Lambda_l\hat{D}_x]} = e^{i\hat{M}-i\hat{W}-\frac{1}{r}[\Lambda_r\hat{D}_y, \Lambda_l\hat{D}_x] - \frac{1}{r}[\hat{D}_y\Lambda_r, \hat{D}_x\Lambda_l] + \frac{1}{r}[\hat{M}, \hat{W}]} \quad (۱۸)$$

خواهد شد. که مقادیر \hat{M} و \hat{W} به صورت $\hat{M} = i\hat{D}\cdot\Lambda$ و $\hat{W} = i\Lambda\cdot\hat{D}$ هستند. اما،

$$[\Lambda_r, \hat{D}_y] = i\Lambda_{r,r} + \frac{\theta^{ij}}{r}\Gamma_{r,i}\Lambda_{r,j}$$

و

$$[\Lambda_l, \hat{D}_x] = i\Lambda_{l,l} + \frac{\theta^{ij}}{r}\Gamma_{l,i}\Lambda_{l,j}$$

که اساساً هر دو نرده ای هستند و سهم حضور آنها در جابه‌جاگر به نتیجه صفر می‌انجامد. همچنین است نتیجه جابه‌جاگر قسمت $[\hat{M}, \hat{W}]$. پس برای رابطه (۱۸) خواهیم داشت

$$e^{+i\hat{D}_y\Lambda_r} e^{+i\hat{D}_x\Lambda_l} e^{-i\Lambda_r\hat{D}_y} e^{-i\Lambda_l\hat{D}_x} = e^{i\hat{M}-i\hat{W}-[\hat{D}_y\Lambda_r, \Lambda_l\hat{D}_x]},$$

همچنین،

$$[\hat{D}_y\Lambda_r, \Lambda_l\hat{D}_x] = \hat{p}_y[\Lambda_r, \Lambda_l]\hat{p}_x - \frac{i}{r}[\hat{p}_y\Lambda_r, \Lambda_l\Gamma_l] - \frac{i}{r}[\Gamma_r\Lambda_r, \Lambda_l\hat{p}_x]$$

و از راه مشابه، نتیجه دیگری به صورت رابطه

$$e^{i\hat{M}-i\hat{W}+\frac{1}{r}[\hat{D}_x\Lambda_l, \Lambda_r\hat{D}_y] - \frac{1}{r}[\hat{D}_y\Lambda_r, \hat{D}_x\Lambda_l] + \frac{1}{r}[\hat{D}_y\Lambda_r, \Lambda_l\hat{D}_x] - \frac{1}{r}[\Lambda_r\hat{D}_y, \Lambda_l\hat{D}_x]} = e^{i\hat{M}-i\hat{W}+[\hat{D}_x\Lambda_l, \Lambda_r\hat{D}_y]},$$

به دست می‌آید. جمع‌بندی جمله‌های پاراگراف بالا در خصوص عملگر میانی، برابر است با

$$e^{+i\hat{D}_y\Lambda_r} e^{+i\hat{D}_x\Lambda_l} e^{-i\Lambda_r\hat{D}_y} e^{-i\Lambda_l\hat{D}_x} = e^{i\hat{M}-i\hat{W}-\frac{1}{r}[\hat{D}_i\Lambda^i, \Lambda^j\hat{D}_j]}$$

که با انتخاب رابطه (۸)، مقدار جمله اول صفر خواهد

$$i\hat{M} - i\hat{W} = 0,$$

$$\hat{y}^i * \hat{y}^j = y^i y^j + i \frac{\theta^{ij}}{\gamma} + i \frac{\theta^{ik}}{\gamma} R^l{}_{klm} y^m y^j + i \frac{\theta^{kj}}{\gamma} R^l{}_{klm} y^i y^m, \quad (24)$$

که بیانگر حضور تانسور خمش ریمان فضا در رابطه جابه‌جاگر مختصات است.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله، از تقریب مختصات فرمی برای هم‌ریختی موضعی بین هندسه شبه‌ریمانی با هندسه مینکوفسکی در سطح مختصات جابه‌جایی استفاده کرده‌ایم. این مطلب نتایج این مقاله را تحت الشعاع قرار می‌دهد مگر این که بپذیریم ناجابه‌جایی هندسی به عنوان یک اختلال در نظریه نسبیت و جهت سازگاری با ایده این مقاله روی عناصر متریک تا مرتبه اول - مانند ضرایب کریستوفل - بی‌تاثیر است و ما این مطلب را در متن مقاله نشان داده‌ایم. همچنین در سطح مکانیک کوانتومی، نشان دادیم که عملگر انتقال در هندسه ناجابه‌جایی، وابسته به انتخاب مسیر بوده و عملگری مسیر مرتب است. با تکیه بر عملگر انتقال مسیر مرتب و برای یک مسیر انتخابی در هندسه مینکوفسکی منتهی به یک همسایگی بی‌نهایت کوچک، عملگر ستاره‌ساز را ساختیم و نشان دادیم که در نمایش مکان، توانایی تولید جمله‌های نگاشت وایل - موپال را دارد. سپس، با تعریف ورود عملگر تکانه هریمیتی و عناصر وابسته به متریک هندسه، همه روند بخش یک را به هندسه عمومی‌تر گسترش دادیم. با استناد به همین عملگر ستاره‌ساز بخش یک، به عنوان عملگر میانی در انتقال توابع در تصویر هایزنبرگ، عملگر ستاره‌ساز هندسه عمومی را پیشنهاد دادیم. سپس با وارد کردن عملگر واحد حجم ناوردا، توانستیم تحت نمایش مکانی، عملگر به دست آمده را در خصوص مختصات خالص، به عنوان دو تابع مورد نظر، اعمال کنیم و از نتیجه آن تعمیم ناجابه‌جایی هندسه مینکوفسکی به هندسه عمومی‌تر را گزارش دهیم. همچنین برای زمانی که تانسور خمش ریمان هندسه مورد نظر غیر صفر باشد، نتیجه به دست آمده از تعمیم ناجابه‌جایی را با کمک مولفه‌های تانسور خمش ریمان گسترش دادیم.

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) \sqrt{-g(x)} \delta(x-s) \left(\frac{\partial}{\partial s^i} \right) &= \bar{f}(x) \sqrt{-g(x)} \left(\frac{\partial}{\partial s^i} \delta(x-s) \right) \\ &= \bar{f}(x) \sqrt{-g(x)} \left(-\frac{\partial}{\partial x^i} \delta(x-s) \right) \\ &= \bar{f}_{,i}(x) \sqrt{-g(x)} \delta(x-s) + \\ &= \frac{1}{\gamma} \bar{f}(x) \sqrt{-g(x)} \Gamma_{,i}(s) \delta(x-s), \end{aligned}$$

پس رابطه (۲۱) را می‌توان چنین نوشت

$$\begin{aligned} \langle f / \hat{*} / h \rangle &= \int_{all\ space} dx (\bar{f}(x) \delta(x,y) h(y)) \\ &+ \frac{i}{\gamma} \int_{all\ space} dx [\Omega ds \{ \bar{f}_{,i}(x) (\sqrt{-g(x)} \delta(x-s) + \\ &\frac{1}{\gamma} \bar{f}(x) \sqrt{-g(x)} \Gamma_{,i}(x) \delta(x-s)) \} \times \\ &\times \theta^{ij} \times \\ &(\frac{1}{\gamma} \delta(s-y) \Gamma_{,j}(y) \sqrt{-g(y)} h(y) + \\ &\delta(s-y) \sqrt{-g(y)} h_{,j}(y)) \\ &+ \frac{\theta^{ij}}{\gamma} (\Gamma_{,j,i} - \Gamma_{,i,j}) \bar{f}(x) \delta(x,s) \delta(s,y) h(y) + \dots] \\ &= \bar{f}(y) h(y) + \frac{i \theta^{ij}}{\gamma} \bar{f}_{,i}(y) h_{,j}(y) + \\ &\frac{i \theta^{ij}}{\gamma} \bar{f}_{,i}(y) \Gamma_{,j}(y) h(y) \\ &+ \frac{i \theta^{ij}}{\gamma} \bar{f}(y) \Gamma_{,i}(y) h_{,j}(y) + \dots + (\Gamma)^j + \\ &\frac{i \theta^{ij}}{\gamma} (\Gamma_{,j,i} - \Gamma_{,i,j}) \bar{f}(y) h(y) \dots, \quad (22) \end{aligned}$$

اگر رابطه (۲۲) را به ازاء $\hat{f}(\hat{y}) = \hat{y}^l$, $\hat{h}(\hat{y}) = \hat{y}^j$ ، جابه‌جاگری (۲) به کار ببریم و از تعریف $\Gamma_k^l \equiv \hat{\Gamma}_{kl}^l(\hat{y})$ استفاده کنیم، می‌رسیم به

$$\hat{y}^i * \hat{y}^j = y^i y^j + i \frac{\theta^{ij}}{\gamma} + \frac{i}{\gamma} \theta^{ik} \Gamma_{kl}^l y^j + \frac{i}{\gamma} \theta^{kj} y^i \Gamma_{lk}^l, \quad (23)$$

رابطه (۲۳) بیانگر حضور ساختار هندسی فضا تا مرتبه اول از ضرایب کریستوفل در جابه‌جاگر مختصات است. ضرب داخلی بین دو تابع مختصات ناجابه‌جایی توسط رابطه (۲۲) داده می‌شود. اگر فضا - زمان مورد مطالعه خمش ریمان غیر صفر داشته باشد، در این صورت $\Gamma_{kl}^l(y) = \frac{1}{\gamma} R_{kl}^l y^m$ خواهد بود. بنابراین رابطه (۲۳) به صورت زیر نهایی می‌شود:

سپاس‌گزاری

نویسنده از دانشگاه شهرکرد جهت حمایت مالی و معنوی از این مقاله تشکر و قدردانی می‌کند.

مراجع

12. C W Misner, et al., "Gravitation" San Francisco: Freeman Publishing Company, (1973), and A Nestrov, *Class. Qua. Grav*, **16** (1999) 465.
13. J Weber, "General Relativity and Gravitational Waves", Dover (2004), (New York: Interscience Publisher Inc., 1961 and M. Maggiore," *Gravitational Waves*", New York: Oxford University Press Inc. (2008).
14. R D'inverno, "Introducing Einstein's Relativity", New York: Oxford University Press Inc. (1993).
15. B s. DeWitt, *Rev. Mod. Phys.* **29** (1957) 377.
16. H Kleinert, "Gauge Fields in Condensed Matter", Singapore: World Scientific Publisher Company, Inc., (1987).
1. P Aschieri, et al," *Non-commutative Spacetimes: Symmetries in Non-commutative Geometry and Field Theory*", Berlin Heidelberg: Springer, (2009).
2. Connes, M. Marcolli, "Non-commutative Geometry, Quantum Fields and Motives", London: Academic Press, (1994).
3. N Seiberg and E Witten, *JHEP* **9909** (1999) 032
4. D J Gross and N A Nekrasov, *JHEP* 044 (2001)
5. R J Szabo, *Phys. Rep.* **378** (2003) 207.
6. Fischer, R J Szabo, *JHEP* **0902** (2009) 031
7. M Chaichian, et al, *Eur. Phys. J. C* **29** (2003) 413.
8. M M Sheikh-Jabbari, *JHEP* **9906** (1999) 015.
9. Bertolami, C A D Zarro, *Phys. Let. B* **673** (2009) 83.
10. A Jafari, *Eur. Phys. J. C* **73** (2013) 2271
11. L Parker, *Phys. Rev. Let.* **44** (1980) 1559 and *Phys. Rev. D* **22** (1980) 1922.