مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۲۲، شمارهٔ ۱، بهار ۱۴۰۱
DOI: 10.47176/ijpr.22.1.21162

معادلات پایستگی تکانه-انرژی در شارهٔ نسبیتی و غیر نسبیتی دارای سه ساز و کار انتقال انرژی و تکانه

محبوبه معین مقدس

دانشکده علوم پایه، دانشگاه کوثر بجنورد، بجنورد

پست الکترونیکی: dr.moeen@kub.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۹/۱۴ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۴۰۰/۳/۳۰)

چکیده

در این مقاله معادلات پایستگی تکانه-انرژی برای یک شارهٔ نسبیتی در فضا-زمان تخت را به دست می‌آوریم. در انتقال تکانه و انرژی سه ساز و کار شارهٔ کامل، وشکسانی و انتقال گرما در نظر گرفته می‌شود از اثر میدان مغناطیسی دراین مقاله صرفنظر می‌شود. همچنین ارتباط معادلات نسبیتی و غیر نسبیتی در این مقاله دیده می‌شود، پس با توجه به اثراتی که در معادلات نسبیتی وجود دارد اما در معادلات غیر نسبیتی دیده نمی‌شود، می‌توان معادلات غیر نسبیتی را اصلاح کرد. روش استفاده شده در این مقاله برای به دست آوردن معادلات پایستگی و اتصال معادلات پایستگی غیر نسبیتی قابل استفاده برای انواع ساز و کارهای انتقال انرژی و تکانه و نیز قابل اجرا برای تمام متریک‌ها است.

واژه‌های کلیدی: معادلات پایستگی شاره نسبیتی، ارتباط معادلات نسبیتی و غیر نسبتی، تاثیر انتقال گرما در معادلات

۱. مقدمه

در بسیاری از مطالعات، شاره‌هایی با سرعت بالا و نسبیتی بررسی می‌شود از جمله در بررسی شاره‌های اختر فیزیکی، کیهان شناسی و در برخوردهای هسته‌ای و ... از روابط مربوط به شاره‌های نسبیتی استفاده می‌کنیم. در بررسی این شاره‌ها با توجه به ساز و کارهای تولید و انتقال انرژی و تکانه، تانسور تکانه- انرژی را تعریف می‌کنیم و همچنین معادلات پایستگی انرژی- تکانه را به دست می‌آوریم. حل این معادلات نحوهٔ تغییر کمیت‌های مختلف شاره، دینامیک شاره و ترمودینامیک آن را مشخص می‌کند.

در بسیاری از مقالات اختر فیزیکی، فیزیک هسته‌ای و ... ساز و کارهای تولید و توزیع انرژی و تکانه شامل انرژی- تکانهٔ ناشی از انرژی جنبشی و فشار (شارهٔ کامل)، انرژی- تکانهٔ ناشی از وشکسانی و انرژی- تکانهٔ ناشی از انتقال گرما است (به طور مثال در [۱-۵]).

در مقالهٔ [۳] دینامیک شارهٔ غیر آرمانی شامل وشکسانی و

انتقال حرارت بر اساس نردهای‌های دستگاه ساکن برای حالت‌های خاص با تقارن استوانه‌ای به دست آمده است و نشان داده شده است که وشکسانی می‌تواند باعث ایجاد فشار شعاعی شود (البته با در نظر گرفتن مؤلفه‌های خاص سرعت). در مقالهٔ [۶] نیز نردهای‌ها برای متریک استوانه‌ای غیر چرخان به صورت تابعی از t و r فرض شده است و معادلات پایستگی برای حالت استاتیک و برای شارهٔ کامل و شاره با مؤلفه‌های خاص میدان الکتریکی و یا مغناطیسی محاسبه شده است.

روابط تانسور انرژی- تکانهٔ شارهٔ نسبیتی با سه ساز و کار انتقال انرژی و تکانهٔ شارهٔ کامل، وشکسانی و انتقال حرارت در مقالات [۷–۸] در دستگاه‌های مختصات دکارتی، استوانه‌ای و کروی به دست آمده است. در این مقاله، شاره‌ای با این سه ساز و کار در نظر گرفته می‌شود و از میدان مغناطیسی در شاره چشمپوشی شده است. بنابراین، معادلات پایستگی شاره برای هر کدام از ساز و کارها و شاره‌ای شامل این سه ساز و کار محاسبه شده است. همچنین در این مقاله محاسبات در مقیاس‌بندی هم بعد انجام می‌شود. در این مقیاس‌بندی تمام مؤلفه‌های یک کمیت بعد یکسان دارند و تأثیر سرعت نور در روابط دیده می‌شود.

در برخی بررسی‌های اختر فیزیکی، برخورد ذرات سنگین هسته‌ای و ... که سرعت‌ها نسبت به سرعت نور، کوچک هستند، تانسور انرژی- تکانه و معادلات پایستگی تکانه- انرژی اهمیت زیادی دارد. از نظر فیزیکی انتظار می‌رود که معادلات غیر نسبیتی پایستگی تکانه-انرژی به عنوان حد معادلات نسبیتی قابل محاسبه باشند. در این مقاله با استفاده از معادلات پایستگی تکانه-انرژی نسبیتی، معادلات پایستگی تکانه-انرژی غیر نسبیتی را به دست می‌آوریم. این روش به ما کمک می‌کند تا تأثیر نسبیتی بودن شاره دیده شود. همچنین در مواقعی که بخواهیم شاره‌ای را که سرعت بالا دارد اصلاح کنیم تأثیر جملات مهم‌تر را به عنوان جملات اصلاحی می‌توانیم وارد کنیم.

بخش‌های این مقاله به این ترتیب است. در بخش ۲ متریک و مقیاس‌بندی معرفی می‌شود. تانسور انرژی- تکانه و رابطهٔ آن در بخش ۳ آمده است. در بخش ۴ معادلات پایستگی انرژی- تکانه در حالت کلی به دست آورده می‌شود. عامل لورنتس و چهار بردار سرعت در متریک تخت و دستگاه مختصات استوانه‌ای در بخش ۵ است. در بخش ۶ معادلات پایستگی تکانه- انرژی‌تکانه در متریک تخت و دستگاه مختصات استوانه‌ای به دست می‌آید. معادلات پایستگی غیر نسبیتی به عنوان حد معادلات پایستگی نسبیتی در بخش ۷ به دست می‌آید. معادلات پایستگی شارهٔ آرمانی (کامل) با اعمال پایستگی جرم در بخش ۸ است. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری در بخش ۹ است.

۲. متریک و مقیاس‌بندی هم بعد

در بسیاری از بررسی‌های شاره‌های نسبیتی، مقیاس‌بندی رایجی مورد استفاده قرار می‌گیرد که در آن $M=G=c=1$ ([۱، ۴ و ۵]) که G، c و M به ترتیب سرعت نور، ثابت گرانش و جرم جسم مرکزی هستند. در این مقیاس‌بندی تمام کمیت‌ها بدون بعد هستند. اما مقایسهٔ کمیت‌ها به خصوص سرعت‌ها با سرعت نور در این مقیاس‌بندی امکان‌پذیر نیست. مشابه مقالهٔ [۸] ما از یک مقیاس‌بندی جدید استفاده می‌کنیم که مقیاس‌بندی هم بعد است که به اختصار IDS نامیده می‌شود. در دستگاه مختصات کروی و استوانه‌ای، مؤلفه‌های مختلف یک تانسور بعد متفاوتی دارند، اما در این مقیاس‌بندی تمام مؤلفه‌های مختلف یک تانسور هم بعد هستند. به علاوه تأثیر سرعت نور در جملات مختلف تانسورها دیده می‌شود، لذا مقایسهٔ مؤلفه‌ها با یکدیگر و مشاهدهٔ اهمیت آنها امکان‌پذیر است.

در این مقاله شاره‌ای را بررسی می‌کنیم که تحت تأثیر گرانش یک منبع بسیار پر جرم نباشد، همچنین میدان مغناطیسی در آن قابل چشم پوشی است. چنین متریک‌هایی برای بررسی برخوردهای هسته‌ای، قرص‌های اطراف ستاره‌های جوان و در فواصل دور از سیاه‌چاله برای قرص‌های اطراف سیاه‌چاله، ستاره‌های نوترونی و .. می‌تواند به کار برده شود. بنابراین

متریک این شاره‌ها، متریک تخت یا فضا- زمان مینکوفسکی خواهد بود. با توجه به تقارن استوایی که در برخی بررسی‌ها وجود دارد متریک و دیگر محاسبات در دستگاه مختصات استوانه‌ای انجام می‌شود.، همچنین با تبدیلات دستگاه‌های مختصات، این محاسبات قابل تسری به دستگاه‌های مختصات دیگر است.

۲. ۱. متریک در دستگاه مختصات استوانه‌ای

در دستگاه مختصات استوانه‌ای، فضا-زمان تخت یا متریک مینکوفسکی عبارت است از:

$$ds^2 = -cd\tau^2 = -cdt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2, \qquad (۱)$$

که τ زمان ویژه و r, θ, z و t متغییرهای دستگاه مختصات استوانه‌ای هستند. بنابراین مؤلفه‌های متریک $g_{\mu\nu}$ و معکوس آن $g^{\mu\nu}$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای هم بعد نیستند. پس از مقیاس‌بندی "هم بعد" استفاده می‌کنیم که در این مقیاس‌بندی یک ثابت اختیاری l، مورد استفاده می‌گیرد. ثابت فوق در هر مسئله، با توجه به شرایط آن قابل تعریف است و می‌توان آن را واحد نیز فرض کرد ($l=1$). با قرار دادن $\psi = l\theta$ و $\chi = x^0 = ct$ متریک به شکل زیر تغییر می‌کند [۸]:

$$ds^2 = -d\chi^2 + dr^2 + R^2 d\psi^2 + dz^2, \qquad (۲)$$

که $R = \frac{r}{l}$ متغییر بدون بعد است و l یک ثابت اختیاری با بعد طول است. همچنین $\psi = l\theta$ بعد طول دارد.، بنابراین تمام مؤلفه‌های متریک و معکوس آن در مقیاس‌بندی هم بعد مشابه مقیاس‌بندی $M = G = c = 1$، بدون بعد هستند و عبارت است از:

$$\begin{aligned} &g_{00} = -1, g_{rr} = 1, g_{\psi\psi} = R^2, g_{zz} = 1, \\ &g^{00} = -1, g^{rr} = 1, g^{\psi\psi} = \frac{1}{R^2}, g^{zz} = 1, \end{aligned} \qquad (۳)$$

۳. تانسور انرژی-تکانهٔ نسبیتی

تأثیر ساز و کارهای مختلف در تولید و توزیع انرژی در تانسور انرژی- تکانه دیده می‌شود. در این مقاله یک شارهٔ غیر آرمانی دارای وشکسانی و انتقال حرارت را بررسی می‌کنیم که میدان مغناطیسی آن کوچک و قابل اغماض باشد. لذا برای انتقال انرژی و تکانه در شارهٔ نسبیتی سه ساز و کار انرژی- تکانهٔ شارهٔ کامل، تنش- وشکسانی و انتقال حرارت را در نظر می‌گیریم. بنابراین تانسور تکانه- انرژی شامل ۳ عنصر مربوط به شارهٔ کامل، وشکسانی و انتقال حرارت است. در نتیجه داریم [۹]:

$$T^{\mu\nu} = T_{Pf}{}^{\mu\nu} + T_{vis}{}^{\mu\nu} + T_{heat}{}^{\mu\nu}, \qquad (۴)$$

که $T_{Pf}{}^{\mu\nu}$، $T_{vis}{}^{\mu\nu}$ و $T_{heat}{}^{\mu\nu}$ به ترتیب تانسورهای انرژی- تکانهٔ مرتبط با شارهٔ کامل، تنش- وشکسانی و انتقال گرما هستند.

۳. ۱. تانسور انرژی- تکانهٔ نسبیتی شارهٔ کامل

تانسور انرژی- تکانه برای یک شارهٔ کامل عبارت است از:

$$T_{Pf}{}^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}, \qquad (۵)$$

که p فشار کل شاره است، بنابراین در یک شارهٔ کامل انرژی و تکانه از انرژی جنبشی ذرات و فشار ناشی می‌شود.

۳. ۲. تانسور انرژی-تکانهٔ نسبیتی تنش-وشکسانی

در شارهٔ نسبیتی، عنصر تانسور تنش-وشکسانی شامل دو نوع وشکسانی کپه‌ای ($B^{\mu\nu}$) و لغزشی ($S^{\mu\nu}$) است که عبارت است از:

$$T_{vis}{}^{\mu\nu} = t^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} + B^{\mu\nu}, \qquad (۶)$$

که وشکسانی کپه‌ای $B^{\mu\nu}$ و لغزشی $S^{\mu\nu}$ با روابط زیر بیان می‌شوند:

$$B^{\mu\nu} = -\varsigma b^{\mu\nu}, S^{\mu\nu} = -2\lambda\sigma^{\mu\nu}, \qquad (۷)$$

در رابطهٔ بالا $\lambda = \rho\nu$ ضریب وشکسانی دینامیکی (ν ضریب وشکسانی است) و ς ضریب وشکسانی کپه‌ای است. $\sigma^{\mu\nu}$ و $b^{\mu\nu}$ به ترتیب تانسورهای وشکسانی لغزشی و کپه‌ای هستند و بر اساس متریک، مؤلفه‌های سرعت به صورت زیر به دست می‌آیند [۱۰]:

$$\sigma^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha\beta} = \frac{g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}}{2}(u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha}) +$$

$$\frac{1}{2c^{2}}(a^{\mu}u^{\nu}+a^{\nu}u^{\mu})-\frac{1}{3}\Theta h^{\mu\nu},$$
$$b^{\mu\nu}=\Theta h^{\mu\nu},$$
(۸)

$\sigma_{\mu\nu}$ آهنگ لغزش است که از [۱۰] قرار داده شده است. به علاوه $h^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}+u^{\mu}u^{\nu}$ تانسور تصویر، $\Theta=u^{\mu}{}_{;\mu}$ گسترش جهان‌خط و $a^{\mu}=u^{\mu}{}_{;\nu}u^{\nu}$ چهار بردار شتاب هستند.

۳. ۳. تانسور انرژی-تکانهٔ نسبیتی انتقال حرارت

تانسور انرژی- تکانه برای انتقال گرما نسبیتی عبارت است از [۱۱ و ۱۲]:

$$T^{\mu\nu}_{heat}=\frac{1}{c^{2}}(q^{\mu}u^{\nu}+q^{\nu}u^{\mu}),\qquad (۹)$$

که q^{μ} آهنگ انتقال گرما است و با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$q^{\mu}=-\kappa h^{\mu\nu}\left(\frac{\partial T}{\partial x^{\nu}}+\frac{Ta_{\nu}}{c^{2}}\right),\qquad (۱۰)$$

که T دمای شاره و κ ضریب انتقال گرمایی است.

۴. معادلات پایستگی انرژی- تکانه

معادلات پایستگی شارهٔ نسبیتی، شامل معادلهٔ پایستگی جرم و معادلهٔ پایستگی تکانه- انرژی است و عبارت است از [۱۳]:

$$\rho u^{\mu}{}_{;\mu}=0, T^{\mu\nu}_{;\mu}=0,\qquad (۱۱)$$

که ρ چگالی جرم سکون، u^{μ} چهار بردار سرعت و $T^{\mu\nu}$ تانسور تکانه- انرژی است. همچنین ";" نشان دهنده مشتق کوارینت است.

در این قسمت از روابط (۵) تا (۱۰) برای به دست آوردن معادلات پایستگی انرژی- تکانهٔ نسبیتی استفاده می‌شود. برای این محاسبه فرض می‌کنیم که مشتق کوارینت از یک مشتق یا مشتق کوارینت قابل چشم پوشی کردن باشند. همچنین می‌دانیم که $g^{\mu\alpha}_{;\nu}=0$. بنابراین می‌توان بخش‌های مختلف معادلهٔ پایستگی را به دست آورد. محاسبات انجام شده در این بخش مستقل از دستگاه مختصات است و در صورت نیاز برای هر دستگاه مختصات با توجه به نیاز مسئله، قابل بازنویسی است.

۴. ۱. معادلهٔ پایستگی تکانه- انرژی مربوط به شارهٔ کامل

معادلات شارهٔ آرمانی (شارهٔ کامل) در مقیاس‌بندی در برخی کتب و مقالات به دست آمده است [۷ و ۱۴]. بنابراین از معادلهٔ (۷) مشتق کوارینت می‌گیریم و در نهایت داریم:

$$T_{Pf;\nu}{}^{\mu\nu}=\rho_{,\nu}u^{\mu}u^{\nu}+\rho u^{\mu}\Theta u^{\mu}+\rho a^{\mu}+p_{,\nu}g^{\mu\nu},\qquad (۱۲)$$

۴. ۲. معادلهٔ پایستگی تکانه- انرژی مربوط به وشکسانی

با محاسبهٔ مشتق کوارینت تانسور انرژی- تکانهٔ مربوط به پدیدهٔ وشکسانی از رابطه‌های (۷) تا (۹) و بعد از مقداری محاسبه داریم:

$$\begin{aligned}T_{vis;\nu}{}^{\mu\nu}&=(S^{\mu\nu}+B^{\mu\nu})_{;\nu}=\\&-\frac{1}{c^{2}}[\lambda a^{\nu}u^{\mu}_{;\nu}+(\varsigma-\frac{2\lambda}{3})u^{\mu}\Theta^{2}+(\varsigma+\frac{\lambda}{3})a^{\mu}\Theta]-\\&2\lambda_{,\nu}\sigma^{\mu\nu}-\varsigma_{,\nu}b^{\mu\nu}+O(c^{-4})\\&=-\frac{1}{c^{2}}[\lambda a^{\nu}u^{\mu}_{;\nu}+(\varsigma-\frac{2\lambda}{3})u^{\mu}\Theta^{2}+(\varsigma+\frac{\lambda}{3})a^{\mu}\Theta]-\\&2\lambda_{,\nu}[g^{\mu\alpha}u^{\nu}{}_{;\alpha}+g^{\nu\alpha}u^{\mu}{}_{;\alpha}+\frac{1}{c^{2}}(a^{\mu}u^{\nu}+a^{\nu}u^{\mu})]-\\&(\varsigma_{,\nu}-\frac{2\lambda_{,\nu}}{3})b^{\mu\nu}+O(c^{-4}),\end{aligned}$$
(۱۳)

۴. ۳. معادلهٔ پایستگی تکانه- انرژی مربوط به انتقال گرما

با محاسبه مشتق کوارینت تانسور انرژی- تکانهٔ مربوط به پدیدهٔ انتقال گرما از رابطهٔ (۹) و (۱۰) بعد از مقداری محاسبه داریم:

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu}_{heat;\nu}&=\frac{1}{c^{2}}(q^{\mu}u^{\nu}+q^{\nu}u^{\mu})_{;\nu}\\&=-\frac{\kappa T_{,\alpha}}{c^{2}}(g^{\mu\alpha}\Theta+g^{\nu\alpha}u^{\mu}_{;\nu})-\\&\frac{\kappa_{,\nu}T_{,\alpha}}{c^{2}}(g^{\mu\alpha}u^{\nu}+g^{\nu\alpha}u^{\mu})+O(c^{-4}).\end{aligned}\qquad (۱۴)$$

۵. عامل لورنتس و چهار بردار سرعت

رابطهٔ مؤلفه‌های چهار بردار سرعت و سرعت با رابطهٔ $u^{\mu}=\frac{dx^{\mu}}{d\tau}=\gamma\frac{dx^{\mu}}{dt}=\gamma v^{\mu}$ به دست می‌آید، که $\gamma=\frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}$ عامل لورنتس است. برای ساده سازی عناصری را که از مرتبه c^{-3} و کوچک‌تر هستند نمی‌نویسیم. در

نتیجه برای عامل لورنتس و مجذور آن داریم:

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cong 1+\frac{v^2}{2c^2}+O(c^{-4}) \\
\gamma^2 &= \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \cong 1+\frac{v^2}{c^2}+O(c^{-4}),
\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

بنابراین مؤلفه‌های چهار بردار سرعت درمقیاس‌بندی هم بعد و در دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارتند از:

$$u^0=\gamma c, u^r=\gamma \dot{r}, u^{\psi}=\gamma l \dot{\theta}, u^z=\gamma \dot{z}. \qquad (۱۶)$$

۶. معادلات پایستگی در دستگاه مختصات استوانه‌ای

در این قسمت مؤلفه‌های معادلات پایستگی تکانه- انرژی را که شامل چهار مؤلفه است دردستگاه مختصات استوانه‌ای بازنویسی می‌کنیم.

.

۶. ۱. معادلهٔ پایستگی تکانه- انرژی مربوط به شارهٔ کامل

از رابطهٔ (۱۴) مؤلفه‌های معادلات پایستگی تکانه- انرژی شارهٔ کامل در دستگاه مختصات استوانه‌ای به دست می‌آید که عبارتند از:

$$\begin{aligned}
T_{Pf\,;\nu}{}^{0\nu} &= \gamma^2 c\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\rho\cdot\vec{v}+\rho\Theta\right)+\rho a^t+p_{;\nu}g^{t\nu} = \\
&\quad \gamma^2 c\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho\Theta\right)+\rho a^t-\frac{1}{c}p_{,t}\,, \\
T_{Pf\,;\nu}{}^{r\nu} &= \gamma^2 \dot{r}\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho\Theta\right)+\rho a^r+p_{,r}\,, T_{Pf\,;\nu}{}^{\psi\nu} = \\
&\quad l\gamma^2\dot{\theta}\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho\Theta\right)+l\rho a^{\theta}+\frac{l}{r^2}p_{,\theta}\,, \\
T_{Pf\,;\nu}{}^{z\nu} &= \gamma^2 \dot{z}\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho\Theta\right)+\rho a^z+p_{,z}\,,
\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

روابط دیورژانس یک بردار و گرادیان نرده‌ای و مؤلفه‌های a^{μ} و Θ، در دستگاه مختصات استوانه‌ای در پیوست A آمده است.

۶. ۲. معادلهٔ پایستگی تکانه- انرژی مربوط به وشکسانی

از رابطهٔ (۱۵) معادلات پایستگی تکانه- انرژی مرتبط با تانسور تنش- وشکسانی را در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
T_{vis\,;\nu}{}^{0\nu} &= \frac{1}{c}\left(\varsigma-\frac{2\lambda}{3}\right)(\nabla\cdot\vec{v})^2 - \\
&\quad \frac{2}{c}\lambda_{,t}\sigma^{tt}-2\lambda_{,r}\sigma^{rt}-2\lambda_{,\theta}\sigma^{t\theta} - \\
&\quad 2\lambda_{,z}\sigma^{zt}-\left(\frac{1}{c}\varsigma_{,t}b^{tt}+\varsigma_{,r}b^{rt}+\right. \\
&\quad \left.\varsigma_{,\theta}b^{t\theta}+\varsigma_{,z}b^{tz}\right)+O(c^{-3}), \\
T_{vis\,;\nu}{}^{r\nu} &= -\frac{1}{c^2}\left[\left(\varsigma-\frac{2\lambda}{3}\right)\dot{r}(\nabla\cdot\vec{v})^2+\right. \\
&\quad \lambda\left(a^r\dot{r}_{,r}+a^{\theta}(\dot{r}_{,\theta}-r\dot{\theta}^2)+a^z\dot{r}_{,z}\right)+ \\
&\quad \left.\left(\varsigma+\frac{\lambda}{3}\right)a^r\nabla\cdot\vec{v}\right]-\frac{2}{c}\lambda_{,t}\sigma^{tr}-2\lambda_{,r}\sigma^{rr} - \\
&\quad 2\lambda_{,\theta}\sigma^{\theta r}-2\lambda_{,z}\sigma^{zr}-\left(\frac{1}{c}\varsigma_{,t}b^{tr}+\varsigma_{,r}b^{rr}+\right. \\
&\quad \left.\varsigma_{,\theta}b^{r\theta}+\varsigma_{,z}b^{rz}\right)+O(c^{-3}), \\
T_{vis\,;\nu}{}^{\psi\nu} &= -\frac{l}{c^2}\left[\left(\varsigma-\frac{2\lambda}{3}\right)\dot{\theta}(\nabla\cdot\vec{v})^2+\right. \\
&\quad \lambda\left(a^r\left(\dot{\theta}_{,r}+\frac{\dot{\theta}}{r}\right)+a^{\theta}\left(\dot{\theta}_{,\theta}+\frac{\dot{r}}{r}\right)+\right. \\
&\quad \left.\left. a^z\dot{\theta}_{,z}\right)+\left(\varsigma+\frac{\lambda}{3}\right)a^{\theta}\nabla\cdot\vec{v}\right]-\frac{2}{c}\lambda_{,t}\sigma^{t\theta} - \\
&\quad 2\lambda_{,r}\sigma^{r\theta}-2\lambda_{,\theta}\sigma^{\theta\theta}-2\lambda_{,z}\sigma^{z\theta} - \\
&\quad \left(\frac{1}{c}\varsigma_{,t}b^{t\theta}+\varsigma_{,r}b^{r\theta}+\varsigma_{,\theta}b^{\theta\theta}+\varsigma_{,z}b^{\theta z}\right)+O(c^{-3}), \\
T_{vis\,;\nu}{}^{z\nu} &= -\frac{1}{c^2}\left[\left(\varsigma-\frac{2\lambda}{3}\right)\dot{z}(\nabla\cdot\vec{v})^2+\right. \\
&\quad \lambda\left(a^r\dot{z}_{,r}+a^{\theta}\dot{z}_{,\theta}+a^z\dot{z}_{,z}\right)+ \\
&\quad \left.\left(\varsigma+\frac{\lambda}{3}\right)a^z\nabla\cdot\vec{v}\right]-\frac{2}{c}\lambda_{,t}\sigma^{tz} - \\
&\quad 2\lambda_{,r}\sigma^{rz}-2\lambda_{,\theta}\sigma^{\theta z}-2\lambda_{,z}\sigma^{zz} - \\
&\quad \left(\frac{1}{c}\varsigma_{,t}b^{tz}+\varsigma_{,r}b^{rz}+\varsigma_{,\theta}b^{z\theta}+\varsigma_{,z}b^{zz}\right)+O(c^{-3}),
\end{aligned} \qquad (۱۸)$$

مؤلفه‌های $\sigma^{\mu\nu}$، $b^{\mu\nu}$ و $\nabla\cdot\vec{v}$ که در دستگاه مختصات استوانه‌ای محاسبه شده‌اند [۸] در پیوست B آمده است.

۶. ۳. معادلهٔ پایستگی تکانه- انرژی مربوط به انتقال گرما

معادلات پایستگی تکانه- انرژی مربوط به انتقال گرما در دستگاه مختصات استوانه‌ای از رابطهٔ (۱۶) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
T_{heat;\nu}^{\ 0\nu} &= -\frac{1}{c}\nabla\kappa\cdot\nabla T + O(c^{-3}),\\
T_{heat;\nu}^{\ r\nu} &= -\frac{\kappa}{c^{2}}(T_{,r}\nabla\cdot\vec{v} + \nabla\dot{r}\cdot\nabla T + \frac{T_{,\theta}}{r}) -\\
&\quad \frac{T_{,r}}{c^{2}}(\kappa_{,t} + \nabla\kappa\cdot\vec{v}) -\\
&\quad \frac{\dot{r}}{c^{2}}\nabla\kappa\cdot\nabla T + O(c^{-3})\\
&= -\frac{T_{,r}}{c^{2}}(\kappa\nabla\cdot\vec{v} + \frac{d\kappa}{dt}) -\\
&\quad \frac{\kappa}{c^{2}}(\nabla\dot{r}\cdot\nabla T + \frac{T_{,\theta}}{r}) - \frac{\dot{r}}{c^{2}}\nabla\kappa\cdot\nabla T + O(c^{-3}),\\
T_{heat;\nu}^{\ \psi\nu} &= -\frac{\kappa l}{c^{2}}(\frac{1}{r^{2}}T_{,\theta}\nabla\cdot\vec{v} + \nabla\dot{\theta}\cdot\nabla T + \frac{\dot{r}T_{,\theta}}{r^{3}}) -\\
&\quad \frac{lT_{,\theta}}{c^{2}}(\kappa_{,t} + \nabla\kappa\cdot\vec{v}) - \frac{l\dot{\theta}}{c^{2}}\nabla\kappa\cdot\nabla T + O(c^{-3})\\
&= -\frac{lT_{,\theta}}{c^{2}}(\frac{\kappa\nabla\cdot\vec{v}}{r^{2}} + \frac{d\kappa}{dt}) -\\
&\quad \frac{\kappa l}{c^{2}}(\nabla\dot{\theta}\cdot\nabla T + \frac{\dot{r}T_{,\theta}}{r^{3}}) - \frac{l\dot{\theta}}{c^{2}}\nabla\kappa\cdot\nabla T + O(c^{-3}),\\
T_{heat;\nu}^{\ z\nu} &= -\frac{\kappa}{c^{2}}(T_{,z}\nabla\cdot\vec{v} + \nabla\dot{z}\cdot\nabla T) -\\
&\quad \frac{T_{,z}}{c^{2}}(\kappa_{,t} + \nabla\kappa\cdot\vec{v}) - \frac{\dot{z}}{c^{2}}\nabla\kappa\cdot\nabla T + O(c^{-3})\\
&= -\frac{T_{,z}}{c^{2}}(\kappa\nabla\cdot\vec{v} + \frac{d\kappa}{dt}) -\\
&\quad \frac{\kappa}{c^{2}}\nabla\dot{z}\cdot\nabla T - \frac{\dot{z}}{c^{2}}\nabla\kappa\cdot\nabla T + O(c^{-3}),
\end{aligned}
$$

(۱۹)

قابل ذکر است که معادلات پایستگی برای هریک از مؤلفه‌ها با جمع هر سه ساز و کار و مساوی صفر قرار دادن مؤلفه‌ها به دست می‌آید. بنابراین معادلات پایستگی نسبیتی به ازای مؤلفه‌های t، r ، θ و z عبارتند از:

$$
\begin{aligned}
t:\ & \gamma^{2}c(\frac{d\rho}{dt} + \rho\Theta) + \rho a^{t} - \frac{1}{c}p_{,t} +\\
& \frac{1}{c}(\varsigma - \frac{2\lambda}{3})(\nabla\cdot\vec{v})^{2} - \frac{2}{c}\lambda_{,t}\sigma^{tt} -\\
& 2\lambda_{,r}\sigma^{rt} - 2\lambda_{,\theta}\sigma^{t\theta} - 2\lambda_{,z}\sigma^{zt} -\\
& (\frac{1}{c}\varsigma_{,t}b^{tt} + \varsigma_{,r}b^{rt} + \varsigma_{,\theta}b^{t\theta} + \varsigma_{,z}b^{tz}) -\\
& \frac{1}{c}\nabla\kappa\cdot\nabla T = 0,\\
r:\ & \gamma^{2}\dot{r}(\frac{d\rho}{dt} + \rho\Theta) + \rho a^{r} + p_{,r} -\\
& \frac{1}{c^{2}}[(\varsigma - \frac{2\lambda}{3})\dot{r}(\nabla\cdot\vec{v})^{2} +\\
& \lambda(a^{r}\dot{r}_{,r} + a^{\theta}(\dot{r}_{,\theta} - r\dot{\theta}^{2}) + a^{z}\dot{r}_{,z}) +\\
& (\varsigma + \frac{\lambda}{3})a^{r}\nabla\cdot\vec{v}] - \frac{2}{c}\lambda_{,t}\sigma^{tr} - 2\lambda_{,r}\sigma^{rr} -\\
& 2\lambda_{,\theta}\sigma^{\theta r} - 2\lambda_{,z}\sigma^{zr} -\\
& (\frac{1}{c}\varsigma_{,t}b^{tr} + \varsigma_{,r}b^{rr} + \varsigma_{,\theta}b^{r\theta} + \varsigma_{,z}b^{rz}) -\\
& \frac{T_{,r}}{c^{2}}(\kappa\nabla\cdot\vec{v} + \frac{d\kappa}{dt}) - \frac{\kappa}{c^{2}}(\nabla\dot{r}\cdot\nabla T + \frac{T_{,\theta}}{r}) -\\
& \frac{\dot{r}}{c^{2}}\nabla\kappa\cdot\nabla T = 0,\\
\theta:\ & l\gamma^{2}\dot{\theta}(\frac{d\rho}{dt} + \rho\Theta) + l\rho a^{\theta} + \frac{l}{r^{2}}p_{,\theta} -\\
& \frac{l}{c^{2}}[(\varsigma - \frac{2\lambda}{3})\dot{\theta}(\nabla\cdot\vec{v})^{2} + \lambda(a^{r}(\dot{\theta}_{,r} + \frac{\dot{\theta}}{r}) +\\
& a^{\theta}(\dot{\theta}_{,\theta} + \frac{\dot{r}}{r}) + a^{z}\dot{\theta}_{,z}) + (\varsigma + \frac{\lambda}{3})a^{\theta}\nabla\cdot\vec{v}] -\\
& \frac{2}{c}\lambda_{,t}\sigma^{t\theta} - 2\lambda_{,r}\sigma^{r\theta} - 2\lambda_{,\theta}\sigma^{\theta\theta} - 2\lambda_{,z}\sigma^{z\theta} -\\
& (\frac{1}{c}\varsigma_{,t}b^{t\theta} + \varsigma_{,r}b^{r\theta} + \varsigma_{,\theta}b^{\theta\theta} + \varsigma_{,z}b^{\theta z}) -\\
& \frac{lT_{,\theta}}{c^{2}}(\frac{\kappa\nabla\cdot\vec{v}}{r^{2}} + \frac{d\kappa}{dt}) - \frac{\kappa l}{c^{2}}(\nabla\dot{\theta}\cdot\nabla T + \frac{\dot{r}T_{,\theta}}{r^{3}}) -\\
& \frac{l\dot{\theta}}{c^{2}}\nabla\kappa\cdot\nabla T = 0,\\
z:\ & \gamma^{2}\dot{z}(\frac{d\rho}{dt} + \rho\Theta) + \rho a^{z} + p_{,z} -\\
& \frac{1}{c^{2}}[(\varsigma - \frac{2\lambda}{3})\dot{z}(\nabla\cdot\vec{v})^{2} +\\
& \lambda(a^{r}\dot{z}_{,r} + a^{\theta}\dot{z}_{,\theta} + a^{z}\dot{z}_{,z}) + (\varsigma + \frac{\lambda}{3})a^{z}\nabla\cdot\vec{v}] -\\
& \frac{2}{c}\lambda_{,t}\sigma^{tz} - 2\lambda_{,r}\sigma^{rz} - 2\lambda_{,\theta}\sigma^{\theta z} - 2\lambda_{,z}\sigma^{zz} -\\
& (\frac{1}{c}\varsigma_{,t}b^{tz} + \varsigma_{,r}b^{rz} + \varsigma_{,\theta}b^{z\theta} + \varsigma_{,z}b^{zz}) -\\
& \frac{T_{,z}}{c^{2}}(\kappa\nabla\cdot\vec{v} + \frac{d\kappa}{dt}) - \frac{\kappa}{c^{2}}\nabla\dot{z}\cdot\nabla T -\\
& \frac{\dot{z}}{c^{2}}\nabla\kappa\cdot\nabla T = 0.
\end{aligned}
$$

(۲۰)

۷. معادلات پایستگی شارۀ غیر نسبیتی

روابط غیر نسبیتی حد روابط نسبیتی هستند، بنابراین می‌توان معادلات پایستگی انرژی- تکانۀ غیر نسبیتی را با استفاده از معادلات پایستگی نسبیتی و با استفاده از حد $\frac{v}{c} \to 0$ ویا $\gamma \to 1$ را به دست آورد. لذا معادلۀ پایستگی شارۀ غیر نسبیتی شامل شارۀ کامل، وشکسانی و انتقال گرما است که به ترتیب

عبارتند از:

$$T_{Pf\,;\nu}{}^{\mu\nu}=\rho_{,\nu}u^{\nu}u^{\mu}+\rho\Theta u^{\mu}+\rho a^{\mu}+p_{,\nu}g^{\mu\nu},$$
$$T_{vis\,;\nu}{}^{\mu\nu}=-۲\lambda_{,\nu}\sigma^{\mu\nu}-\varsigma_{,\nu}b^{\mu\nu}= -۲\lambda_{,\nu}(g^{\mu\alpha}u^{\nu}{}_{;\alpha}+g^{\nu\alpha}u^{\mu}{}_{;\alpha})-(\varsigma_{,\nu}-\frac{۲\lambda_{,\nu}}{۳})b^{\mu\nu}. \qquad (۲۱)$$
$$T_{heat\,;\nu}{}^{\mu\nu}=۰,$$

۷. ۱. پایستگی انرژی- تکانهٔ غیر نسبیتی در دستگاه مختصات استوانه‌ای

معادلات پایستگی انرژی- تکانهٔ غیر نسبیتی در دستگاه مختصات استوانه‌ای، از اعمال $\frac{v}{c}\to ۰$ ویا $\gamma\to ۱$ در معادلات (۱۷) تا (۱۹) برای شارهٔ کامل، وشکسانی و انتقال گرما به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$T_{Pf\,;\nu}{}^{۰\nu}=c(\frac{d\rho}{dt}+\rho\Theta),$$
$$T_{Pf\,;\nu}{}^{r\nu}=\dot r(\frac{d\rho}{dt}+\rho\Theta)+\rho a^{r}+p_{,r},$$
$$T_{Pf\,;\nu}{}^{\psi\nu}=l\dot\theta(\frac{d\rho}{dt}+\rho\Theta)+l\rho a^{\theta}+\frac{l}{r^{۲}}p_{,\theta}, \qquad (۲۲)$$
$$T_{Pf\,;\nu}{}^{z\nu}=\dot z(\frac{d\rho}{dt}+\rho\Theta)+\rho a^{z}+p_{,z},$$

$$T_{vis\,;\nu}{}^{۰\nu}=۰,$$
$$T_{vis\,;\nu}{}^{r\nu}=-۲\lambda_{,r}\sigma^{rr}-۲\lambda_{,\theta}\sigma^{\theta r}-۲\lambda_{,z}\sigma^{zr}-\varsigma_{,r}b^{rr},$$
$$T_{vis\,;\nu}{}^{\psi\nu}=-۲\lambda_{,r}\sigma^{r\theta}-۲\lambda_{,\theta}\sigma^{\theta\theta}-۲\lambda_{,z}\sigma^{z\theta}-\varsigma_{,\theta}b^{\theta\theta}, \qquad (۲۳)$$
$$T_{vis\,;\nu}{}^{z\nu}=-۲\lambda_{,r}\sigma^{rz}-۲\lambda_{,\theta}\sigma^{\theta z}-۲\lambda_{,z}\sigma^{zz}-\varsigma_{,z}b^{zz},$$

$$T_{heat\,;\nu}{}^{۰\nu}=T_{heat\,;\nu}{}^{r\nu}= T_{heat\,;\nu}{}^{\psi\nu}=T_{heat\,;\nu}{}^{z\nu}=۰, \qquad (۲۴)$$

دیده می‌شود که همه مؤلفه‌های معادلهٔ پایستگی ناشی از انتقال گرما صفر است. بنابراین بعد از مقداری محاسبه، معادلات پایستگی شارهٔ غیر نسبیتی در دستگاه مختصات استوانه‌ای به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$t: c(\frac{d\rho}{dt}+\rho\Theta)=۰\Rightarrow\frac{d\ln\rho}{dt}=-\Theta,$$
$$r: \dot r(\frac{d\rho}{dt}+\rho\Theta)+\rho a^{r}+p_{,r}- ۲\lambda_{,r}\sigma^{rr}-۲\lambda_{,\theta}\sigma^{\theta r}-۲\lambda_{,z}\sigma^{zr}-\varsigma_{,r}b^{rr}=۰,$$
$$\Rightarrow\rho a^{r}+p_{,r}-۲\lambda_{,r}\sigma^{rr}-۲\lambda_{,\theta}\sigma^{\theta r}- ۲\lambda_{,z}\sigma^{zr}-\varsigma_{,r}b^{rr}=۰,$$
$$\theta: l\rho a^{\theta}+\frac{l}{r^{۲}}p_{,\theta}-۲\lambda_{,r}\sigma^{r\theta}- ۲\lambda_{,\theta}\sigma^{\theta\theta}-۲\lambda_{,z}\sigma^{z\theta}-\varsigma_{,\theta}b^{\theta\theta}=۰, \qquad (۲۵)$$
$$z: \rho a^{z}+p_{,z}-۲\lambda_{,r}\sigma^{rz}- ۲\lambda_{,\theta}\sigma^{\theta z}-۲\lambda_{,z}\sigma^{zz}-\varsigma_{,z}b^{zz}=۰.$$

روابط مؤلفه‌های $\sigma^{\mu\nu}$، $b^{\mu\nu}$ و Θ در حالت غیر نسبتی دستگاه مختصات استوانه‌ای در پیوست C آمده است.

۸. اعمال رابطهٔ پایستگی جرم باریونی و معادلات پایستگی

اگر پایستگی جرم باریونی ($(\rho u^{\nu})_{;\nu}=\frac{d\rho}{dt}+\rho\Theta=۰$) در شاره برقرار باشد معادلهٔ پایستگی انرژی- تکانهٔ مربوط به شارهٔ کامل ساده‌تر می‌شود و عبارت است از:

$$T_{Pf\,;\nu}{}^{\mu\nu}=(\rho u^{\mu}u^{\nu}+pg^{\mu\nu})_{;\nu}= (\rho u^{\nu})_{;\nu}u^{\mu}+\rho a^{\mu}+p_{;\nu}g^{\mu\nu}= \rho a^{\mu}+p_{;\nu}g^{\mu\nu}, \qquad (۲۶)$$

بنابراین مؤلفه‌های معادلات پایستگی انرژی- تکانهٔ نسبیتی مربوط به شارهٔ کامل با در نظر گرفتن پایستگی جرم باریونی در دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارت است از:

$$T_{Pf\,;\nu}{}^{۰\nu}=\rho a^{t}+p_{;\nu}g^{t\nu}=\rho a^{t}-\frac{۱}{c}p_{,t},$$
$$T_{Pf\,;\nu}{}^{r\nu}=\rho a^{r}+p_{;\nu}g^{r\nu}=\rho a^{r}+p_{,r}, \qquad (۲۷)$$
$$T_{Pf\,;\nu}{}^{\psi\nu}=\rho a^{\psi}+p_{;\nu}g^{\psi\nu}=l\rho a^{\theta}+\frac{l}{r^{۲}}p_{,\theta},$$
$$T_{Pf\,;\nu}{}^{z\nu}=\rho a^{z}+p_{;\nu}g^{z\nu}=\rho a^{z}+p_{,z},$$

همچنین در حالت غیر نسبیتی مؤلفه‌های معادلات پایستگی انرژی- تکانهٔ مربوط به شارهٔ کامل عبارت است از:

$$T_{pf\,;\nu}{}^{۰\nu}=\rho a^{t}=۰,$$
$$T_{Pf\,;\nu}{}^{r\nu}=\rho a^{r}+p_{;\nu}g^{r\nu}= \rho a^{r}+p_{,r}=\rho(\ddot r-r\dot\theta^{۲})+\frac{\partial p}{\partial r},$$
$$T_{Pf\,;\nu}{}^{\psi\nu}=\rho a^{\psi}+p_{;\nu}g^{\psi\nu}= l\rho a^{\theta}+\frac{l}{r^{۲}}p_{,\theta}=l\rho(\ddot\theta+\frac{۲\dot r\dot\theta}{r})+\frac{l}{r^{۲}}\frac{\partial p}{\partial\theta},$$
$$T_{Pf\,;\nu}{}^{z\nu}=\rho a^{z}+p_{;\nu}g^{z\nu}=$$

$$\rho a^z + p_{,z} = \rho \ddot{z} + \frac{\partial p}{\partial z}. \qquad (۲۸)$$

۹. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله برآن بودیم که معادلات پایستگی شارهٔ غیر آرمانی نسبیتی را به دست بیاوریم. همچنین تشابهات و تفاوت‌های این معادلات در حالت نسبیی و غیر نسبیتی را بفهمیم. بنابراین نزدیک‌ترین متریک به حالت غیر نسبیتی که متریک تخت است را در نظر گرفتیم. متریک مورد بررسی متریک مینکوفسکی بود که متریکی تخت و استاتیک است؛ اما شارهٔ مورد بررسی شارهٔ وابسته به زمان و مکان و کمیت‌های مرتبط است. برای پی بردن به دینامیک شاره‌ها و به دست آوردن رفتار کمیت‌های مختلف در یک شاره، ابتدا معادلات پایستگی تکانه- انرژی آن شاره را به دست می‌آوریم و با حل آن، رفتار و تحول شاره معلوم می‌شود. در این مقاله معادلات پایستگی تکانه- انرژی شارهٔ نسبیتی غیر آرمانی در فضا- زمان تخت را از مشتق کوارینت تانسور انرژی- تکانه به دست می‌آوریم. در شاره برای انتقال انرژی و تکانهٔ سه ساز و کار شارهٔ کامل، وشکسانی و انتقال حرارت را در نظر گرفتیم، سپس معادلات پایستگی تکانه- انرژی را محاسبه کردیم. تمام محاسبات این مقاله در مقیاس‌بندی هم بعد انجام شده است. چنانکه در مقدمه اشاره شده است این معادلات پایستگی در کارهای مشابه در حالات خاص با استفاده از کمیت‌های نرده‌ای به دست آمده بود، اما در این مقاله بر حسب چهاربردار سرعت، شتاب، دما و مشتقات آنان و در نهایت بر حسب بردار سرعت، شتاب و .. به دست آمده است تا بتوانیم ارتباط بین معادلات نسبیتی و غیر نسبیتی را بهتردریابیم.

در ابتدا روابط معادلات پایستگی تکانه- انرژی را در حالت کلی نوشتیم سپس مؤلفه‌های این معادلات را در دستگاه مختصات استوانه ای به دست آوردیم. همچنین معادلات پایستگی تکانه- انرژی غیر نسبیتی را به عنوان حد معادلات پایستگی تکانه- انرژی نسبیتی به دست آوردیم که مؤلفهٔ صفرم، پایستگی انرژی و بقیه مؤلفه‌ها، پایستگی تکانه در راستاهای مختلف را نشان می‌دهند. این امر نشان می‌دهد که در معادلات پایستگی تکانه- انرژی چه عوامل مشترک و متفاوتی دارند. به عنوان مثال دیده می‌شود که در حالت نسبیتی و غیر نسبیتی چگالی را از تانسور گسترش جهان‌خط (Θ) می‌توان به دست آورد. به علاوه در معادلات پایستگی تکانه- انرژی نسبیتی، انتقال حرارت و تأثیر آن دیده می‌شود اما در حالت غیر نسبیتی دیده نمی‌شود. همچنین در شارهٔ نسبیتی تأثیر وشکسانی لغزشی، کپه‌ای و ضرایب آن در معادلات دیده می‌شود، اما در شارهٔ غیر نسبیتی تأثیر ضرایب وشکسانی لغزشی، کپه‌ای در معادلات اهمیت بیشتری دارند. همچنین در حالت غیر نسبیتی مؤلفه‌های قطری وشکسانی کپه‌ای در معادلات پایستگی ظاهر می‌شوند که در صورت غیر قابل فشرده بودن شاره($\nabla.\vec{v}=۰$)، مؤلفه‌های قطری وشکسانی کپه‌ای نیز ظاهر نمی‌شوند.

با توجه به نمایان شدن تفاوت‌های معادلات پایستگی نسبیتی و غیر نسبیتی در این مقاله،اگر در بررسی غیر نسبیتی سرعت شاره بالا باشد در مرحلهٔ اول می‌توان جملات مهم‌تر هر ساز و کار را در معادلات پایستگی در نظر گرفت و معادلات را با آن اصلاح کرد.

در این مقاله اثر میدان مغناطیسی در انتقال تکانه و انرژی در نظر گرفته نشد. برای در نظر اثر میدان مغناطیسی در معادلات پایستگی کافی است که تانسور تکانه- انرژی ناشی از میدان مغناطیسی را به دست اوریم و مشتق کورارینت آن را در معادلات اضافه کنیم.

در این مقاله روابط پایستگی تکانه را به صورت کلی به دست آوردیم. بنابراین به راحتی در دستگاه‌های مختصات دیگر مؤلفه‌های پایستگی را می‌توان به دست آورد. برای معادلات پایستگی تکانه- انرژی در متریک‌های دیگر با همین روش می‌توان عمل کرد و سپس با حل معادلات دینامیک شاره‌ها و ... را دریافت.

تقدیر و تشکر

این مقاله با حمایت دانشگاه کوثر بجنورد با شماره اعتبار ۹۹۰۳۱۹۱۳۴۵ (۱۳۹۹/۵/۲۵) انجام شده است.

پیوست A

در دستگاه مختصات استوانه‌ای و در مقیاس‌بندی هم بعد دو نماد کریستوفل $\Gamma^r_{\psi\psi}=-\frac{r}{l^2},\Gamma^r_{r\psi}=\Gamma^r_{\psi r}=\frac{1}{r}$ غیر صفر هستند، بنابراین مؤلفه‌های a^μ و Θ در مقیاس‌بندی هم بعد و دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارتند از [۸]:

$$\begin{aligned}
a^0 &= \gamma c(\nabla\gamma\cdot\vec{v}+\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial t}),\\
a^r &= \gamma(\nabla(\gamma\dot{r})\cdot\vec{v}-r\gamma\dot{\theta}^2+\frac{\partial(\gamma\dot{r})}{\partial t}),\\
a^\psi &= l\gamma(\nabla(\gamma\dot{\theta})\cdot\vec{v}+\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r}+\gamma\frac{\partial(\gamma\dot{\theta})}{\partial t}),\\
a^z &= \gamma(\nabla(\gamma\dot{z})\cdot\vec{v}+\gamma\frac{\partial(\gamma\dot{z})}{\partial t}),
\end{aligned}\tag{a1}$$

$$\begin{aligned}
\Theta &= \nabla\cdot(\gamma\vec{v})+\frac{\partial\gamma}{\partial t}=\\
&\nabla\cdot\vec{v}+\frac{1}{2c^2}(\nabla\cdot(v^2\vec{v})+\frac{\partial v^2}{\partial t})+O(c^{-4}),
\end{aligned}\tag{a2}$$

همچنین داریم:

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}.\nabla,\tag{a3}$$

بنابراین مؤلفه‌های چهاربردار شتاب و گسترش جهان‌خط عبارتند از:

$$\begin{aligned}
a^0 &= \gamma c\frac{d\gamma}{dt},a^r=\gamma(\frac{d(\gamma\dot{r})}{dt}-r\gamma\dot{\theta}^2),\\
a^\psi &= l\gamma(\frac{d(\gamma\dot{\theta})}{dt}+\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r}),\\
a^z &= \gamma(\frac{d(\gamma\dot{z})}{dt}),
\end{aligned}\tag{a4}$$

$$\begin{aligned}
\Theta &= \gamma\nabla\cdot\vec{v}+\nabla\gamma\cdot\vec{v}+\frac{\partial\gamma}{\partial t}=\\
&\gamma\nabla\cdot\vec{v}+\frac{d\gamma}{dt}=\\
&\nabla\cdot\vec{v}+\frac{1}{2c^2}(\nabla\cdot\vec{v}+\frac{dv^2}{dt})+O(c^{-4}),
\end{aligned}\tag{a5}$$

که تعریف گرادیان تابع یک تابع نرده‌ای φ و دیورژانس تابع بردار $\vec{A}$ در مقیاس‌بندی هم بعد و در دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارت است از:

$$\begin{aligned}
\nabla\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r}+\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\hat{\psi}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z},\\
\nabla.\vec{A} &= \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi}\hat{\psi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}.
\end{aligned}\tag{a6}$$

پیوست B

مؤلفه‌های تانسور لغزشی و تانسور تصویر در مقیاس‌بندی هم بعد و دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارتند از [۸]:

$$\begin{aligned}
\sigma^{00} &= \frac{\nabla v^2\cdot\vec{v}}{2c^2}-\frac{1}{3}\Theta h^{00}+O(c^{-4}),\\
\sigma^{0r} &= \frac{1}{2c}(\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial r}+\nabla\dot{r}\cdot\vec{v}-r\dot{\theta}^2+\frac{\dot{r}\nabla v^2\cdot\vec{v}}{2c^2})-\\
&\quad\frac{1}{3}\Theta h^{0r}+O(c^{-5}),\\
\sigma^{0\psi} &= \frac{l}{2c}(\frac{1}{2r^2}\frac{\partial v^2}{\partial\theta}+\nabla\dot{\theta}\cdot\vec{v}+\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r}+\frac{\dot{\theta}\nabla v^2\cdot\vec{v}}{2c^2})-\\
&\quad\frac{1}{3}\Theta h^{0\psi}+O(c^{-5}),\\
\sigma^{0z} &= \frac{1}{2c}(\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial z}+\nabla\dot{z}\cdot\vec{v}+\frac{\dot{z}\nabla v^2\cdot\vec{v}}{2c^2})-\\
&\quad\frac{1}{3}\Theta h^{0z}+O(c^{-5}),\\
\sigma^{rr} &= \frac{\partial(\gamma\dot{r})}{\partial r}+\frac{\dot{r}}{c^2}(\nabla\dot{r}\cdot\vec{v}-r\dot{\theta}^2+\frac{\partial\dot{r}}{\partial t})-\\
&\quad\frac{1}{3}\Theta h^{rr}+O(c^{-4}),\\
\sigma^{r\psi} &= \frac{l}{2}(\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\gamma\dot{r})}{\partial\theta}+\frac{\partial(\gamma\dot{\theta})}{\partial r}+\\
&\quad\frac{1}{c^2}(\nabla(\dot{r}\dot{\theta})\cdot\vec{v}-r\dot{\theta}^3+\frac{2\dot{r}^2\dot{\theta}}{r}+\frac{\partial(\dot{r}\dot{\theta})}{\partial t})-\\
&\quad\frac{1}{3}\Theta h^{r\psi}+O(c^{-4}),\\
\sigma^{rz} &= \frac{l}{2}(\frac{\partial(\gamma\dot{r})}{\partial z}+\frac{\partial(\gamma\dot{z})}{\partial r}+\frac{1}{c^2}(\nabla(\dot{r}\dot{z})\cdot\vec{v}-\\
&\quad r\dot{\theta}^2\dot{z}+\frac{\partial(\dot{r}\dot{z})}{\partial t})-\frac{1}{3}\Theta h^{rz}+O(c^{-4}),\\
\sigma^{\psi\psi} &= l^2(\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\gamma\dot{\theta})}{\partial r}+\frac{\gamma\dot{r}}{r}+\frac{\dot{\theta}}{c^2}(\nabla\dot{\theta}\cdot\vec{v}+\frac{2\dot{r}^2\dot{\theta}}{r}+\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial t})-\\
&\quad\frac{1}{3}\Theta h^{\psi\psi}+O(c^{-4}),\\
\sigma^{z\psi} &= \frac{l}{2}(\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\gamma\dot{z})}{\partial\theta}+\frac{\partial(\gamma\dot{\theta})}{\partial z}+\\
&\quad\frac{1}{c^2}(\nabla(\dot{z}\dot{\theta})\cdot\vec{v}+\frac{2\dot{r}\dot{z}\dot{\theta}}{r}+\frac{\partial(\dot{z}\dot{\theta})}{\partial t})-\\
&\quad\frac{1}{3}\Theta h^{z\psi}+O(c^{-4}),\\
\sigma^{zz} &= \frac{\partial(\gamma\dot{z})}{\partial z}+\frac{\dot{z}}{c^2}(\nabla\dot{z}\cdot\vec{v}+\frac{\partial\dot{z}}{\partial t})-\\
&\quad\frac{1}{3}\Theta h^{zz}+O(c^{-4}),
\end{aligned}\tag{b1}$$

همچنین مؤلفه‌های تانسور وشکسانی کپه‌ای $b^{\mu\nu}$ در مقیاس‌بندی هم بعد و دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارتند از [۸]:

$$b^{00}=\frac{v^2\nabla\cdot\vec{v}}{c^2}+O(c^{-4}),b^{0r}=$$

$$\frac{\dot r\nabla\cdot\vec v}{c}+O(c^{-3}),b^{0\psi}=\frac{l\dot\theta\nabla\cdot\vec v}{c}+O(c^{-3}),$$
$$b^{0z}=\frac{\dot z\nabla\cdot\vec v}{c}+O(c^{-3}),b^{rr}=(1+\frac{\dot r^2}{c^2})\nabla\cdot\vec v+\frac{1}{2c^2}(\nabla\cdot\vec v+\frac{dv^2}{dt})+O(c^{-4}),$$
$$b^{r\psi}=\frac{l\dot r\dot\theta\nabla\cdot\vec v}{c^2}+O(c^{-4}),b^{rz}=\frac{l\dot r\dot z\nabla\cdot\vec v}{c^2}+O(c^{-4}),$$
$$b^{\psi\psi}=l^2(\frac{1}{r^2}+\frac{\dot\theta^2}{c^2})\nabla\cdot\vec v+\frac{l^2}{2r^2c^2}(\nabla\cdot\vec v+\frac{dv^2}{dt})+O(c^{-4}),b^{\psi z}=\frac{l\dot z\dot\theta\nabla\cdot\vec v}{c^2}+O(c^{-4}),$$
$$b^{zz}=(1+\frac{\dot z^2}{c^2})\nabla\cdot\vec v+\frac{1}{2c^2}(\nabla\cdot\vec v+\frac{dv^2}{dt})+O(c^{-5}).\qquad (b۲)$$

با توجه به روابط (b۱، a۲، a۱ و b۲) مؤلفه‌های تانسور وشکسانی لغزشی به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\sigma^{00}=\frac{\nabla v^2\cdot\vec v}{2c^2}-\frac{v^2\nabla\cdot\vec v}{3c^2}+O(c^{-4}),$$
$$\sigma^{0r}=\frac{1}{2c}(\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial r}+\nabla\dot r\cdot\vec v-r\dot\theta^2+\frac{\dot r\nabla v^2\cdot\vec v}{2c^2})-\frac{\dot r\nabla\cdot\vec v}{3c}+O(c^{-3}),$$
$$\sigma^{0\psi}=\frac{l}{2c}(\frac{1}{2r^2}\frac{\partial v^2}{\partial\theta}+\nabla\dot\theta\cdot\vec v+\frac{2\dot r\dot\theta}{r}+\frac{\dot\theta\nabla v^2\cdot\vec v}{2c^2})-\frac{l\dot\theta\nabla\cdot\vec v}{3c}+O(c^{-3}),$$
$$\sigma^{0z}=\frac{1}{2c}(\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial z}+\nabla\dot z\cdot\vec v+\frac{\dot z\nabla v^2\cdot\vec v}{2c^2})-\frac{\dot z\nabla\cdot\vec v}{3c}+O(c^{-3}),$$
$$\sigma^{rr}=\frac{\partial(\gamma\dot r)}{\partial r}+\frac{\dot r}{c^2}(\frac{d\dot r}{dt}-r\dot\theta^2)-(1+\frac{\dot r^2}{c^2})\frac{\nabla\cdot\vec v}{3}+\frac{1}{6c^2}(\nabla\cdot\vec v+\frac{dv^2}{dt})+O(c^{-4}),$$
$$\sigma^{r\psi}=\frac{l}{2}(\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\gamma\dot r)}{\partial\theta}+\frac{\partial(\gamma\dot\theta)}{\partial r}+\frac{1}{c^2}(\frac{d(\dot r\dot\theta)}{dt}-r\dot\theta^3+\frac{2\dot r^2\dot\theta}{r})-\frac{l\dot r\dot\theta\nabla\cdot\vec v}{3c^2}+O(c^{-4}),$$
$$\sigma^{rz}=\frac{l}{2}(\frac{\partial(\gamma\dot r)}{\partial z}+\frac{\partial(\gamma\dot z)}{\partial r}+\frac{1}{c^2}(\frac{d(\dot r\dot z)}{dt}-r\dot\theta^2\dot z)-\frac{l\dot r\dot z\nabla\cdot\vec v}{3c^2}+O(c^{-4}),$$
$$\sigma^{\psi\psi}=l^2(\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\gamma\dot\theta)}{\partial r}+\frac{\gamma\dot r}{r})+\frac{l^2\dot\theta}{c^2}(\frac{d\dot\theta}{dt}+\frac{2\dot r^2\dot\theta}{r})-\frac{l^2}{3}(\frac{1}{r^2}+\frac{\dot\theta^2}{c^2})\nabla\cdot\vec v+\frac{l^2}{6r^2c^2}(\nabla\cdot\vec v+\frac{dv^2}{dt})+O(c^{-4}),$$
$$\sigma^{z\psi}=\frac{l}{2}(\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\gamma\dot z)}{\partial\theta}+\frac{\partial(\gamma\dot\theta)}{\partial z}+\frac{1}{c^2}(\frac{d(\dot z\dot\theta)}{dt}+\frac{2\dot r\dot z\dot\theta}{r})-\frac{l\dot\theta\dot z\nabla\cdot\vec v}{3c^2}+O(c^{-4}),$$
$$\sigma^{zz}=\frac{\partial(\gamma\dot z)}{\partial z}+\frac{\dot z}{c^2}(\frac{d\dot z}{dt})-\frac{1}{3}(1+\frac{\dot z^2}{c^2})\nabla\cdot\vec v+\frac{1}{6c^2}(\nabla\cdot\vec v+\frac{dv^2}{dt})+O(c^{-4}).$$

(b۳)

پیوست C

رابطهٔ تانسور جهان‌خط Θ، مؤلفه‌های غیر صفر تانسور وشکسانی کپه‌ای $b^{\mu\nu}$ و وشکسانی لغزشی $\sigma^{\mu\nu}$ در حالت غیر نسبیتی با اعمال در روابط (a۵)،(b۲) و(b۳) به دست می‌آید و به ترتیب عبارتند از:

$$\Theta=\nabla\cdot\vec v,\quad b^{rr}=b^{zz}=\nabla\cdot\vec v,b^{\psi\psi}=\frac{l^2\nabla\cdot\vec v}{r^2}.\qquad (C۱)$$

$$\sigma^{rr}=\frac{\partial\dot r}{\partial r}-\frac{\nabla\cdot\vec v}{3},\sigma^{r\psi}=\frac{l}{2}(\frac{1}{r^2}\frac{\partial\dot r}{\partial\theta}+\frac{\partial\dot\theta}{\partial r}),\sigma^{rz}=\frac{l}{2}(\frac{\partial\dot r}{\partial z}+\frac{\partial\dot z}{\partial r}),$$
$$\sigma^{\psi\psi}=l^2(\frac{1}{r^2}\frac{\partial\dot\theta}{\partial r}+\frac{\gamma\dot r}{r})-\frac{l^2}{3r^2}\nabla\cdot\vec v,\sigma^{z\psi}=\frac{l}{2}(\frac{1}{r^2}\frac{\partial\dot z}{\partial\theta}+\frac{\partial\dot\theta}{\partial z}),\sigma^{zz}=\frac{\partial\dot z}{\partial z}-\frac{1}{3}\nabla\cdot\vec v.\qquad (C۲)$$

مراجع

1. C F Gammie, R Popham, *ApJ* **498** (1998) 313.
2. A Harutyunyan, A Sedrakian, and D H Rischke, *Particles* **1** (2018) 155.
3. A Muronga, *Phys. Rev*. C **76** (2007) 014909.
4. J Muronga, *Phys*. G. **37** (2010) 094008.
5. R Takahashi, *MNRAS* **382** (2007) 567.
6. L Herrera, A Di Prisco, and J Ospino, *Gen Relativ Gravit* **44** (2012) 2645.
7. M Moeen , *IJAA* **5** (2018) 117.

8. M Moeen , *arXiv*:2010.02454 [astro-ph.HE](2020)
9. O M Pimentel , F D Lora-Clavijo, and G A Gonzalez, *Gen Relativ Gravit* **48**, 10 (2016) 1.
10. C W Misner, K S Thorne, and J A Wheeler, "*Gravitation, Freeman*", San Francisco (1973).
11. C Eckart, *Phys. Rev*. **58** (1940) 919.
12. D Mihalas and B W Mihalas, "*Foundations of Radiation Hydrodynamics*", Oxford University Press (1984).
13. S Weinberg , "*Gravitation and Cosmology*", John Wiley and Sons (1972).
14. L D Landau and E M Lifshitz, "*Fluid Mechanics*" Pergamon, London (1959).