

محاسبه سطح مقطع پراکندگی برهمکنش های $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ و $\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$

مریم زینلی و منصور حقیقت

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۸۴/۷/۴ ؛ پذیرش: ۸۴/۱۲/۱۳)

چکیده

ما ضمن مطالعه فرآیندهای ممکن گسیل نوترینو از ستاره های نوترونی، سطح مقطع برهمکنش $\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ را به صورت تحلیلی در ناحیه $m_e < E < M_W$ محاسبه کرده ایم. همچنین با فرض ناجابه جایی بودن فضا، سطح مقطع پراکندگی $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ را نیز به دست آوردیم. نتایج به دست آمده در مقایسه با سطح مقطع برهمکنش های $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ و $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ در فضای جابه جایی می تواند بسیار مهم باشد. به عنوان مثال، مشاهده می شود که در بازه $100 - 300 \text{ GeV}$ ، سطح مقطع برهمکنش $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ در فضای ناجابه جایی در مقایسه با مورد مشابه اش در فضای معمولی بزرگتر و یا هم مرتبه است.

واژه های کلیدی: برهمکنش فوتون - نوترینو، فضای ناجابه جایی، سطح مقطع پراکندگی

۱. مقدمه

می توان به این ترتیب توضیح داد. نوترینوها چون فاقد رنگ و باراند، پس فقط به صورت ضعیف برهمکنش می کنند. ثابت جفت شدگی برهمکنش ضعیف خیلی کوچک است و در نتیجه احتمال انجام برهمکنش بین نوترینو و بقیه ذرات بنیادی بسیار ناچیز است. بنابراین مسیر آزاد میانگینی که نوترینوها طی می کنند خیلی بزرگ خواهد بود. بنابراین نوترینو به محض تولید فرار می کند و انرژی را با خود از درون ستاره به فضای بین ستاره ای منتقل می کند. پس هر واکنشی که نتیجه آن تولید نوترینو باشد، یک کانال ممکن برای سرد شدن ستاره های نوترونی است. به طور کلی، به فرآیندهایی که در آنها نوترینو و یا پادنوترینو تولید می شود، فرآیندهای اورکا^۱ می گویند. به عنوان مثال می توان به موارد زیر اشاره کرد

اخیراً فرآیندهایی که شامل نوترینوها می شوند، مورد توجه زیادی واقع شده اند. این گونه فرایندها توضیح دهنده برخی پدیده های طبیعی در حوزه ستاره شناسی و کیهان شناسی هستند [۱].

یکی از سؤالاتی که ستاره شناسان به دنبال پاسخی برای آن هستند، علت سرد شدن ستاره های نوترونی است. ستاره های نوترونی اجسام فوق چگالی هستند که محصول انفجار ابرنواختراند. دارای میدانهای مغناطیسی قوی از مرتبه 10^{12} گوس هستند و جرمی سنگین تر از جرم خورشید دارند. این ستاره ها به هنگام تولد دمای فوق العاده زیادی دارند (در حدود 10^{11} K) ولی به تدریج رو به سردی می روند.

گفته می شود مهمترین مکانیزم از دست دادن انرژی توسط ستاره های نوترونی، گسیل نوترینو است [۲]. علت این مطلب را

۱. Urca processes

می‌توان به جفت‌شدگی مستقیم فوتون و نوترینو در فضای ناجابه‌جایی اشاره کرد. بنابراین فوتون و نوترینو در فضای ناجابه‌جایی در مرتبه نمودارهای درختی با هم برهمکنش می‌کنند، در صورتی که در مدل استاندارد، اولین مرتبه پراکندگی (۱) و (۲) از طریق حلقه‌ها انجام می‌شود.

در این مقاله، ابتدا سطح مقطع برهمکنش $\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}$ را به طور تحلیلی محاسبه می‌کنیم. برای این منظور در بخش (۲) دامنه پراکندگی برهمکنش $\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}$ را با معلوم بودن دیاگرامهای فاینمن می‌نویسیم. در بخش (۳) اتحاد وارد را که یک تقارن مدل استاندارد است، برای دامنه پراکندگی برهمکنش $\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}$ بررسی می‌کنیم. جزئیات محاسبه سطح مقطع این برهمکنش در بخش (۴) آمده است.

در ادامه به بررسی برهمکنش $\gamma \gamma \rightarrow \nu \bar{\nu}$ در فضای ناجابه‌جایی می‌پردازیم. در بخش (۵)، علاوه بر معرفی فضای ناجابه‌جایی، قاعده فاینمن برای جفت‌شدگی $\gamma \gamma Z$ را ارائه می‌دهیم و در مورد امکانات مختلف برهمکنش فوتون و نوترینو در فضای ناجابه‌جایی بحث می‌کنیم. دامنه پراکندگی برای برهمکنش $\gamma \gamma \rightarrow \nu \bar{\nu}$ در فضای ناجابه‌جایی، در بخش (۶) آمده است. بخش (۷) را به محاسبه سطح مقطع کل پراکندگی برهمکنش $\gamma \gamma \rightarrow \nu \bar{\nu}$ در فضای ناجابه‌جایی اختصاص می‌دهیم. در بخش (۸) ضمن ارائه مقادیر عددی برای سطح مقطع برهمکنش‌های محاسبه شده در چند مقدار انرژی، به بررسی جایگاه این دو برهمکنش در میان برهمکنش‌های اورکا می‌پردازیم.

۲. دیاگرامهای فاینمن، دامنه پراکندگی

در مدل استاندارد و در مرتبه نمودارهای درختی، چهار دیاگرام فاینمن مربوط به فرآیند $\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}$ را می‌توان رسم کرد. دیاگرامهای فاینمن در شکل ۱ نشان داده شده است.

با استفاده از قواعد فاینمن [۱۰]، دامنه پراکندگی کل برای برهمکنش $\gamma(q) + e(p) \rightarrow e(p') + \nu(k') + \bar{\nu}(k)$ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$(1) \quad \gamma \nu \rightarrow \nu \bar{\nu} ,$$

$$(2) \quad \gamma \gamma \rightarrow \gamma \nu \bar{\nu} ,$$

$$(3) \quad \gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu} .$$

سطح مقطع برهمکنش‌های (۱) و (۲) در انرژیهای مختلف در فضای معمولی محاسبه شده است [۳]. در انرژیهای پایین به دلیل وجود توانهایی از کسر $\frac{\omega}{m_W}$ در سطح مقطع فرآیند (۱)، که ω انرژی برخورد در دستگاه مختصات مرکز جرم و m_W جرم بوزون W است، این فرآیند قابل صرف نظر کردن است. در واقع علت کوچکی سطح مقطع برهمکنش (۱) قضیه یانگ است [۴] که واپاشی دو فوتون را به یک حالت $J=1$ ممنوع می‌کند.

اما در جفت‌شدگی سه فوتون به دو نوترینو، چنین محدودیت مشابهی نداریم. با نگاه کردن به سطح مقطع برهمکنش (۲) مشاهده می‌شود که مقیاس انرژی در مقایسه با سطح مقطع برهمکنش (۱) از m_W به m_e تغییر پیدا می‌کند که این خود گواه این مطلب است که سطح مقطع برهمکنش (۲) بر مورد مشابه‌اش در محدوده انرژی $\omega < m_e$ غالب است.

همچنین به دلیل وجود میدانهای مغناطیسی بزرگ در ستاره‌های نوترونی، سطح مقطع این برهمکنش‌ها در حضور میدان مغناطیسی زمینه نیز به دست آمده است [۵] و نرخ از دست دادن انرژی توسط این برهمکنش‌ها محاسبه شده است [۶]. نتیجه محاسبات این است که حضور میدان مغناطیسی، آهنگ از دست دادن انرژی ستاره‌ای را تقویت می‌کند. به عبارت دیگر سطح مقطع برهمکنش‌های مذکور در حضور میدان خارجی تقویت می‌شود. بنابراین وجود میدان مغناطیسی یک عامل مهم در سرد شدن ستاره‌های نوترونی است.

اخیراً ناجابه‌جایی فضا-زمان توجه بسیاری از فیزیکدانان را، چه در زمینه‌های نظری [۷] و چه پدیده شناسی [۸] به خود جلب کرده است. فضای ناجابه‌جایی، باعث ظهور برهمکنش‌های جدید در مدل استاندارد می‌شود [۹]. مثلاً

$$m_3 = -\frac{eG_f}{\sqrt{2}} \varepsilon_\alpha(q) \bar{u}(k') \gamma^\mu (1-\gamma^5) v(k) \times \\ \bar{u}(p') \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{q}} \gamma_\mu \gamma^5 u(p),$$

$$m_4 = -\frac{eG_f}{\sqrt{2}} \varepsilon_\alpha(q) \bar{u}(k') \gamma^\mu (1-\gamma^5) u(p) \times \\ \bar{u}(p') \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{q}} \gamma_\mu (1-\gamma^5) v(k),$$

در عبارتهای بالا، $\varepsilon(q)$ چاربردار قطبش فوتون ورودی است. ضمناً چون پراکندگی را در محدوده انرژی $m_e < E < M_W$ بررسی می‌کنیم، می‌توانیم از ثابت جفت شدگی فرمی، G_f ، استفاده کنیم. همچنین از جرم الکترون در عبارتهای مربوط به انتشارگر، صرف نظر کردیم.

البته اگر $\nu = \nu_\tau$ یا $\nu = \nu_\mu$ باشد برای حفظ قانون بقاء عدد لپتون فقط دو دیاگرام ناشی از برهمکنش جریان خنثی یعنی فقط نمودارهای (۱) و (۳) در دامنه پراکندگی کل سهم خواهند داشت؛ اما ما فرض می‌کنیم $\nu = \nu_e$ ؛ بنابراین باید سهم دو دیاگرام ناشی از برهمکنش جریان باردار یعنی نمودارهای (۲) و (۴) را نیز منظور کرد.

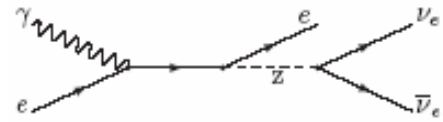
در یک رشته که از حاصل ضرب ماتریسهای دیراک ساخته می‌شود، اتحاد مهم زیر برقرار است

$$\left(\gamma_\mu (1-\gamma^5) \right)_{ij} \left(\gamma^\mu (1-\gamma^5) \right)_{kl} = \\ - \left(\gamma_\mu (1-\gamma^5) \right)_{il} \left(\gamma^\mu (1-\gamma^5) \right)_{kj}.$$

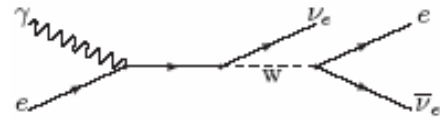
اندیسهای مشخص شده، اندیسهای ماتریسی‌اند که معرف سطر و ستون یک ماتریس 4×4 ‌اند. به طوری که داریم $i, j, k, l = 1, \dots, 4$.

اتحاد فوق یکی از چندین اتحاد منسوب به فیرتز است. خواننده می‌تواند برای اثبات تساوی فوق به مرجع [۱۱] مراجعه کند.

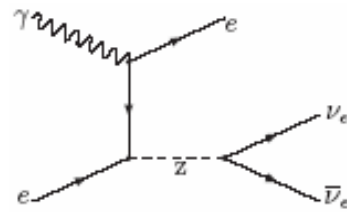
با استفاده از اتحاد فوق، عبارتهای m_3 و m_4 را می‌توان به صورت زیر مرتب کرد



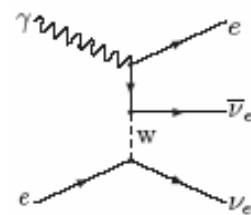
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

شکل ۱. دیاگرامهای فاینمن برای پراکندگی $\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}$.

$$m_{tot} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4,$$

که در آن m_i دامنه پراکندگی مربوط به i امین دیاگرام در شکل ۱ است و برابر است با

$$m_1 = -\frac{eG_f}{\sqrt{2}} \varepsilon_\alpha(q) \bar{u}(k') \gamma^\mu (1-\gamma^5) v(k) \times \\ \bar{u}(p') \gamma_\mu \gamma^5 \frac{1}{\not{p}' + \not{q}} \gamma^\alpha u(p),$$

$$m_2 = -\frac{eG_f}{\sqrt{2}} \varepsilon_\alpha(q) \bar{u}(p') \gamma^\mu (1-\gamma^5) v(k) \times \\ \bar{u}(k') \gamma_\mu (1-\gamma^5) \frac{1}{\not{p}' + \not{q}} \gamma^\alpha u(p),$$

$$a\beta + \beta a = 2ab,$$

و روی لاک جرم بودن فوتون ورودی

$$q\beta = m_\gamma = 0,$$

خواهیم داشت

$$q_\alpha T^\alpha = \frac{eGf}{\sqrt{2}} \bar{u}(k') \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v(k) \\ \bar{u}(p') [\gamma_\mu (1 - \frac{2}{3} \gamma^5) - \frac{2q \cdot p}{(q+p)^2} + \\ \frac{2q \cdot p'}{(p'-q)^2} \gamma_\mu (1 - \frac{2}{3} \gamma^5)] u(p).$$

که این به روشنی صفر است و لذا دامنه پراکندگی کل، تحت تبدیل (۵) ناوردا باقی می ماند.

۴. سطح مقطع پراکندگی برهمکنش $\gamma e \rightarrow e \bar{\nu}$

۴.۱. سطح مقطع دیفرانسیلی

سطح مقطع دیفرانسیلی به شکل کلی زیر نوشته می شود

$$d\sigma = \frac{|m_{tot}|^2}{F} dQ,$$

که dQ فاکتور فضای فاز است و برابر است با

$$dQ = \frac{1}{(2\pi)^5} \delta^4(p+q-p'-k-k') \\ \frac{d^3\vec{P}'}{2E'} \frac{d^3\vec{K}}{2E_k} \frac{d^3\vec{K}'}{2E_{k'}},$$

در رابطه اخیر چاربردار اندازه حرکت خطی ذرات نهایی را به شکل زیر انتخاب کرده ایم

$$p' = (E', \vec{P}'),$$

$$k' = (E_{k'}, \vec{K}'),$$

$$k = (E_k, \vec{K}).$$

یادآوری می کنیم که عبارت $\frac{d^3\vec{P}}{E}$ یک ناوردای لورنتس است که E و \vec{P} به ترتیب بردار اندازه حرکت و انرژی یک

چاربردار دلخواه p می باشد. همچنین $|m_{tot}|^2$ و F کمیت های نرده ای هستند و فاقد اندیس لورنتسی می باشند. لذا سطح مقطع دیفرانسیلی یک کمیت ناورداست. پس هر انتخاب خاصی از

$$m_\gamma = \frac{eGf}{\sqrt{2}} \varepsilon_\alpha(q) \bar{u}(k') \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v(k) \times \\ \bar{u}(p') \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \frac{1}{\not{p} + \not{q}} \gamma^\alpha u(p),$$

$$m_\gamma = \frac{eGf}{\sqrt{2}} \varepsilon_\alpha(q) \bar{u}(k') \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v(k) \times \\ \bar{u}(p') \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{q}} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(p),$$

در نتیجه برای m_{tot} خواهیم داشت

$$m_{tot} = \frac{eGf}{\sqrt{2}} \varepsilon_\alpha(q) \bar{u}(k') \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v(k) \\ \bar{u}(p') [\gamma_\mu (1 - \frac{2}{3} \gamma^5) - \frac{1}{\not{p} + \not{q}} \gamma^\alpha + \\ \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{q}} \gamma_\mu (1 - \frac{2}{3} \gamma^5)] u(p). \quad (4)$$

۳. تحقیق درستی اتحاد وارد

مدل استاندارد یک تئوری پیمانه ای است. به عبارت دیگر، بنا

بر اصل ناوردایی پیمانه ای باید همه چیز تحت تبدیل

$$\varepsilon_\alpha(q) \rightarrow \varepsilon_\alpha(q) + a q_\alpha, \quad (5)$$

تغییر نکند که در آن q چاربردار اندازه حرکت خطی فوتون

است و a ثابتی است اختیاری. بنابراین اگر ما دامنه را به

صورت $m_{tot} = \varepsilon_\alpha(q) T^\alpha$ بنویسیم، آنگاه تحت تبدیل (۵)،

باید m_{tot} ناوردا بماند؛ یعنی ناوردایی پیمانه ای ایجاب می کند

که

$$q_\alpha T^\alpha = 0.$$

برای پراکندگی مفروض این شرط را چک می کنیم

$$q_\alpha T^\alpha = \frac{eGf}{\sqrt{2}} \bar{u}(k') \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v(k) \\ \bar{u}(p') [\gamma_\mu (1 - \frac{2}{3} \gamma^5) \frac{(\not{p} + \not{q}) \not{q}}{(q+p)^2} + \\ \frac{\not{q} (\not{p}' - \not{q})}{(p'-q)^2} \gamma_\mu (1 - \frac{2}{3} \gamma^5)] u(p),$$

با استفاده از معادله دیراک ذره آزاد

$$\not{p} u(p) = 0,$$

$$\bar{u}(p) \not{p}' = 0,$$

و رابطه

$$m_{tot} = \frac{eG_f}{\sqrt{2}} \varepsilon_\alpha(q) \bar{u}(k') \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v(k) \times \\ \bar{u}(p') \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{q}} \gamma_\mu (1 - \frac{2}{3} \gamma^5) u(p) + O(\frac{1}{s}),$$

m_{tot}^\dagger به صورت زیر نوشته می‌شود

$$m_{tot}^\dagger = \frac{eG_f}{\sqrt{2}} \varepsilon_\beta^*(q) \bar{v}(k) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) u(k') \times \\ \bar{u}(p) \gamma_\nu (1 - \frac{2}{3} \gamma^5) \frac{1}{\not{p}' - \not{q}} \gamma^\beta u(p'),$$

در نتیجه برای رابطه (۷) خواهیم داشت

$$|m_{tot}|^2 = -\frac{e^2 G_f^2}{(p' - q)^2} \times \\ [1 \dots k'.q k.p + 2 k'.p k.q]. \quad (۸)$$

در به دست آوردن عبارت بالا، از رابطه کامل بودن ویژه

اسپینورهای دیراک برای فرمیونی با چار ممتوم دلخواه p

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}(p) \bar{u}^{(s)}(p) = \not{p},$$

و همچنین رابطه کامل بودن برای بردارهای قطبش یک فوتون

حقیقی با چار اندازه حرکت q

$$\sum_T \varepsilon_\alpha^{*T}(q) \varepsilon_\beta^T(q) \rightarrow -g_{\alpha\beta},$$

و روابط مربوط به رد γ - ماتریسهای دیراک استفاده کرده‌ایم.

باید توجه کرد که با پذیرفتن فرض $s \rightarrow \infty$ ما هنوز مقید

به بازه انرژی $m_e < E < M_W$ هستیم که E انرژی هر یک از

ذرات فرودی در مختصات مرکز جرم است. به عبارت دیگر

فرض $s \rightarrow \infty$ بیان می‌کند که s در مقایسه با مجذور جرم

الکترون زیاد است. بنابراین هنوز استفاده از ثابت فرمی در

محاسباتمان اعتبار دارد.

برای محاسبه سطح مقطع کل، جرم الکترون را که تا اینجا

از آن صرف نظر کرده بودیم، به مسئله باز می‌گردانیم. تنها باید

توجه کرد که با حفظ m_e ، انتشارگر فرمیونی در رابطه (۸) به

صورت زیر تغییر می‌کند

$$\frac{1}{(\not{p}' - \not{q}) - m_e} = \frac{1}{-2p'.q},$$

مخرج کسر را به صورت زیر می‌نویسیم

دستگاه مختصات در جواب آخر تأثیری ندارد. بنابراین ما پراکندگی را در دستگاه مختصات مرکز جرم (COM) در نظر می‌گیریم.

F که شار ورودی است، در دستگاه مختصات مرکز جرم

به صورت زیر نوشته می‌شود

$$F = 4 \sqrt{(p.q)^2 - m_\gamma^2 m_e^2},$$

و چون فوتون حقیقی یک ذره با جرم صفر است، لذا برای سطح

مقطع دیفرانسیلی در دستگاه مختصات مرکز جرم خواهیم

داشت

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{4 p.q} |m_{tot}|^2 \quad (۹)$$

$$\frac{d^3 \vec{P}'}{2E'} \frac{d^3 \vec{K}}{2E_k} \frac{d^3 \vec{K}'}{2E_{k'}} \delta^4(p + q - p' - k - k').$$

متوسط مجذور دامنه پراکندگی، $|m_{tot}|^2$ ، به صورت زیر تعریف

می‌شود

$$|m_{tot}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{pol} m_{tot} m_{tot}^\dagger, \quad (۷)$$

که در عبارت بالا ما ضمن اینکه روی حالت‌های مختلف اسپینی

ذرات نهایی جمع می‌زنیم، روی حالت‌های ممکن قطبش ذرات

فرودی نیز میانگین‌گیری می‌کنیم. از آنجایی که فوتون فیزیکی،

فقط دارای دو حالت قطبش طولی و عرضی می‌باشد، لذا

چهار حالت ممکن اسپینی برای فوتون و الکترون فرودی

وجود دارد.

۲.۴. سطح مقطع کل

برای محاسبه سطح مقطع کل کافی است از رابطه (۹) روی

بردار اندازه حرکت خطی ذرات نهایی انتگرال بگیریم. اما ما

علاقه‌مند به محاسبه سطح مقطع در انرژی‌های بالا هستیم.

بنابراین فرض می‌کنیم $s \rightarrow \infty$ که s مجذور انرژی کل در

مختصات مرکز جرم است و برابر است با $s = (p+q)^2$.

در شرایط $s \rightarrow \infty$ تنها دومین جمله در رابطه (۴) اهمیت پیدا

می‌کند. یعنی داریم

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{e^2 G_f^2 s E}{\pi^2 m_e} \int_{-1}^1 E' dE' \int d(\cos \theta) \times \left(1 - \frac{E'}{E} + \frac{E'^2}{\lambda E^2} (1 - \cos^2 \theta) \right) \frac{1}{m_e^2 + \frac{s E'}{2 E} (1 + \cos \theta)} \quad (12)$$

بعضی از کمیت‌های ناوردایی که برای رسیدن به رابطه (۱۲) از رابطه (۱۱) استفاده می‌شوند، عبارتند از

$$\begin{aligned} p \cdot q &= 2E^2, \\ s &= (p+q)^2 = 2p \cdot q = 2E^2, \\ q \cdot p' &= EE'(1 + \cos \theta), \\ p \cdot p' &= EE'(1 - \cos \theta), \\ r &= p+q-p' \Rightarrow r^2 = 2E(E-E'), \\ r \cdot p &= E(2E-E'(1-\cos \theta)), \\ r \cdot q &= E(2E-E'(1+\cos \theta)), \\ r \cdot p' &= 2EE'. \end{aligned}$$

و در نتیجه، برای سطح مقطع کل عبارت تحلیلی زیر را خواهیم داشت

$$\sigma = \frac{1}{2} \alpha G_f^2 E^2 \ln \left(\frac{s}{\lambda m_e^2} \right), \quad (13)$$

که α ثابت ساختار ریز است و s برابر است با $4E^2$.

به این ترتیب یک عبارت تحلیلی برای سطح مقطع پراکندگی $\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}$ به دست می‌آوریم. همان‌طور که از رابطه (۱۳) معلوم است، محدوده اعتبار درستی سطح مقطع، بازه $m_e < E$ می‌باشد. البته این شرط دور از انتظار نیست، چرا که این نامعادله همان فرض اساسی بود که در هنگام انتگرال‌گیری در نظر گرفتیم.

۵. فضای ناجابه‌جایی

در فضا-زمان ناجابه‌جایی، مختصات فضا-زمان با هم جابه‌جا نمی‌شوند. یعنی در رابطه جابه‌جایی زیر صدق می‌کند

$$[x^\mu, x^\nu]_* \equiv x^\mu * x^\nu - x^\nu * x^\mu = i\theta^{\mu\nu}, \quad (14)$$

که در آن $\theta^{\mu\nu}$ یک تانسور پاد متقارن و ثابت است و همان‌طور که از رابطه فوق بر می‌آید، دارای بعد مجذور طول است.

$$\begin{aligned} -2p' \cdot q &= -2((p+q) - p + p') \cdot q = \\ &= -2(2E^2 - p \cdot q + EE'(1 + \cos \theta)). \end{aligned} \quad (9)$$

در به دست آوردن تساوی آخر، امتداد برخورد ذرات فرودی را در راستای \hat{z} انتخاب کرده‌ایم. همچنین فرض کردیم θ ، زاویه پراکندگی الکترون نسبت به راستای \hat{z} باشد. از طرفی

$$\begin{aligned} s &= (p+q)^2 = m_e^2 + 2p \cdot q, \\ \Rightarrow p \cdot q &= \frac{s - m_e^2}{2}. \end{aligned}$$

در نهایت، رابطه (۹) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$-(m_e^2 + \frac{s E'}{2 E} (1 + \cos \theta)).$$

در نتیجه رابطه (۶) به شکل زیر ساده می‌شود

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{e^2 G_f^2}{2^4 \pi^2 p \cdot q} \times \\ &= \frac{(1 \cdot 0 \cdot q_\mu p_\nu + 2 q_\nu p_\mu) k'^\mu k^\nu}{m_e^2 + \frac{s E'}{2 E} (1 + \cos \theta)} \times \\ &= \frac{d^3 \bar{P}'}{E'} \frac{d^3 \bar{K}}{E_k} \frac{d^3 \bar{K}'}{E_{k'}} \delta^4(p+q-p'-k-k') \quad (10) \end{aligned}$$

از طرفی ما رابطه انتگرالی زیر را داریم [۱۲]

$$\int \frac{d^3 \bar{K}}{E_k} \frac{d^3 \bar{K}'}{E_{k'}} \delta^4(k+k'-r) k^\mu k'^\nu = \frac{\pi}{6} (r^\mu g^{\mu\nu} + 2r^\mu r^\nu).$$

حالا با دانستن رابطه بالا و تعریف به صورت زیر

$$r = p+q-p',$$

رابطه (۱۰) به عبارت زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{e^2 G_f^2}{2^4 \pi^2 p \cdot q m_e^2 + \frac{s E'}{2 E} (1 + \cos \theta)} \times \\ &= \frac{d^3 \bar{P}'}{E'} (1 \cdot 4 p \cdot q r^2 + 2 \cdot 8 r \cdot p r \cdot q). \end{aligned} \quad (11)$$

با جایگزین کردن $d^3 \bar{P}'$ با $2\pi d(\cos \theta) E' dE'$ که E' انرژی الکترون نهایی است؛ داریم

$$a_\mu \theta^{\mu\nu} b_\nu \equiv a \cdot \theta \cdot b = \bar{\theta} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})$$

$$a_\mu \theta^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} \theta^{\alpha\beta} b_\beta \equiv a \cdot \theta \cdot \theta \cdot b = |\bar{\theta}|^2 (\bar{a} \cdot \bar{b}) - (\bar{\theta} \cdot \bar{a})(\bar{\theta} \cdot \bar{b}),$$
(۱۸)

که در عبارت بالا، a و b دو چار بردار دلخواه اند و به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$a^\mu = (a, \bar{a}),$$

$$b^\mu = (b, \bar{b}).$$

اثبات اتحادهای رابطه (۱۸) با استفاده از روابط (۱۶) و (۱۷) سراسر است.

قواعد فاینمن از کنش به دست می‌آیند. ظهور رأسهای جدید مثل $\gamma\gamma z$ ، $\gamma\gamma\gamma$ و $\gamma\nu\bar{\nu}$ خاص فضای ناجابه‌جایی است و در مدل استاندارد چنین جفت شدگی‌هایی بین ذرات نداریم [۱۴].

برای برهمکنش $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ در فضای ناجابه‌جایی و در مرتبه اول θ ، تنها دیاگرام فاینمن در شکل ۲ را می‌توان رسم کرد.

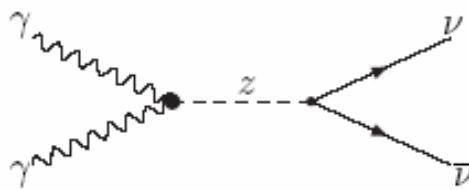
رأسی را که سیاه کرده‌ایم، در نتیجه ناجابه‌جا بودن فضا اتفاق می‌افتد. در صورتی که رأس $z\nu\bar{\nu}$ در مدل استاندارد فضای معمولی نیز وجود دارد. همان طور که می‌بینیم در فضای ناجابه‌جایی فوتون و نوترینو از طریق نمودار درختی با هم برهمکنش می‌کنند.

اما در مرتبه θ^2 برای برهمکنش مذکور، چهار دیاگرام فاینمن در شکل ۳ در سطح مقطع پراکندگی کل نقش دارند.

با توجه به این که پارامتر θ خیلی کوچک است، شاید این سؤال پیش بیاید که بحث در مورد سطح مقطع پراکندگی تا مرتبه θ^2 چه ضرورتی خواهد داشت؟ اما با کمی دقت و با استفاده از تحلیل ابعادی نشان می‌دهیم که سطح مقطع دیاگرامهای شکل ۳ در مقایسه با دیاگرامهای شکل ۲، دارای مرتبه بزرگی یکسانی هستند.

در دامنه پراکندگی دیاگرام شکل ۲، پارامتر $\frac{\alpha\theta}{M_z^2}$ را

خواهیم داشت. در واقع $\frac{1}{M_z^2}$ ، انتشارگر بوزون z است. پس



شکل ۲. دیاگرام فاینمن برای پراکندگی $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ در فضای ناجابه‌جایی تا مرتبه θ .

ضرب ستاره که در رابطه (۱۴) به کار رفته است، ویژگی فضای ناجابه‌جایی است و برای دو میدان $A(x)$ و $B(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A(x) * B(x) \equiv A(x) \exp\left(\frac{i}{\Lambda} \bar{\theta}_\mu \theta^{\mu\nu} \bar{\partial}_\nu\right) B(x)$$
(۱۵)

$$= A(x)B(x) + \frac{i}{\Lambda} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu A(x) \partial_\nu B(x) + O(\theta^2),$$

جمله آخر از بسط تابع نمایی به دست می‌آید. با فرض کوچک بودن پارامتر θ ، می‌توان از جملات مرتبه θ^2 و بالاتر صرف نظر کرد. از همین رابطه پیداست که در حد $\theta \rightarrow 0$ ، فضای معمولی به دست می‌آید.

برای حفظ یکانی بودن نظریه میدان مربوط، سطر اول و ستون اول ماتریس $\theta^{\mu\nu}$ را صفر در نظر می‌گیرند، یعنی داریم

$$\theta^{\mu\mu} = \theta^{\mu\mu} = 0, \quad \mu = 0, \dots, 3$$
(۱۶)

بنابراین ماتریس $\theta^{\mu\nu}$ دارای سه مولفه مستقل خواهد بود. با استفاده از این سه مولفه مستقل، می‌توان یک بردار به صورت زیر ساخت

$$\bar{\theta} = (\theta^{23}, -\theta^{13}, \theta^{12}).$$
(۱۷)

پارامتر ناجابه‌جایی، Λ ، از روی بردار $\bar{\theta}$ به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{|\bar{\theta}|}}.$$

ارائه دو اتحاد زیر برای انجام محاسبات بعدی در فضای ناجابه‌جایی مفید خواهد بود

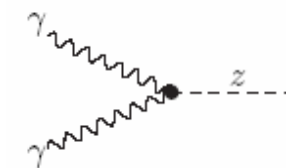
عبارت $e\theta$ را به ازای هر رأس ناجابه‌جایی در دامنه پراکندگی خواهیم داشت و چون نوترینو بدون جرم است، پس سطح مقطع متناسب با $\alpha^2 \theta^2 E^6$ یا $\frac{\alpha^2 E^6}{\Lambda^4}$ خواهد بود که توان E با توجه به آنالیز ابعادی قابل تشخیص است. مرتبه بزرگی سطح مقطع چهارمین دیاگرام در شکل ۳ به علت وجود انتشارگر بوزونی، در مقایسه با سه دیاگرام دیگر، به نسبت $\frac{1}{M_z^2}$ کوچکتر است. به این دلیل در تحلیل ابعادی فوق گنجانده نشد.

با انتخاب $\Lambda = 100 \text{ GeV}$ ، ضمن اینکه می‌دانیم جرم بوزون Z ، 90 GeV است، مشاهده می‌شود که این دو سطح مقطع دارای بزرگی یکسانی هستند.

بنا بر استدلال فوق و با توجه به نقش مهم این گونه برهمکنش‌ها در کیهان‌شناسی و در ستاره‌شناسی، اهمیت بررسی برهمکنش‌های فوتون و نوترینو تا مرتبه θ^2 در فضای ناجابه‌جایی نیز روشن است.

اما در این مقاله تنها به بررسی برهمکنش $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ در فضای ناجابه‌جایی تا مرتبه θ می‌پردازیم. مطالعه برهمکنش‌های فوتون و نوترینو در مراتب بالاتر اختلال، خود به تنهایی دارای اهمیت است.

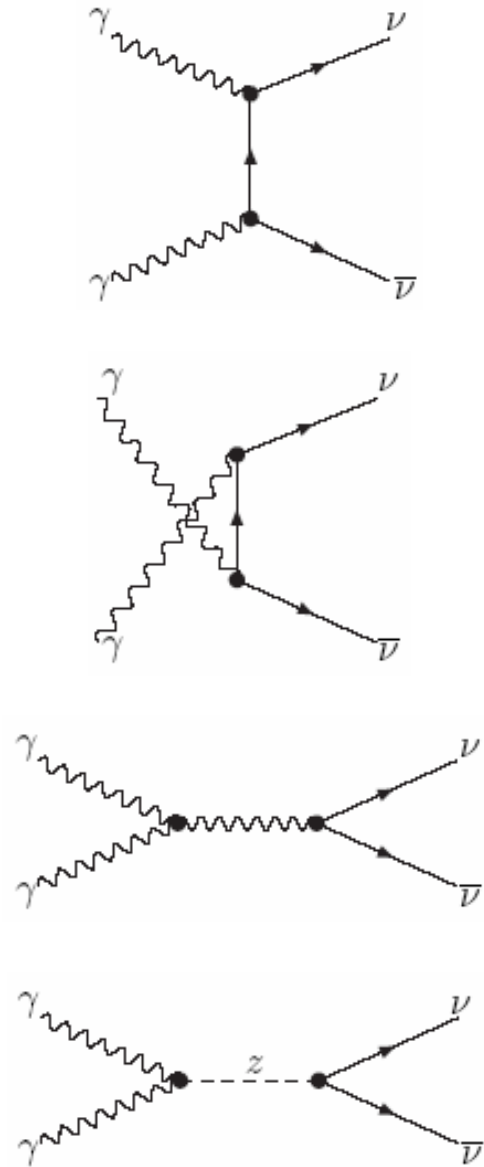
قاعده فاینمن برای رأس برهمکنش $\gamma\gamma Z$ که در شکل زیر نشان داده شده است، به وسیله رابطه (۱۹) داده می‌شود



$$\Gamma^{\mu\nu\rho} = -2e\sin^2\theta_W k_{z\gamma\gamma} \Theta((\mu, k_1), (\nu, k_2), (\rho, k_3)) \quad (19)$$

که در آن، $k_{z\gamma\gamma}$ یک ثابت از مرتبه $0/1$ است [۱۵] و

$$\Theta((\mu, k_1), (\nu, k_2), (\rho, k_3)) \equiv -\theta^{\mu\nu} (k_1^\rho (k_2 \cdot k_3) - k_2^\rho (k_1 \cdot k_3)) + \theta^{\mu\alpha} k_{1\alpha} (g^{\nu\rho} (k_2 \cdot k_3) - k_2^\rho k_3^\nu)$$



شکل ۳. دیاگرام‌های فاینمن برای پراکندگی $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ در فضای ناجابه‌جایی تا مرتبه θ^2 .

در سطح مقطع عبارت $\left(\frac{\alpha\theta}{M_z^2}\right)^2$ ظاهر خواهد شد. تنها پارامتر دیگری که جزء اطلاعات مسئله است، انرژی ذرات فرودی در دستگاه مختصات مرکز جرم، E ، است. در نتیجه، بعد درست برای سطح مقطع توسط رابطه $\frac{\alpha^2 \theta^2 E^6}{M_z^2}$ یا $\frac{\alpha^2 E^6}{\Lambda^4 M_z^2}$ داده خواهد شد. از طرف دیگر، در اولین سه دیاگرام شکل ۳،

$$\left. \begin{aligned} & -\theta^{v\alpha} k_{r\alpha} \left(g^{\rho\mu} (k_1.k_r) - k_1^\rho k_r^\mu \right) \\ & + k_r.\theta.k_1 \left(k_r^\rho g^{\mu\nu} - k_r^\mu g^{\nu\rho} \right) \end{aligned} \right\} .$$

$$\left. \begin{aligned} & -\theta^{v\alpha} k_{1\alpha} \left(g^{\rho\mu} (k_r.k_1) - k_r^\rho k_1^\mu \right) \\ & -\theta^{\rho\alpha} k_{1\alpha} \left(g^{\mu\nu} (k_r.k_1) - k_r^\mu k_1^\nu \right) \\ & + k_1.\theta.k_r \left(k_r^\mu g^{\nu\rho} - k_r^\nu g^{\rho\mu} \right) \\ & + \text{cyclical permutations of } (\mu_i, k_i). \end{aligned} \right\} .$$

با استفاده از رابطه (۱۸) و با توجه به این که در دستگاه مختصات مرکز جرم، مجموع بردار اندازه حرکت خطی ذرات فرودی، k_1 و k_r ، صفر است، جملات پنجم، دهم و یازدهم داخل کروشه عبارت بالا سهمی ندارند. رابطه بالا به شکل زیر ساده می‌شود

$$m = \frac{-ie^\gamma k_{z\gamma\gamma}}{M_z^\gamma} \varepsilon_\mu(k_1) \varepsilon_\rho(k_r) \bar{u}(p_1) \gamma_\nu (1-\gamma^5) v(p_r) \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & (k_1.k_r) \left(\theta^{v\rho} k_1^\mu - \theta^{\mu\nu} k_r^\rho - \theta^{\rho\mu} (k_1^\nu - k_r^\nu) \right) \\ & + \theta^{\mu\alpha} \left(\gamma(k_1.k_r) k_{r\alpha} g^{\nu\rho} - k_{r\alpha} k_1^\nu k_r^\rho + k_{1\alpha} k_r^\nu k_r^\rho \right) \\ & + \theta^{\rho\alpha} \left(\gamma(k_1.k_r) k_{1\alpha} g^{\mu\nu} - k_{1\alpha} k_r^\mu k_r^\nu + k_{r\alpha} k_1^\mu k_1^\nu \right) \\ & - \theta^{v\alpha} \left(k_{1\alpha} k_r^\rho k_r^\mu + k_{r\alpha} k_1^\rho k_1^\mu \right) \end{aligned} \right\} .$$

در به دست آوردن رابطه بالا از قانون بقا چهار ممتوم در رأس $\gamma\gamma z$ ، $k_1 + k_r + k_\gamma = 0$ ، استفاده کرده‌ایم، ضمن این که جملات حاوی k_r^ν را برابر با صفر قرار دادیم. چرا که پس از اثر k_r^ν روی جمله جریان نوترینو در دامنه خواهیم داشت

$$k_r^\nu \bar{u}(p_1) \gamma_\nu (1-\gamma^5) v(p_r) = \bar{u}(p_1) k_\gamma (1-\gamma^5) v(p_r) ,$$

از طرف دیگر داریم

$$k_\gamma = -p_1 - p_r ,$$

و در آخر با استفاده از معادله دیراک برای نوترینوها، صفر بودن جمله مذکور روشن می‌شود.

نظریه ناجابه‌جایی نیز یک نظریه پیمان‌های است. در اینجا نیز می‌توان به راحتی نشان داد که دامنه پراکندگی برهمکنش $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ تحت تبدیل (۵) ناوردا می‌ماند. به عبارت دیگر

$$\varepsilon_\rho(k_r) \bar{u}(p_1) \gamma_\nu (1-\gamma^5) v(p_r) \times$$

$$k_{1\mu} \left\{ \begin{aligned} & (k_1.k_r) \left(\theta^{v\rho} k_1^\mu - \theta^{\mu\nu} k_r^\rho - \theta^{\rho\mu} (k_1^\nu - k_r^\nu) \right) \\ & + \theta^{\mu\alpha} \left(\gamma(k_1.k_r) k_{r\alpha} g^{\nu\rho} - k_{r\alpha} k_1^\nu k_r^\rho + k_{1\alpha} k_r^\nu k_r^\rho \right) \\ & + \theta^{\rho\alpha} \left(\gamma(k_1.k_r) k_{1\alpha} g^{\mu\nu} - k_{1\alpha} k_r^\mu k_r^\nu + k_{r\alpha} k_1^\mu k_1^\nu \right) \\ & - \theta^{v\alpha} \left(k_{1\alpha} k_r^\rho k_r^\mu + k_{r\alpha} k_1^\rho k_1^\mu \right) \end{aligned} \right\} = 0 .$$

همچنین در آخرین جمله از عبارت بالا، از تعاریف $\mu_1 \equiv \mu$ ، $\mu_2 \equiv \nu$ و $\mu_3 \equiv \rho$ بهره برده‌ایم.

۶. دامنه پراکندگی

دیگرام فاینمن برای پراکندگی $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ در فضای ناجابه‌جایی و تا مرتبه θ را در شکل ۲ نشان داده‌ایم. با استفاده از رابطه (۱۹)، دامنه پراکندگی برای

$$\gamma(k_1, \varepsilon_\mu) + \gamma(k_r, \varepsilon_\rho) \rightarrow \nu(p_1) + \bar{\nu}(p_r) ,$$

به صورت زیر نوشته می‌شود

$$m = \frac{-ie^\gamma k_{z\gamma\gamma}}{M_z^\gamma} \varepsilon_\mu(k_1) \varepsilon_\rho(k_r) \bar{u}(p_1) \gamma_\nu (1-\gamma^5) v(p_r) \times \Theta^{\mu\nu\rho} ,$$

که در آن $\Theta^{\mu\nu\rho}$ به ترتیب زیر تعریف می‌شود

$$\Theta^{\mu\nu\rho} \equiv \left\{ \begin{aligned} & -\theta^{\mu\nu} \left(k_1^\rho (k_r.k_1) - k_r^\rho (k_1.k_r) \right) \\ & + \theta^{\mu\alpha} k_{1\alpha} \left(g^{\nu\rho} (k_r.k_1) - k_r^\nu k_1^\rho \right) \\ & - \theta^{v\alpha} k_{1\alpha} \left(g^{\rho\mu} (k_r.k_1) - k_r^\rho k_1^\mu \right) \\ & - \theta^{\rho\alpha} k_{1\alpha} \left(g^{\mu\nu} (k_r.k_1) - k_r^\mu k_1^\nu \right) \\ & + k_1.\theta.k_r \left(k_r^\mu g^{\nu\rho} - k_r^\nu g^{\rho\mu} \right) \\ & - \theta^{v\rho} \left(k_r^\mu (k_r.k_1) - k_r^\mu (k_1.k_r) \right) \\ & + \theta^{v\alpha} k_{r\alpha} \left(g^{\rho\mu} (k_r.k_1) - k_r^\rho k_1^\mu \right) \\ & - \theta^{\rho\alpha} k_{r\alpha} \left(g^{\mu\nu} (k_r.k_1) - k_r^\mu k_1^\nu \right) \\ & - \theta^{\mu\alpha} k_{r\alpha} \left(g^{\nu\rho} (k_r.k_1) - k_r^\nu k_1^\rho \right) \\ & + k_r.\theta.k_1 \left(k_1^\nu g^{\rho\mu} - k_1^\rho g^{\mu\nu} \right) \\ & - \theta^{\rho\mu} \left(k_r^\nu (k_1.k_r) - k_1^\nu (k_r.k_1) \right) \\ & + \theta^{\rho\alpha} k_{r\alpha} \left(g^{\mu\nu} (k_1.k_r) - k_1^\mu k_r^\nu \right) \\ & - \theta^{\mu\alpha} k_{r\alpha} \left(g^{\nu\rho} (k_1.k_r) - k_1^\nu k_r^\rho \right) \end{aligned} \right\} .$$

$$E^\nu = |\vec{P}|^\nu,$$

نتیجه می‌شود که انرژی آنها نیز با هم برابر باشد. به طور خلاصه، چاربردار اندازه حرکت ذرات را به شکل زیر نمایش می‌دهیم

$$k_1 = (E, \vec{K}),$$

$$k_2 = (E, -\vec{K}),$$

$$p_1 = (E_\nu, \vec{P}_1),$$

$$p_2 = (E_{\bar{\nu}}, \vec{P}_2).$$

پس از انتگرال‌گیری از رابطه (۲۰) روی بردار اندازه حرکت خطی پاد نوترینوی تولید شده خواهیم داشت

$$d\sigma = \frac{|\overline{m}|^\nu}{4\pi^\nu \times 4k_1 k_2} \frac{d^3 \vec{P}_1}{2E_\nu} \frac{d^3 \vec{P}_2}{2E_{\bar{\nu}}} \delta(E_\nu + E_{\bar{\nu}} - \nu E).$$

نتیجه حذف تابع دلتا، شرط $\vec{P}_2 = -\vec{P}_1$ است. از همین رابطه، تساوی $E_{\bar{\nu}} = E_\nu \equiv E'$ به دست می‌آید. در نهایت، پس از جایگزینی $d^3 \vec{P}$ با $d\beta d\cos\alpha dE'$ و انتگرال‌گیری روی E' به عبارت زیر برای سطح مقطع دیفرانسیلی می‌رسیم

$$d\sigma = \frac{|\overline{m}|^\nu}{4\pi^\nu \times 4k_1 k_2} d\beta d\cos\alpha, \quad E' = E.$$

حالا به محاسبه $|\overline{m}|^\nu$ می‌پردازیم. $|\overline{m}|^\nu$ به صورت زیر بر حسب m و m^\dagger نوشته می‌شود

$$|\overline{m}|^\nu = \frac{1}{4} \sum_{pol} m m^\dagger. \quad (21)$$

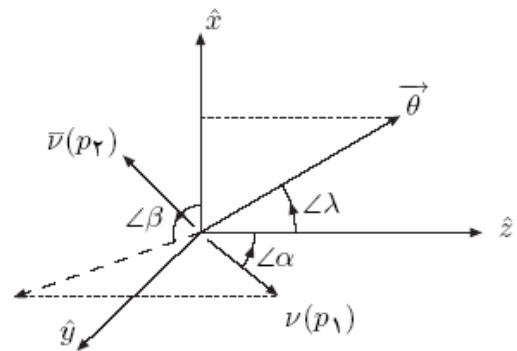
در واقع، ضریب ۴ به کلیه حالت‌های قطبش دو فوتون اولیه برمی‌گردد. m^\dagger به صورت زیر نوشته می‌شود

$$m^\dagger = \frac{ie^\nu k_{z\gamma\gamma}^*}{M_z^\nu} \varepsilon_\kappa^*(k_1) \varepsilon_\beta^*(k_2) \bar{\nu}(p_2) \gamma_\eta (1 - \gamma^5) u(p_1) \times \left\{ \begin{aligned} & (k_1 k_2) \left(\theta^{\eta\beta} k_1^\kappa - \theta^{\kappa\eta} k_2^\beta - \theta^{\beta\kappa} (k_1^\eta - k_2^\eta) \right) \\ & + \theta^{\kappa\varphi} \left(\nu(k_1 k_2) k_{2\varphi} g^{\eta\beta} - k_{2\varphi} k_1^\eta k_2^\beta + k_{1\varphi} k_2^\eta k_1^\beta \right) \\ & + \theta^{\beta\varphi} \left(\nu(k_1 k_2) k_{1\varphi} g^{\kappa\eta} - k_{1\varphi} k_1^\kappa k_2^\eta + k_{2\varphi} k_1^\kappa k_1^\eta \right) \\ & - \theta^{\eta\varphi} \left(k_{1\varphi} k_2^\beta k_2^\kappa + k_{2\varphi} k_1^\beta k_1^\kappa \right) \end{aligned} \right\}.$$

پس از جایگذاری m و m^\dagger در رابطه (۲۱) و با استفاده از روابط کامل بودن برای نوترینوها و فوتونها که در بخش ۴.۲

$$\gamma(k_1) \longrightarrow \longleftarrow \gamma(k_2)$$

(الف)



(ب)

شکل ۴. پراکندگی $\nu\bar{\nu} \rightarrow \gamma\gamma$ در دستگاه مختصات مرکز جرم. حالت (الف) ذرات قبل برخورد و (ب) بعد از برخورد.

۷. سطح مقطع پراکندگی برهمکنش $\nu\bar{\nu} \rightarrow \gamma\gamma$ در فضای ناجابه‌جایی

۱.۷. سطح مقطع دیفرانسیلی

سطح مقطع دیفرانسیلی از رابطه زیر به دست می‌آید

$$d\sigma = \frac{|\overline{m}|^\nu}{4\pi^\nu \times 4k_1 k_2} \frac{d^3 \vec{P}_1}{2E_\nu} \frac{d^3 \vec{P}_2}{2E_{\bar{\nu}}} \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2). \quad (20)$$

قبل از اینکه به محاسبه متوسط مجذور دامنه بپردازیم، بهتر است عبارت بالا را کمی ساده‌تر کنیم. برای این منظور دستگاه مختصات مرکز جرم را در نظر می‌گیریم. شکل ۴ نشان دهنده حالت ذرات فرودی و خروجی در این دستگاه است.

در شکل ۴، زاویه α و β به ترتیب زاویه قطبی و سمتی بردار اندازه حرکت خطی نوترینوی تولید شده است. همچنین فرض می‌کنیم $\vec{\theta}$ در صفحه xz واقع است. در آخر روی زاویه λ میانگین می‌گیریم.

چون پراکندگی فوق در دستگاه مختصات مرکز جرم اتفاق می‌افتد، مجموع ممنتوم ذرات فرودی صفر است. از طرفی فوتونها دارای جرم صفر هستند و بنابر رابطه انرژی اندازه حرکت خطی ذرات نسبی

جدول ۱. سطح مقطع بعضی از برهمکنش‌های اورکا در چند مقدار انرژی. داده‌های ستون آخر با فرض $A = 100 \text{ GeV}$ به دست آمده است. مقادیر مربوط به سطح مقطع، بر حسب cm^2 می‌باشد.

$\frac{E}{\text{MeV}}$	$\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}}$	$\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow \gamma\nu\bar{\nu}}$	$\sigma_{\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}}$	$\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}}^{NC}$
10^{-1}	$1/2 \times 10^{-73}$	$1/3 \times 10^{-62}$	—	$2/5 \times 10^{-72}$
۱	$1/2 \times 10^{-67}$	$1/3 \times 10^{-52}$	—	$2/5 \times 10^{-66}$
۱۰	$2/6 \times 10^{-62}$	$2/3 \times 10^{-50}$	—	$2/5 \times 10^{-60}$
10^2	$2/6 \times 10^{-56}$	$2/3 \times 10^{-48}$	$8/3 \times 10^{-43}$	$2/5 \times 10^{-54}$
10^3	$2/6 \times 10^{-50}$	$2/3 \times 10^{-46}$	$1/2 \times 10^{-40}$	$2/5 \times 10^{-48}$
10^4	$2/6 \times 10^{-44}$	$2/3 \times 10^{-44}$	$1/5 \times 10^{-38}$	$2/5 \times 10^{-42}$

$$\sigma \cong 79 \left| k_{z\gamma\gamma} \right|^2 \frac{\alpha^2 E^6}{\Lambda^4 M_z^4} \quad (22)$$

بنابراین سطح مقطع پراکنش $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ در فضای ناجابه‌جایی به ازای هر مقدار انرژی از رابطه (۲۲) به دست می‌آید. اما باید دقت کرد که نظریه ناجابه‌جایی یک نظریه اختلالی است. یعنی اعتبار مقادیر مربوط به سطح مقطع در رابطه (۲۲)، مشروط به انتخاب درست پارامتر E در مقایسه با Λ است. چرا که در رابطه (۱۵)، وقتی در فضای ممتوم نوشته شود، با پذیرفتن شرط

$$\left(\frac{p}{\Lambda} \right)^2 \ll 1 \quad \text{یا} \quad p \cdot \theta \cdot p \ll 1$$

مجاز به چشم پوشی از جملات مرتبه θ^2 و بالاتر هستیم. حالا اگر $A = 100 \text{ GeV}$ انتخاب شود، انرژیها در رابطه (۲۲) تا حدی تغییر می‌کنند که شرط $E \ll 100 \text{ GeV}$ را برآورده کنند.

۸. خلاصه

در این مقاله، ضمن معرفی اهمیت بررسی برهمکنش‌های اورکا در ستاره‌شناسی، سطح مقطع پراکنش $\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ را به دست آوردیم. همچنین با فرض وجود ناجابه‌جایی فضا، سطح مقطع پراکنش $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ را تا مرتبه اول θ نیز محاسبه کردیم. نتایج این محاسبات در روابط (۱۳) و (۲۲)

ذکر کردیم و پس از انجام یکسری محاسبات طولانی، رابطه زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} |\overline{m}|^2 = & 2 \left(\frac{e^2}{M_z^2} \right)^2 \left| k_{z\gamma\gamma} \right|^2 \nu(k_1, k_2)^2 \times \\ & \left\{ 2\theta^2 k_1 \cdot p_1 k_1 \cdot p_2 + 2p_1 \cdot \theta \cdot \theta k_1 \cdot k_2 \cdot p_2 \right. \\ & + 2p_2 \cdot \theta \cdot \theta k_1 \cdot k_2 \cdot p_1 - k_1 \cdot \theta \cdot \theta k_1 \cdot p_1 \cdot p_2 \\ & + k_1 \cdot \theta \cdot \theta p_1 \cdot k_2 \cdot (k_2 - 2p_1) \\ & \left. + 2p_1 \cdot \theta \cdot k_2 \cdot p_2 \cdot \theta \cdot k_1 + 2p_1 \cdot \theta \cdot k_1 \cdot p_2 \cdot \theta \cdot k_2 \right\}. \end{aligned}$$

همچنین در به دست آوردن عبارت بالا از اتحادهای زیر استفاده کرده‌ایم

$$\begin{aligned} k_1 \cdot \theta \cdot \theta k_1 &= k_2 \cdot \theta \cdot \theta k_2 = -k_1 \cdot \theta \cdot \theta k_2 \\ &= E^2 \theta^2 \sin^2 \lambda, \\ k_1 \cdot \theta \cdot \theta p_1 &= k_2 \cdot \theta \cdot \theta p_2 = -k_1 \cdot \theta \cdot \theta p_2 = -k_2 \cdot \theta \cdot \theta p_1 \\ &= E^2 \theta^2 (\sin^2 \lambda \cos \alpha - \sin \lambda \cos \lambda \sin \alpha \cos \beta). \end{aligned}$$

درستی تساویهای فوق با استفاده از اتحادهای رابطه (۱۸) قابل تحقیق است.

۲.۷. سطح مقطع کل

حالا با معلوم بودن $|\overline{m}|^2$ و انتگرال گیری روی زاویه فضایی $d\Omega$ و البته متوسط گیری روی زاویه λ ، سطح مقطع کل را به صورت زیر به دست می‌آوریم

آنچه که از داده‌های جدول استنباط می‌شود این است که سطح مقطع پراکندگی $\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}$ در هر مقدار مجاز انرژی بر سطح مقطع دیگر برهمکنش‌های اورکا غالب است. از طرفی سطح مقطع پراکندگی کشسان فوتون و نوترینو در فضای ناجابه‌جایی در مقایسه با مورد مشابه‌اش در فضای جابه‌جایی بزرگتر است و لذا در صورت ناجابه‌جا بودن فضا، یک کانال ممکن برای از دست دادن انرژی ستاره‌ای است.

تشکر و قدردانی

قسمتی از هزینه‌های مربوط به پژوهش حاضر توسط معاونت محترم پژوهشی دانشگاه صنعتی اصفهان تأمین شده است.

آورده شده است. مقادیر عددی مربوط به این سطح مقاطع در انرژیهای مختلف در جدول ۱ ذکر شده است.

محاسبات سطح مقطع پراکندگیهای (۱) و (۲) به صورت تحلیلی در مراجع ذکر شده است [۳]. به دلیل اینکه این محاسبات در دو حد انرژی $m_e \ll E \ll M_W$ و $E \ll m_e$ انجام شده است، لذا برای $E = 10 \text{ MeV}$ و $E = 1 \text{ MeV}$ مقادیر تقریبی فقط ذکر شده است. اما همان طور که قبلا بیان کردیم، رابطه (۱۳) در محدوده $m_e \ll E$ اعتبار دارد. بنابراین نمی‌توان سطح مقطع پراکندگی $\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}$ در انرژیهای پایین را از این رابطه محاسبه کرد.

مراجع

1. M Harris, J Wang and V L Teplitz, *astro-ph/9707113 V1* **9** Jul (1997).
2. D G Yakovlev, A D Kaminker, O Y Gnedin and P Haensel, *Phys. Rept.* **354** (2001) 1.
3. D A Dicus and W W Repko, *Phys. Rev. D* **48** (1993) 5106; *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 569; D A Dicus, C Kao and W W Repko, *Phys. Rev. D* **59** (1999) 013005; A Abada, J Matias and R Pittau, *Nucl. Phys. B* **543** (1999) 255-268; A Abbasabadi, A Devoto and W W Repko, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 093001; A Abbasabadi, A Devoto, D A Dicus and W W Repko, *Phys. Rev. D* **59** (1999) 013012.
4. C N Yang, *Phys. Rev.* **77** (1950) 242.
5. K Bhattacharya and P B Pal, *Proc. Ind. Natl. Sci. Acad.* **70** (2004) 145-161.
6. R Shaisultanov, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 1586; Tzoo-Kang Chyi, Chien-Wen Hwang, W F Kao, Guey-Ln Lin, Kin-Wang Ng and Jie-Jun Tseng, *Phys. Lett. B* **466** (1999) 274.
7. E Witten, *Nucl. Phys. B* **268**(1986) 253; N Seiberg and E Witten, *JHEP* **9909**(1999) 032; D Kastler, *Lect. Notes Phys* **543** (2000) 131.
8. M Haghghat and F Loran, *Mod. Phys. Lett. A* **16** (2001) 1435; M Haghghat, S M Zebarjad and F Loran, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 016005; M Haghghat and F Loran, *Phys. Rev. D* **67** (2003) 096003; M Chaichian, M M Sheikh-Jabbari and A Tureanu, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 2716.
9. M Chaichian, P Presnajder, M M Sheikh-Jabbari and A Tureanu, *Eur. Phys. J. C* **29** (2003) 413; X Calmet, B Jurco, P Schupp, J Wess and M Wohlgenannt, *Eur. Phys. J. C* **23** (2002) 363.
10. F Halzen and A D Martin, *Quarks and Leptons*, John Wiley & Sons, (1984).
11. D Bailin, *Weak Interactions*, Adam Hilger Ltd, Bristol, (1982).
12. F Mandl and G Shaw, *Quantum Field Theory*, Wiley-Interscience, New York, (1966).
13. J Gomis and T Mehen, *Nucl. Phys. B* **591**(2000) 265.
14. B Melic, K Passek-Kumericki, J Trampetic, P Schupp and M Wohlgenannt, *hep-ph/0502249 V2* **5** May (2005).
15. G Duplancic, P Schupp and J Trampetic, *hep-ph/0309138 V1* **12** Sep. (2003).