مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۸، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۸۷

# فاصلهٔ اطلاعاتی و کاربرد آن در سریهای زمانی

**بهروز میرزا، طلوع تقیان و معصومه شریفیان پور**

دانشکدهٔ فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۸۶/۸/۱۳ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۸۶/۱۱/۲۴)

**چکیده**

در این مقاله برای مطالعهٔ سریهای زمانی به دست آمده از سیستمهای پیچیده روش جدیدی معرفی شده است. این روش بر پایهٔ استفاده از مفهوم آنتروپی و به‌کارگیری رابطه‌ای برای محاسبهٔ توزیع فواصل با نام واگرایی جانسون- شانون می‌باشد. در این مقاله به بررسی سریهای زمانی به دست آمده از توزیع فواصل در سیستم بیلیارد همچنین سری زمانی سیگنال الکتریکی قلب پرداخته شده است. به کمک این روش می‌توان بیلیارد آشوبی و غیر آشوبی همچنین قلب سالم را از قلب بیمار تفکیک کرد. این فرمولبندی می‌تواند در بررسی دیگر سریهای زمانی نیز مورد استفاده قرار گیرد.

**واژه‌های کلیدی:** بیلیارد، استادیوم، آشوب، سری زمانی، سیگنال الکتریکی قلب، آنتروپی اطلاعات

## ۱. مقدمه

در چند سال اخیر بررسی سریهای زمانی مختلف از اهمیت خاصی برخوردار گشته است. یک سری زمانی به رشته‌ای از داده‌ها اطلاق می‌شود که در بازه‌های زمانی متوالی اندازه‌گیری می‌شود. در تحلیل سری زمانی دو هدف دنبال می‌شود:

۱. مشخص کردن ماهیت پدیده‌ای که این سری زمانی را تولید کرده است.

۲. پیش بینی رفتار آینده سیستم مورد بررسی.

با بررسی سریهای زمانی می‌توان تا حدودی با ساز وکار سیستمهای تولیدکننده آنها آشنا شد. بدین منظور با ارائهٔ روشهایی مناسب در هر مورد می‌توان به آشکارسازی خواص و رفتار آینده سیستم پرداخت، به عنوان مثال می‌توان قیمت سهام را در بازار بورس بر اساس مدلی مناسب پیش بینی کرد. سیستم دیگری که با روش تحلیل سری زمانی قابل بررسی است، قلب انسان است. قلب انسان نمونه‌ای از یک سیستم پیچیده است. در اثر برهمکنش اجزای مختلف این سیستم، سیگنال خروجی آن افت وخیزهای پیچیده‌ای دارد. عملکرد متقابل سیستم سمپاتیک و پاراسمپاتیک دستگاه عصبی خودکار، فعالیت قلب را کنترل می‌کند[۱]. بیماری قلبی باعث اختلال در عملکرد این سیستم می‌شود. به همین دلیل دینامیک ضربان قلب سالم و بیمار متفاوت است.

تاکنون با روشهای متعددی مانند آنالیز چند فرکتالی، تحلیل موجک[۱]، حذف شیب[۲]، حذف شیب چند فرکتالی[۳]، خود متشابهی بسیط[۴] و مدل بازگشتی[۵] به بررسی این تفاوتها پرداخته شده است[۲ تا ۶].

همچنین امروزه به دلیل گسترش روز افزون تکنولوژی نانو و شباهت قطعاتی که کاربرد زیادی در ساختارهای نانو دارند با

۱. Wavelet transform modulus maxima

۲. Detrended Fluctuation Analysis

۳. Multi fractal-DFA

۴. Extended self -similarity

۵. Recursive model

مدلهای بیلیارد، بررسی آشوب کوانتومی در بیلیاردها مورد توجه ویژه‌ای قرار گرفته است[۷ و ۸]. در واقع بدون درک صحیحی از آشوب در مکانیک کوانتومی شناخت کامل این ساختارها غیر ممکن است. تاکنون مطالعات زیادی بر روی آشوب دستگاههای بیلیارد انجام شده است، اما هیچ معیار مشخص و قابل تعمیمی برای بررسی بیلیاردهای آشوبی و غیر آشوبی در مکانیک کوانتومی ارائه نشده است. طبقه بندی مطالب این مقاله به صورت زیر است:

در قسمت دوم این مقاله ابتدا به معرفی آنتروپی اطلاعات و واگرایی جانسون ـ شانون[۱] [۹] پرداخته و با استفاده از این مفهوم، دو روش جدید برای بررسی سریهای زمانی معرفی شده است. در قسمت سوم و چهارم مفهوم آشوب در مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی وتعریفی از بیلیارد به عنوان یکی از ابزارهای مطالعهٔ آشوب در مکانیک کوانتومی بیان شده است. در قسمت پنجم با استفاده از فرمول و مفهوم واگرایی و با کمک روش توزیع فواصل بر اساس فرمولبندی جانسون ـ شانون به بررسی سیستم غیر آشوبی دایره و سیستم آشوبی استادیوم می‌پردازیم و توزیع حاکم بر فاصله ترازها در استادیوم و دایره را مورد مقایسه قرار می‌دهیم. در بخش ششم با استفاده از روش بازه بندی و میانگین توزیع فواصل به بررسی توابع موج و ترازهای انرژی دو نوع از بیلیاردهای آشوبی و غیرآشوبی و سری زمانی سیگنالهای الکتریکی قلب $ECG$ می‌پردازیم. با استفاده از این دو روش می‌توان سریهای زمانی دیگری را نیز مورد بررسی قرار داد.

## ۲. آنتروپی اطلاعات

آنتروپی یکی از مهمترین مفاهیم در حیطهٔ فیزیک آماری و نظریهٔ اطلاعات است. این مفهوم میزان عدم قطعیت موجود در هر حالت سیستم فیزیکی را اندازه می‌گیرد. در فیزیک آماری آنتروپی توسط رابطه $s = ln\Omega$ تعریف می‌شود که $\Omega$ تعداد حالات سیستم، در حالت تعادل است. برای محاسبهٔ آنتروپی باید سیستم در حال تعادل به تعداد زیادی قسمت میکروسکوپی تقسیم شود، سپس تعداد حالات موجود در هر قسمت $\omega_i$ معین، و در نهایت تعداد حالات کل در فضای فاز از رابطهٔ $\Omega = \Pi_i \omega_i$ به دست می‌آید.

آنتروپی نسبی اطلاعات کالبک ـ لیبلر[۲] $(K)$ برای توزیعهای احتمال $p_i^{(۱)}, p_i^{(۲)}$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۰].

$$K\left(p_i^{(۱)}, p_i^{(۲)}\right) = \sum_i p_i^{(۱)} \ln \frac{p_i^{(۱)}}{p_i^{(۲)}} . \qquad (۱)$$

برای توزیعهای احتمال پیوسته، $K$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$K = \int \rho^{(۱)}(x) \ \ln \frac{\rho^{(۱)}(x)}{\rho^{(۲)}(x)} \ dx . \qquad (۲)$$

$K$ $(K \geq ۰)$ مقیاس اختلاف فاصله $\rho_i^{(۱)}$ از توزیع مرجع $\rho_i^{(۲)}$ است و همچنین $K$ مقیاسی است که با استفاده از آن می‌توان دو توزیع $\rho_i^{(۱)}$ و $\rho_i^{(۲)}$ را از هم تمیز داد. اما استفاده از $K$ زیاد مناسب نیست[۱۱] زیرا

۱- متقارن نیست.

۲-کراندار نیست.

۳- همیشه نمی‌توان آن را به خوبی تعریف کرد.

برای اجتناب از این مشکلات لین و راو[۳] شکل متقارن شده $K$ را به نام واگرایی جانسون – شانون معرفی کردند که عبارت ریاضی آن به صورت زیر است[۱۲-۱۳]:

$$J\left(\rho^{(۱)}, \rho^{(۲)}\right) = H\left(\frac{\rho^{(۱)} + \rho^{(۲)}}{۲}\right) - \tfrac{۱}{۲} H\left(\rho^{(۱)}\right) - \tfrac{۱}{۲} H\left(\rho^{(۲)}\right) \qquad (۳)$$

$$H(\rho) - \sum_i \rho_i \ \ln \rho_i \ , \qquad (۴)$$

$H(\rho)$ نماینده آنتروپی شانون است و $J$ کمترین مقدار را دارد اگر $\rho^{(۱)} = \rho^{(۲)}$ باشد. در این صورت $J = ۰$ است و $J$ بیشینه است هرگاه $\rho^۱, \rho^۲$ دو توزیع کاملاً مجزا باشند. در این حالت $J = \ln ۲$ است. $J$ را می‌توان برای توزیعهای چگالی پیوسته نیز تعمیم داد. وقتی $J$ کمینه است، دو توزیع کاملاً تمیزناپذیرند و زمانی که $J$ بیشینه است، آن دو کاملاً تمیزپذیرند. بنابراین با استفاده از $J$ می‌توان توزیعها را با هم مقایسه کرد.

---

۱. Jensen-Shannon

۲. Kullback-Leibler

۳. Rao-Lin

در این مقاله با استفاده از واگرایی جانسون– شانون به ابداع روشهایی برای مطالعهٔ سریهای زمانی پرداختهایم.

### ۲. ۱. روش توزیع فواصل بر اساس فرمولبندی جانسون ـ شانون

در این روش برای محاسبهٔ فاصلهٔ دو توزیع از طریق آنتروپی در ابتدا باید سیستم مورد بررسی را به $P$ قسمت تقسیم کرد و در هر قسمت مقادیر احتمال توزیعهای مورد بررسی را محاسبه نمود که در هر سیستم با توجه به خواص آن مقادیر احتمالی با روشی مناسب بهدست میآید. سپس به محاسبه فاصله دو توزیع از یکدیگر $J(p^{۱},p^{۲})$ پرداخت، به این صورت که فاصله دو توزیع مورد نظر را به کمک مقادیر احتمالشان در هر قسمت از توزیع بر طبق رابطهٔ (۳) مییابیم:

$$J\ \ (p^{۱},p^{۲})=H\ \ (\frac{p^{۱}+p^{۲}}{۲})-\frac{۱}{۲}H(p^{۱})\ \ -\frac{۱}{۲}H(p^{۲})\ \ .$$

$H(p)=-\sum_i p_i \ln p_i$ همان تابع آنتروپی شانون میباشد و جمع داده شده در رابطهٔ $H(p)$ بر روی احتمال توزیع مورد بررسی در تمامی قسمتها میباشد. $p^{۱}$ و $p^{۲}$ نشانگر احتمال دو توزیع مورد بررسی هستند. مثلا میخواهیم فاصلهٔ توزیع ۱را از توزیع ۲ بیابیم، برای این کار در ابتدا احتمال ظهور توزیع ۱ یعنی $p_i$ را در تمام قسمتها مییابیم سپس با محاسبهٔ $p_i \ln p_i$ در هر قسمت و جمع مقادیر آن در تمام قسمتها $H(p^{۱})$ را برای توزیع ۱ مییابیم و همین محاسبات را عیناً برای توزیع ۲ انجام میدهیم تا $H(p^{۲})$ را بهدست آوریم. برای محاسبه $H(\frac{p^{۱}+p^{۲}}{۲})$ باید در هر قسمت احتمال توزیع ۱ و توزیع ۲ را جمع و بر دو تقسیم کرد سپس احتمال کل به دست آمده برای هر قسمت را در رابطهٔ $p_i \ln p_i$ میگذاریم و برای تمام قسمتها این محاسبه را انجام داده نتایج را جمع میبندیم تا $H(\frac{p^{۱}+p^{۲}}{۲})$ محاسبه شود. در مرحلهٔ بعد با جایگذاری مقادیر به دست آمده میتوان فاصلهٔ توزیع ۱ و توزیع ۲ یعنی $J(p^{۱},p^{۲})$ را یافت. در این مقاله با استفاده از این روش به مقایسهٔ توزیع حاکم بر فاصلهٔ ترازهای سیستم غیر آشوبی دایره و سیستم آشوبی استادیوم پرداختهایم.

### ۲. ۲. روش بازه بندی و میانگین توزیع فواصل

در این روش ابتدا قدر مطلق دادهها در یک توزیع را به بازهایی با تعداد عضو یکسان تقسیم میکنیم. هر عضو از این بازهها را با $u_i^j$ مشخص میکنیم که $i$ نشان دهنده $i$امین عضو هر بازه و $j$ بیانگر $j$امین بازه است. ضریب بهنجارش را برای هر بازه بهدست میآوریم، به این صورت که برای بازه $j$ ضریب بهنجارش برابر است با:

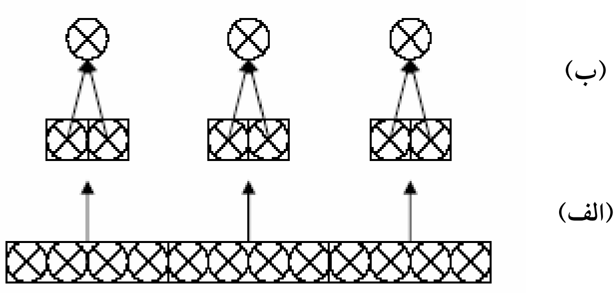
$$A_j\sum_i (u_i^j)^{۲}=۱ \qquad \Rightarrow \qquad A_j=\frac{۱}{\sum_i (u_i^j)^{۲}}\ \ , \qquad (۵)$$

ضریب بهنجارش بهدست آمده برای هر بازه را در توان دوم هر عضو از بازه مورد نظر ضرب میکنیم.

$$\rho_i^j=A_J(u_i^j)^{۲}, \qquad (۶)$$

بنابراین توزیع احتمال بهنجار شده داریم. با استفاده از واگرایی جانسون– شانون یا به عبارتی فرمول فاصله آنتروپی، فاصله هر بازه را از بازههای دیگر محاسبه کرده و میانگین فاصله هر بازه را از بازههای دیگر بهدست میآوریم. تعداد دادههای بهدست آمده را که برابر با تعداد بازههای در نظر گرفته شده است را به ترتیب رسم میکنیم، به این صورت که میانگین فاصله بازه اول از تمام بازههای دیگر داده اول، میانگین فاصلهٔ بازهٔ دوم از بازههای دیگر داده دوم و..... به همین ترتیب توزیع جدیدی خواهیم داشت. در شکل ۱ نحوهٔ بهدست آوردن توزیع جدید از دادههای اولیه نشان داده شده است. با استفاده از این روش به بررسی توابع موج و ترازهای انرژی بیلیارد آشوبی استادیوم با پارامتر دگردیسی متفاوت $(\eta)$ و بیلیارد غیر آشوبی دایره و همچنین سری زمانی سیگنالهای الکتریکی قلب $(ECG)$ پرداخته شده است.

همچنین با کمک توزیع جدید که از دادههای اولیه بهدست آمده و با روشی جدید شکل توزیع افت وخیزهای میانگین فواصل را نیز رسم کردهایم. به این صورت که بهترین خط گذرنده از این نقاط را بهدست آورده و تعداد نقاطی که بین این خط و خطوطی موازی که به فاصله $H$ از این خط قرار دارند را محاسبه میکنیم. سپس تعداد نقاط بین خطوطی که به فاصله $H$ از بهترین خط و خطوطی که به فاصله $۲H$ از آن قرار دارند را

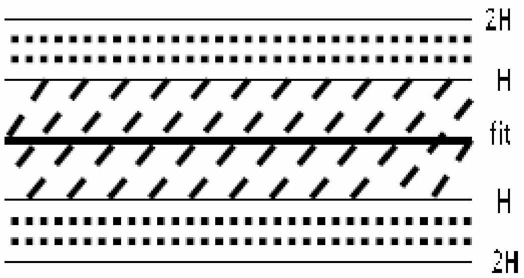



**شکل ۱.** نحوهٔ به دست آوردن توزیع جدید از داده‌های اولیه. در مرحلهٔ الف) فاصله هر بازه از بازه دیگر به‌دست می‌آید و در مرحلهٔ ب) از این فواصل به‌دست آمده میانگین‌گیری می شود.

به‌دست می‌آوریم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. در پایان نمودار تعداد نقاط را برحسب $H$ رسم می‌کنیم. در شکل ۲ نحوهٔ محاسبهٔ نقاط نشان داده شده است. با این روش شکل توزیع افت وخیزهای میانگین فواصل برای قلب سالم و بیمار به‌دست آمده است.

### ۳. آشوب در مکانیک کلاسیک

در مکانیک کلاسیک می‌توان با حل معادلات حرکت مسیر، تحول دستگاه را در فضای فاز تعیین کرد. این دستگاهها با نامهای انتگرال‌پذیر، عادی و غیر آشوبی نیز معرفی می‌شوند. حل تحلیلی برای تمام دستگاههای کلاسیک وجود ندارد و معادلهٔ حرکت آنها با استفاده از روشهای عددی حل می‌شود. در این موارد رفتار دستگاه در فضای مکان و تکانه وابستگی شدیدی به شرایط اولیه دارد به طوری که در مدت زمان نسبتاً طولانی برخلاف دستگاههای عادی که قسمت کمی از فضای فاز را اشغال می‌کنند این دستگاهها به اکثر نقاط فضای فاز سرکشی می‌کنند و مسیرهای آنها به صورت نمایی از هم فاصله می‌گیرند. توصیف کمی این نوع رفتار توسط ابزارهایی هم چون نمای لیاپانوف، سطح مقطع پوانکاره، آنتروپی متریک و توپولوژیک و بالاخره آنتروپی سینایی کلموگرف [۱۴-۱۶] انجام می‌شود. با توجه به تعاریفی که از آشوب در مکانیک کلاسیک وجود دارد، می‌توان دستگاه آشوبی و غیر آشوبی را به طور دقیق تعریف کرد.

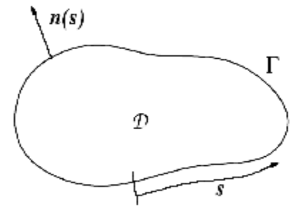



**شکل ۲.** نحوهٔ محاسبهٔ تعداد نقاط.

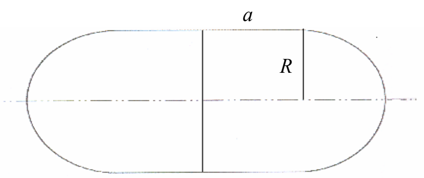
### ٤. مطالعهٔ آشوب در مکانیک کوانتومی بااستفاده از بیلیاردها

چگونگی ظهور آشوب از دیدگاه مکانیک کوانتومی موضوع تحقیقاتی جدیدی است که از عمر آن بیش از سه دهه نمی‌گذرد. در مکانیک کوانتومی به خاطر اصل عدم قطعیت هایزنبرگ مفهوم مسیر در فضای فاز از بین می‌رود و بنابراین در مکانیک کوانتومی نمی‌توان آشوب را به صورت حساسیت نمایی مسیر در فضای فاز به شرایط اولیه تعریف کرد. از آنجاییکه تعریف دقیق، جامع و مورد قبول همه از آشوب کوانتومی موجود نیست، بررسی کوانتومی دستگاههایی که از نظر مکانیک کلاسیک آشوبی هستند به عنوان مطالعهٔ آشوب کوانتومی معرفی می‌شود. یکی از دستگاههایی که برای مطالعهٔ آشوب مورد استفاده قرار می‌گیرد، بیلیارد است. بیلیاردها مثالهای ساده‌ای هستند که به صورت کلاسیکی وکوانتومی مورد بررسی قرار می‌گیرند و الگوی مناسبی برای دستگاههای فیزیکی نیز می‌باشند. (امروزه با پیشرفتهایی که در تکنولوژی نانو به‌دست آمده است مشابه‌های فیزیکی زیادی برای بیلیارد می‌توان پیدا کرد). بیلیارد به قسمتی از فضا گفته می‌شود که با یک مرز بسته و غیر قابل نفوذ محدود شده است. این بیلیارد هر بعدی می‌تواند داشته باشد. غالباً منظور از دستگاه بیلیارد حرکت آزاد جسمی در دو بعد با سطح صاف و با مرز بسته و غیر قابل نفوذ است (شکل ۳).

اگر مرز بیلیارد دارای تقارن لازم برای جداسازی و حل معادلهٔ دیفرانسیل حرکت باشد حرکت ذره داخل بیلیارد قابل پیش بینی است، در غیر این صورت معادله به صورت تحلیلی قابل حل نیست و بیلیارد آشوبی است. بنابراین در بیلیاردها عامل رفتار آشوبی رفتار نامنظم مرز این نوع سیستمها است. بیلیاردهایی با مرزهای نامنظم بیلیاردهای آشوبی هستند. یکی از نمونه‌های بیلیاردهای آشوبی بیلیارد استادیوم است. مکان




**شکل ۳ .** تصویر یک بیلیارد D بعدی که یک مرز ۱-D بعـدی آن را محصور کرده است.




**شکل ۴ .** بیلیارد استادیوم. شعاع و نـصف طـول پـاره خـط اتـصال دهندهٔ دو دایره در شکل نشان داده شده است.

هندسی نقاطی از صفحه محدود به دو نیم دایره با شعاع مساوی که لبه‌های آن با دو پاره خط موازی بـه هـم وصـل شـده باشـد بیلیاردی تشکیل می‌دهد که چون آشوبی بـودن آن بـرای اولـین بار توسط بونیموویچ [۱] اثبات شد، آن را بیلیارد بونیموویچ گویند. شکل این بیلیارد شبیه مرز حاشیهٔ زمین فوتبال است (شـکل ۴) به همین دلیل این نوع بیلیارد به استادیوم نیز معروف است.

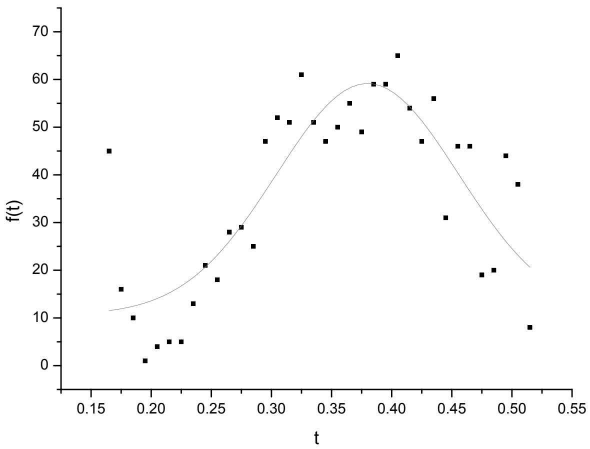
نسبت نصف طول پاره خط اتصال دهنده دو دایره به شـعاع دایره، پارامتر دگردیسی $\eta = \frac{a}{R}$ نامیده می‌شود. میزان آشوب در استادیوم به تغییر این پارامتر وابسته است. چگـونگی رفتـار ذره در داخل بیلیاردی در ابعاد کوانتومی بهخـاطر شـباهتی کـه ایـن دسـتگاهها بـه قطعـات گونـاگونی کـه در زمینـه‌هـای مختلـف تکنولوژی نانو کاربرد دارند بسیار مورد توجه قرار گرفته اسـت. برای بررسی آشوب در مکانیک کوانتومی توابع موج و ترازهای انرژی دستگاههای کوانتومی که در حد کلاسیک آشوبی هـستند به‌دست می‌آیند و با توابع موج و ترازهای دسـتگاههایی کـه در حد کلاسیک غیرآشوبی هـستند مقایـسه مـی‌شـوند. بـه منظـور آشنایی بیشتر با بیلیاردها می‌توان به مرجع [۱۷] مراجعه کرد.

## ۵. مقایسهٔ سیستم غیر آشوبی دایـره و سیـستم آشـوبی استادیوم با استفاده از روش اول

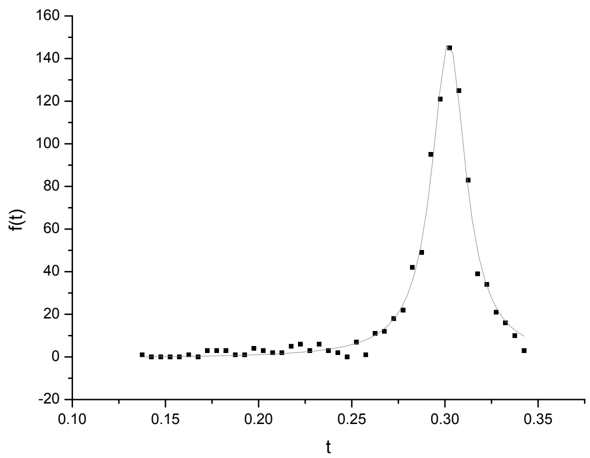
به کمک روش اول نتایج یک بررسی کـه روی اسـتادیوم و دایـره انجام شده است را مقایسه می‌کنیم. در این بررسی ما از رابطهٔ (۳) برای انجام محاسبات استفاده می‌کنیم و به بررسی فاصلهٔ هر تـراز از ترازهای بالاتر در استادیوم و دایره می‌پردازیم. بـه عنـوان مثـال بـرای یـافتن فاصـله دو تـراز دلخـواه در اسـتادیوم بایـد مقـدار رابطهٔ (۳) را محاسبه کنیم. برای استفاده از رابطهٔ بالا ما نیازمند بـه دانستن مقدار تابع موج در استادیوم هستیم. بـه ایـن منظـور تـابع موج را به صورت بسط آن بر حسب تابع موجهـای پایـه در نظـر می‌گیریم و ضرایب بسط را می‌یابیم. چون تابع موجهای پایه تـابع مکان و عدد موج $\vec{k}$ هستند، این امکان را به ما می‌دهند که مقدار آنها را در هر نقطه و بـه ازای همـه جهـت گیریهـای $\vec{k}$ حـساب کنیم. حال برای یافتن تابع مـوج ترازهـای مختلـف اسـتادیوم بـه روش عددی با توجه به این نکته که در یک تراز انـدازهٔ بـردار $\vec{k}$ برای همهٔ تابع موجهای پایه یکی است، با در نظر گـرفتن فـضای استادیوم به صورت مجموعه‌ای از نقاط در هر نقطـه بـا محاسـبهٔ مقدار تابع موجهای پایه در نقطهٔ مورد نظر و برآیندگیری بـر روی تمام جهت گیریهای $\vec{k}$ با اعمال مقـدار ضـرایب بـسط مقـدارتابع موج را در آن نقطه و به همین ترتیب برای سایر نقاط می‌یـابیم و به مجموعه‌ای از اعداد دست می‌یابیم که نشانگر مقدار تابع مـوج در یک تراز انرژی هستند. با تغییر اندازهٔ $\vec{k}$ و تکرار مراحـل بـالا مقدار تابع موج در همهٔ نقاط برای سایر ترازها به دست مـی‌آیـد. این نتایج با استفاده از مرجع [۱۷] به دست آمده است.

در این مرحله با داشتن مقدار تابع موج می‌توان به کمک رابطـهٔ (۳) و طی مراحل زیر به محاسبهٔ مقدار فاصله دو تراز پرداخـت. در ابتدا باید تابع موجهای مورد استفاده را بهنجار کرد. بـه ایـن منظـور در هر مجموعه از داده‌ها که نشانگر یک تراز انرژی اسـت مجمـوع مربعات اعـضا را محاسـبه و از آن جـذر مـی‌گیـریم، سـپس تمـام اعضای مجموعه داده‌ها را بر این عـدد تقـسیم مـی‌کنـیم تـا مقـدار عددی تابع موج تراز مورد نظر بهنجار شود. در مرحلهٔ بعد برای دو ترازی که مـی‌خـواهیم فاصلـه شـان را حـساب کنـیم مقـدار رابطـهٔ $\sum p_i \ln p_i$ را به صورت ذکر شده در زیر می‌یابیم. در ابتـدا در هـر

---
۱. Bunimovich




**شکل ۵ .** نمودار توزیع فواصل ترازها در دایره.




**شکل ۶ .** نمودار توزیع فواصل ترازها در استادیوم با پارامتر $\eta = ۳$.

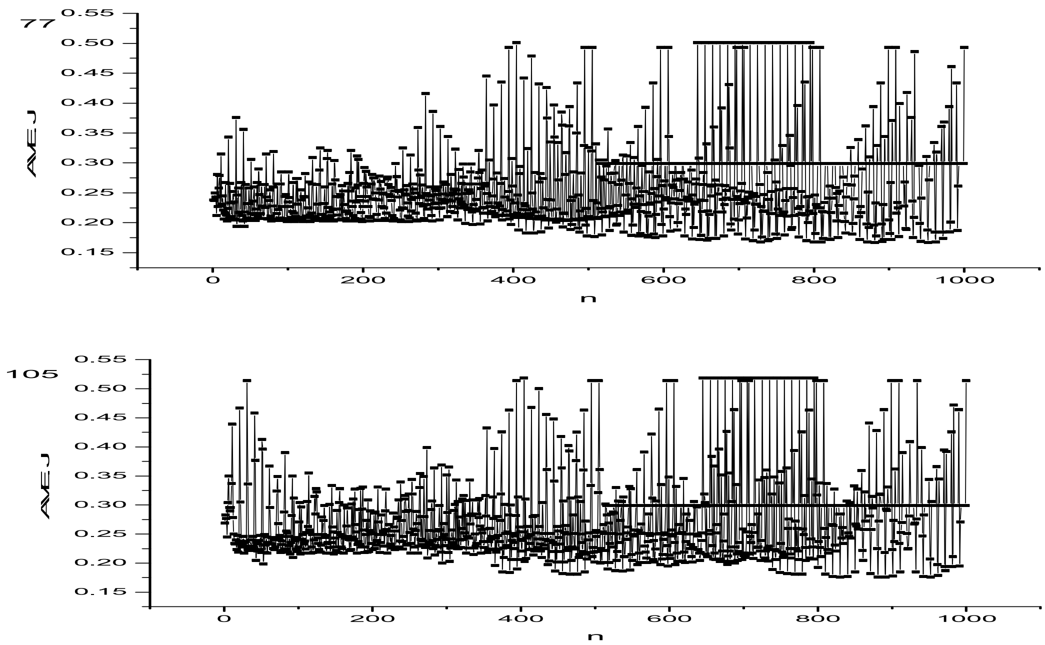
مجموعه داده‌ها با مربع کردن هر عضو $p_i$ را یافته سپس مقدار $p_i \ln p_i$ عضومورد بررسی را می‌یابیم. این عمل را برای همه اعضای مجموعه انجام می‌دهیم به این ترتیب مقدار $\sum p^۱_i \ln p^۱_i$ به دست می‌آید. همین مراحل را برای یافتن مقدار $\sum p^۲_i \ln p^۲_i$ انجام می‌دهیم، سپس با در نظرگیری اعضای متناظر در دو مجموعه از داده‌ها و طی مراحل مشابه مقدار $\sum \frac{(p^۱_i + p^۲_i)}{۲} \ln \frac{(p^۱_i + p^۲_i)}{۲}$ را محاسبه می‌کنیم. در این مرحله تمام اجزای رابطهٔ(۳) معلوم است و فاصله دو تراز به دست می‌آید. با تکرار مراحل بالا فاصله هر تراز را از همه ترازهای بالاتر می‌یابیم. رابطهٔ آنتروپی به کار رفته در رابطهٔ(۳)، رابطهٔ آنتروپی شانون است.

### ۵. ۱. بررسی توزیع حاکم بر فاصلهٔ ترازها در استادیوم و دایره

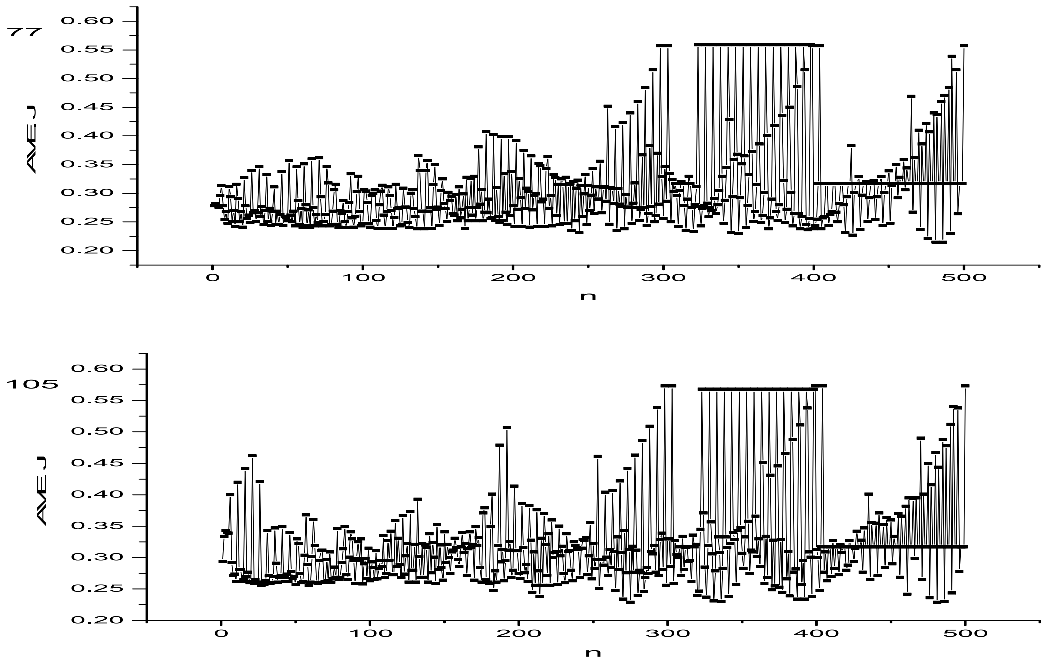
برای بررسی بهتر نتایج به دست آمده برای فاصلهٔ ترازها، یک روش رسم نمودار فراوانی این داده‌ها است. برای رسم نمودار فراوانی فاصلهٔ ترازها باید بازهٔ بین بیشترین مقدار فاصله تا کمترین مقدار فاصله را به قسمتهای کوچک $\Delta j$ تقسیم کرد و در هر بازهٔ $j + \Delta j$ و $j$ تعداد نقاط موجود در مجموعهٔ داده‌های فاصله را که مقداری در این بازه دارند را شمرد تا فراوانی در فاصله مورد نظر به دست آید وبه این ترتیب نمودار فراوانی بر حسب فاصلهٔ را رسم کرد. البته در این مقاله این محاسبات توسط نرم افزار *origin* انجام گرفته است. اگر محاسبهٔ فاصله را بر اساس تابع آنتروپی شانون انجام دهیم و فاصلهٔ ترازها را برای استادیوم و دایره محاسبه کنیم، همان طور که در شکل ۵ قابل مشاهده است برای دایره توزیع به دست آمده، توزیعی شبیه گاوسی پیدا می‌کند. در استادیوم بسته به مقدار پارامتر استادیوم ($\eta$) شکل توزیع متفاوت خواهد بود. به ازای پارامترهایی که استادیوم مورد بررسی تقریباً حالت منظم دارد و هنوز خیلی آشوبی نشده مثلاً $\eta = ۰/۰۰۰۰۱$، توزیع فواصل رفتاری شبیه به توزیع فواصل در دایره دارد یعنی توزیع تقریباً گوسی است. با افزایش پارامتر استادیوم وآشوبی شدن استادیوم این توزیع مطابق شکل ۶ به توزیع لورنتز تبدیل می‌شود.

## ۶. بررسی توابع موج و ترازهای انرژی بیلیاردهای آشوبی و غیر آشوبی با روش دوم

در این قسمت با استفاده از روش گفته شده در بخش (۲-۲) به بررسی آماری توابع موج و ترازهای انرژی دو نوع از بیلیاردهای آشوبی و غیر آشوبی می‌پردازیم. این روش برای بیلیارد آشوبی استادیوم با پارامترهای دگردیسی متفاوت ($\eta$) و همچنین برای بیلیارد غیر آشوبی دایره به کاربرده شده است. در ابتدا چند تراز مربوط به بیلیارد غیر آشوبی دایره را در نظر می‌گیریم. هرکدام از این ترازها توابع موج مخصوص به خود را دارند. هر تراز را به بازه‌هایی با ده عضو و بیست عضو تقسیم می‌کنیم و با استفاده از روش گفته شده هر بازه را بهنجار کرده و فاصله هر بازه را از بازه‌های دیگر با استفاده از فرمول (۳) به‌دست می‌آوریم. سپس میانگین فاصلهٔ هر بازه را از بازه‌های دیگر برای آنها محاسبه کرده و

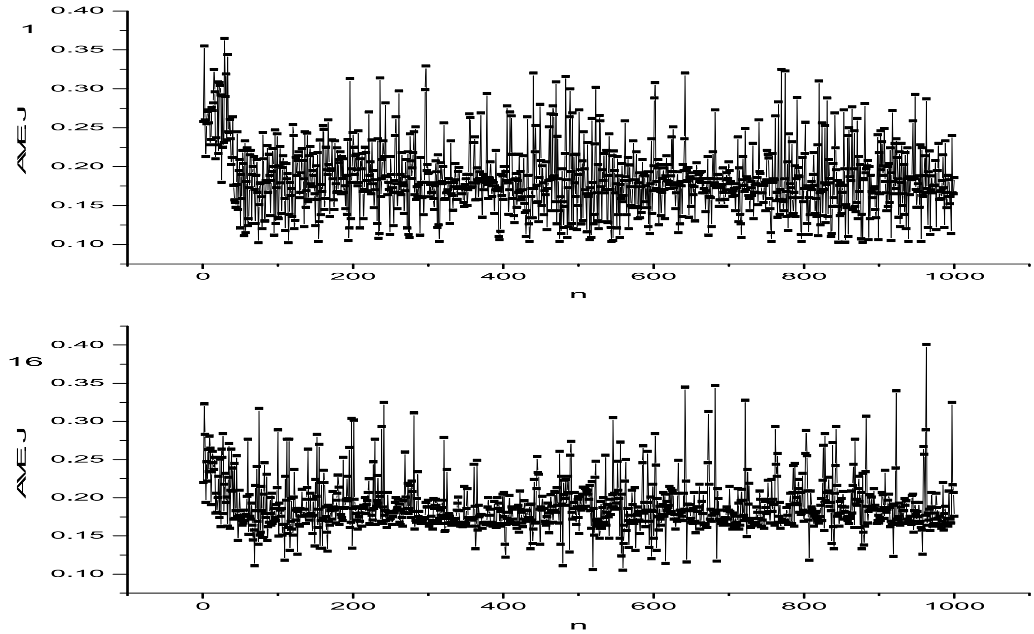



**شکل ۷ .** افت وخیزهای میانگین فاصلهٔ بازه‌هایی با ده عضو مربوط به بیلیارد دایره با ترازهای متفاوت.

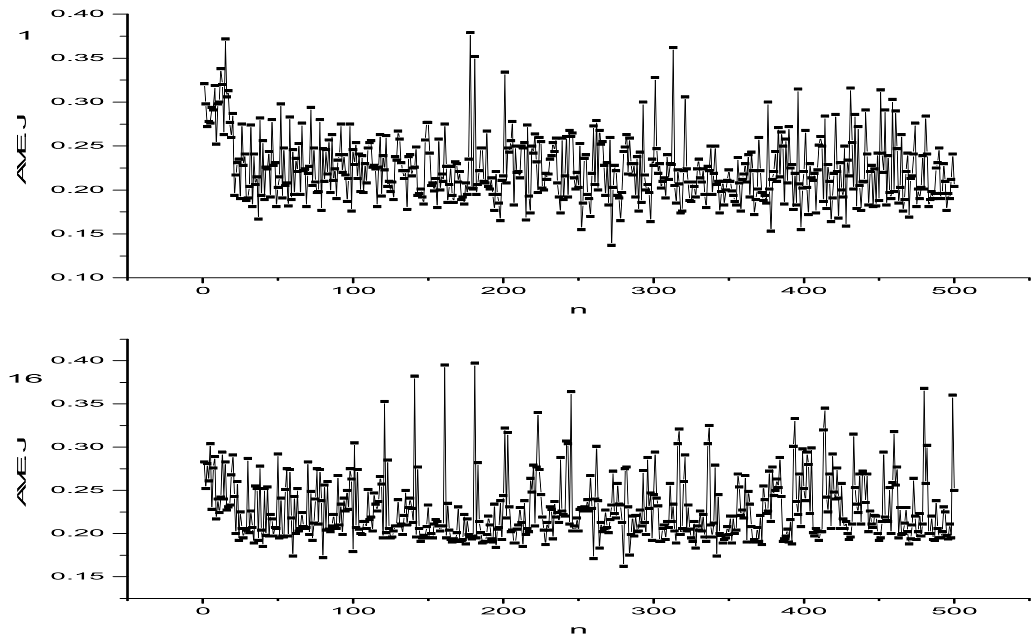



**شکل ۸ .** افت وخیزهای میانگین فاصلهٔ بازه‌هایی با بیست عضو مربوط به بیلیارد دایره با ترازهای متفاوت.

سری به‌دست آمده را به صورتی که در روش دوم بیان شد، رسم می‌کنیم. در شکل ۷ میانگین فاصلهٔ بازه‌هایی با ده عضو برای دو تراز متفاوت نشان داده شده است. همان طور که مشخص است نمودارها از لحاظ شکل کلی تفاوت چندانی با هم ندارند. این مطلب در شکل ۸ که نشان دهندهٔ میانگین فاصله بازه‌هایی با بیست عضو برای همان دو تراز است، نیز دیده می‌شود. هرچه تعداد




**شکل ۹** . افت وخیزهای میانگین فاصلهٔ بازه‌هایی با ده عضو مربوط به بیلیارد استادیوم با ترازهای متفاوت و $\eta = ۳$.




**شکل ۱۰**. افت وخیزهای میانگین فاصلهٔ بازه‌هایی با بیست عضو مربوط به بیلیارد استادیوم با ترازهای متفاوت و $\eta = ۳$.

عضوهای بازه‌ها افزایش می‌یابد، شکل کلی نمودار میانگین فاصله هر تراز با تراز دیگر تفاوت بیشتری پیدا می‌کند.

در ادامه بیلیارد آشوبی استادیوم با پارامتر دگردیسی $\eta = ۳$ را در نظر می‌گیریم. میانگین فواصل را برای دو تراز مختلف محاسبه می‌کنیم. هر تراز به بازه‌هایی با ده عضو و بیست عضو تقسیم شده است. در شکل ۹ میانگین فاصلهٔ بازه‌هایی با ده عضو رسم شده است. چنانچه از شکل پیدا است، نمودار میانگین فاصلهٔ دو تراز با هم متفاوت است. در شکل ۱۰

میانگین فاصلهٔ بازه‌هایی با بیست عضو نشان داده شده است و تفاوتها در آنها نیز دیده می‌شود. ما برای $\eta$های متفاوت و تعداد ترازهای بیشتر این محاسبات را انجام دادیم و به این نتیجه رسیده‌ایم که نظم خاصی که در نمودارهای بیلیارد دایره وجود دارد در بیلیارد استادیوم وجود ندارد. افت وخیزهای میانگین فواصل در بیلیارد استادیوم بیشتر است. شباهت کلی بین نمودارهای میانگین فاصله برای ترازهای متفاوت با تعداد عضوهای کم و یکسان برای بیلیارد استادیوم به مراتب کمتر از بیلیارد دایره است.

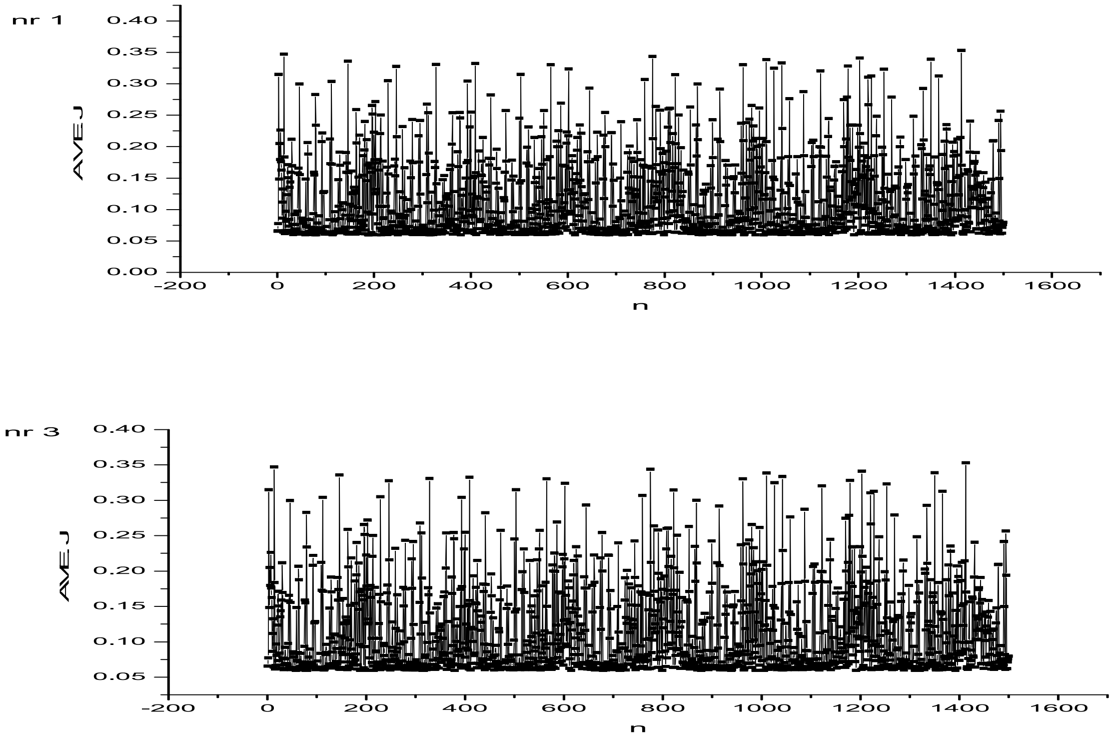
## ۷. بررسی سری زمانی سیگنالهای الکتریکی قلب با روش دوم

این روش برای چند سری زمانی قلب سالم و بیمار به ازای بازه‌های متفاوت صورت گرفته است. ابتدا دو سری زمانی قلب سالم و بیمار را در نظر گرفته و آنها را به بازه‌هایی با ۵ عضو و ۱۰ عضو تقسیم می‌کنیم. روش گفته شده در قسمت (۲-۲) را به کار می‌بریم، یعنی هر بازه را بهنجار کرده و فاصلهٔ هر بازه را از بازه‌های دیگر با استفاده از واگرایی جانسون- شانون به‌دست می‌آوریم. سپس میانگین فاصلهٔ هر بازه را از بازه‌های دیگر برای آنها محاسبه کرده و سری به‌دست آمده را به صورتی که در روش دوم بیان شد، رسم می‌کنیم. در شکلهای ۱۱ و۱۲ به ترتیب میانگین فاصلهٔ بازه‌هایی با پنج عضو مربوط به دو قلب سالم و میانگین فاصلهٔ بازه‌هایی با پنج عضو، برای دو قلب بیمار نشان داده شده است. این دو شکل تفاوت زیادی با هم دارند و با دیدن آنها می‌توان به راحتی قلب سالم را از بیمار تشخیص داد. همان طور که از شکل ۱۱ آشکارا است، میانگین فواصل قلب افراد سالم افت و خیزهای زیادی دارد. اما در مقابل افت وخیزهای میانگین فواصل قلب افراد بیمار نسبت به قلب سالم کمتر است. دو نمودار رسم شده در شکل ۱۱ تفاوت چندانی با هم ندارند. اما دو نمودار رسم شده در شکل ۱۲ تفاوتهایی با هم دارند. این تفاوتها ناشی از نوع خاص بیماری قلبی است که افراد متفاوت دارند. شکلهای ۱۳ و ۱۴ به ترتیب میانگین فاصلهٔ بازه‌هایی با ۱۰ عضو را برای قلب سالم و بیمار نشان می‌دهند. باز هم می‌بینیم که افت و خیزهای میانگین فواصل قلب افراد سالم نسبت به بیمار بیشتر است.

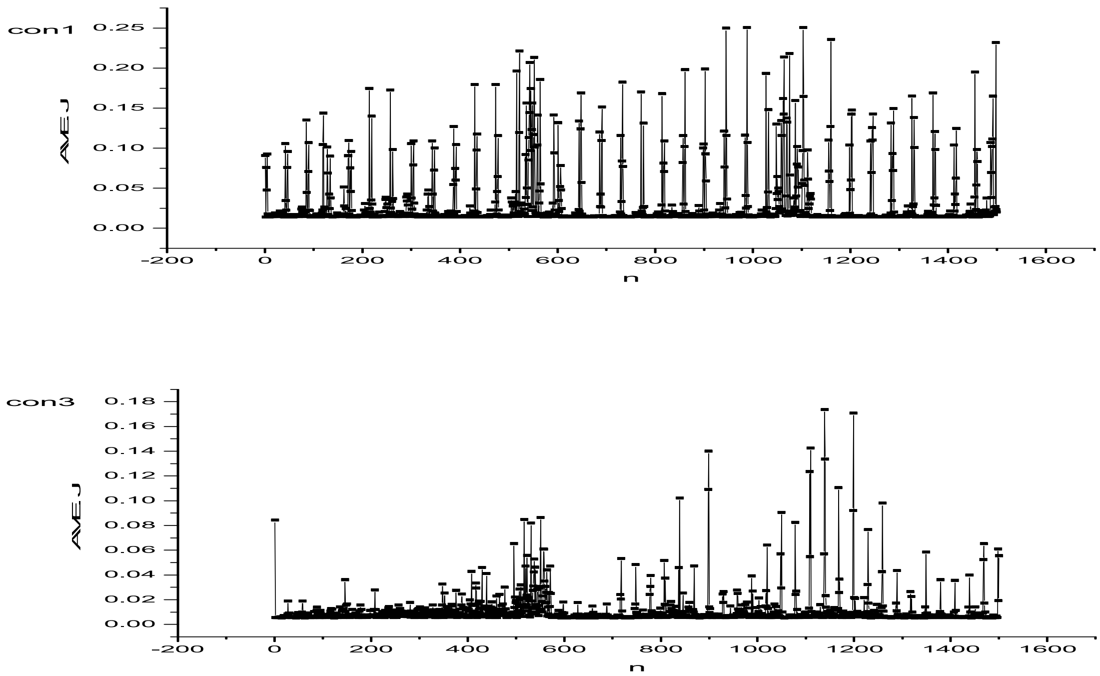
در ادامه شکل توزیع افت وخیزهای میانگین فواصل برای قلب افراد سالم و بیمار به‌دست آمده است. خواهیم دید که این توزیع برای قلب بیمار تقریباً یک توزیع گوسی است. شکل توزیع به ازای بازه‌هایی با عضوهای متفاوت، عوض نمی‌شود. در تمام توزیعهای آن، معمولاً یک قله بیشینه به همراه دنباله‌ای تقریباً یکنواخت یا به عبارتی کاملا یکنواخت ( از نظر افت‌وخیز) داریم. این نتایج در شکلهای ۱۶ و ۱۸ قابل مشاهده است. این توزیعها برای قلب افراد سالم کاملاً متفاوت است. شکل توزیع به ازای بازه‌هایی با عضوهای متفاوت، تغییر پیدا می‌کند. شکل توزیع برای قلبهای سالم با بازهٔ پنج تایی دارای قله‌ای بیشینه مانند قلبهای بیمار است، اما دنبالهٔ آن یکنواخت نیست و افت وخیزهایی دارد. با افزایش تعداد عضوهای بازه‌ها مشاهده می‌شود که این افت وخیزها افزایش پیدا می‌کنند و شکل توزیعها بر خلاف قلب بیمار کاملاً عوض می‌شود. این نتایج در شکلهای ۱۵ و ۱۷ قابل مشاهده است. داده‌های استفاده شده در قلب از مرجع [۱۸] گرفته شده است. در واقع این روش بر روی ۱۰ سری زمانی مربوط به قلب سالم و ۱۰ سری زمانی مربوط به قلب بیمار به ازای بازه‌های با طولهای متفاوت انجام شده و دو نمونه از آن در مقاله آورده شده است. نتایج ذکر شده از مقایسهٔ این نمونه‌ها با هم به‌دست آمده است. با کمک این روش به راحتی می‌توان قلب سالم را از بیمار تشخیص داد. بررسیهای کاملتر بر روی این سریهای زمانی در آینده نزدیک انجام خواهد شد و در جای دیگر به چاپ خواهد رسید.

## ۸. نتیجه‌گیری

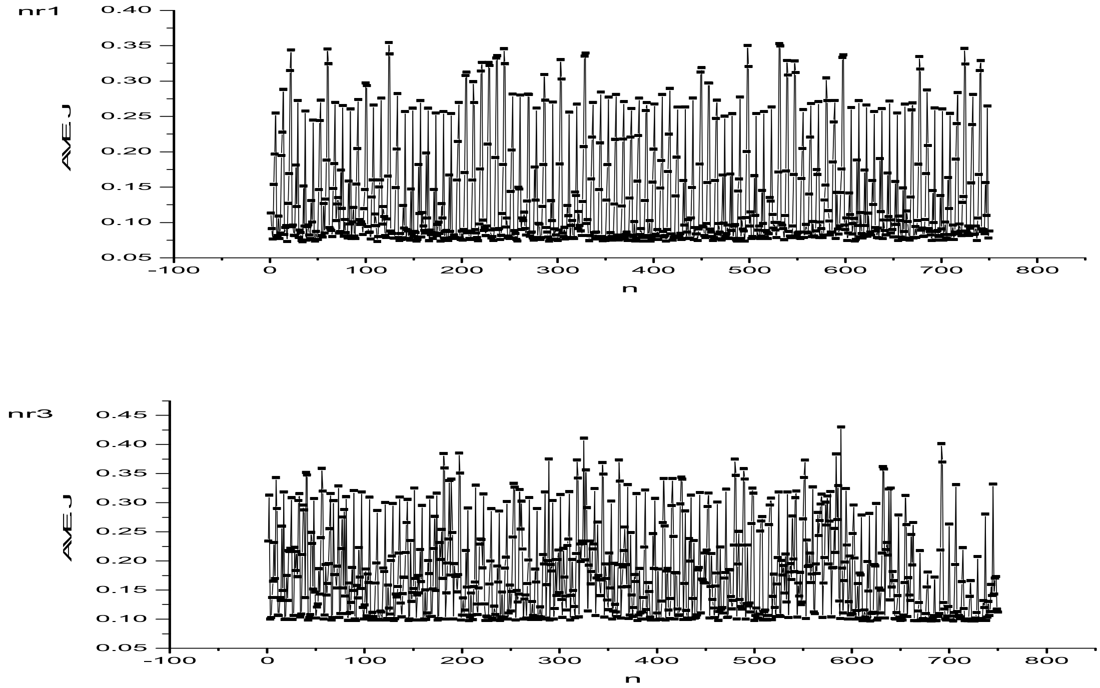
در این مقاله با معرفی دو روش جدید در به کارگیری فاصلهٔ آنتروپی اطلاعاتی به بررسی سریهای زمانی بیلیارد و قلب پرداخته شده است. به کمک این روشها می‌توان بیلیارد آشوبی و



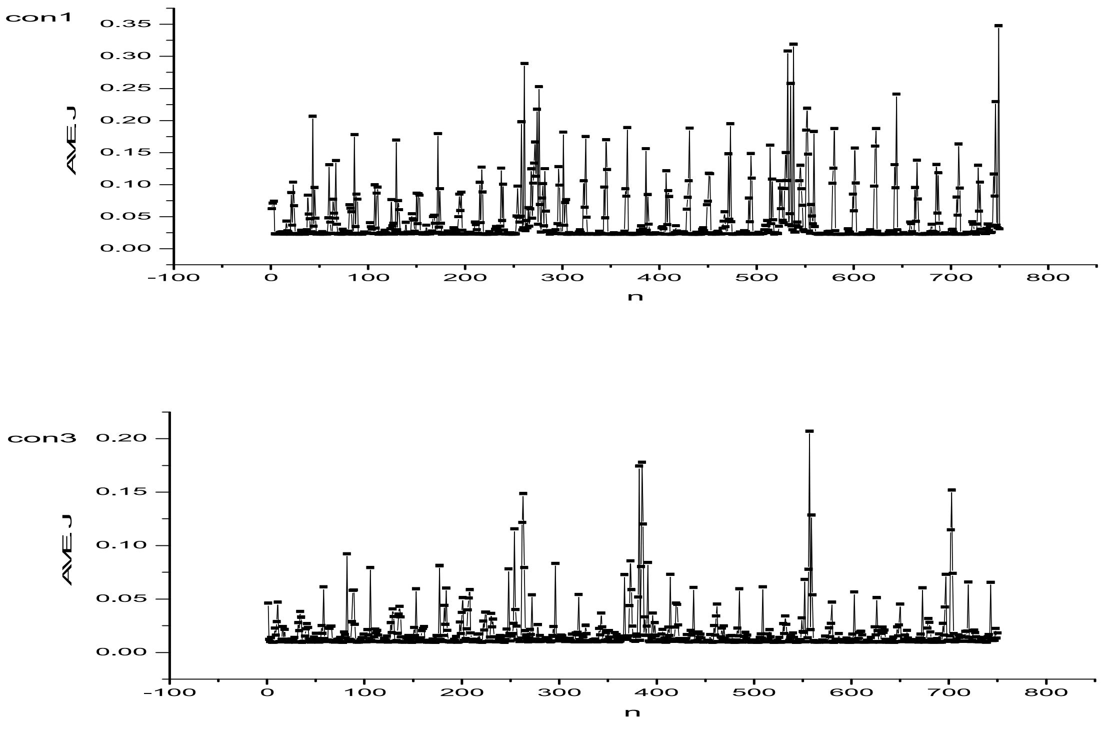

**شکل ۱۱** . افت وخیزهای میانگین فاصلهٔ بازه هایی با پنج عضو مربوط به قلب سالم.



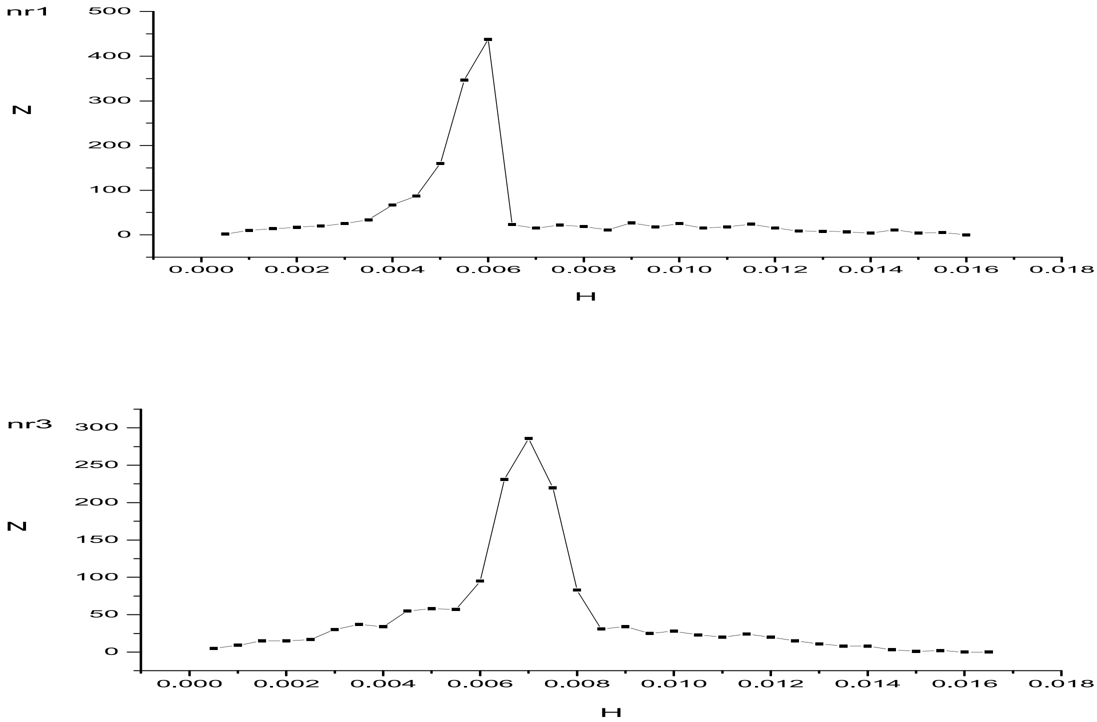

**شکل ۱۲.** افت وخیزهای میانگین فاصلهٔ بازه‌هایی با پنج عضو مربوط به قلب بیمار.



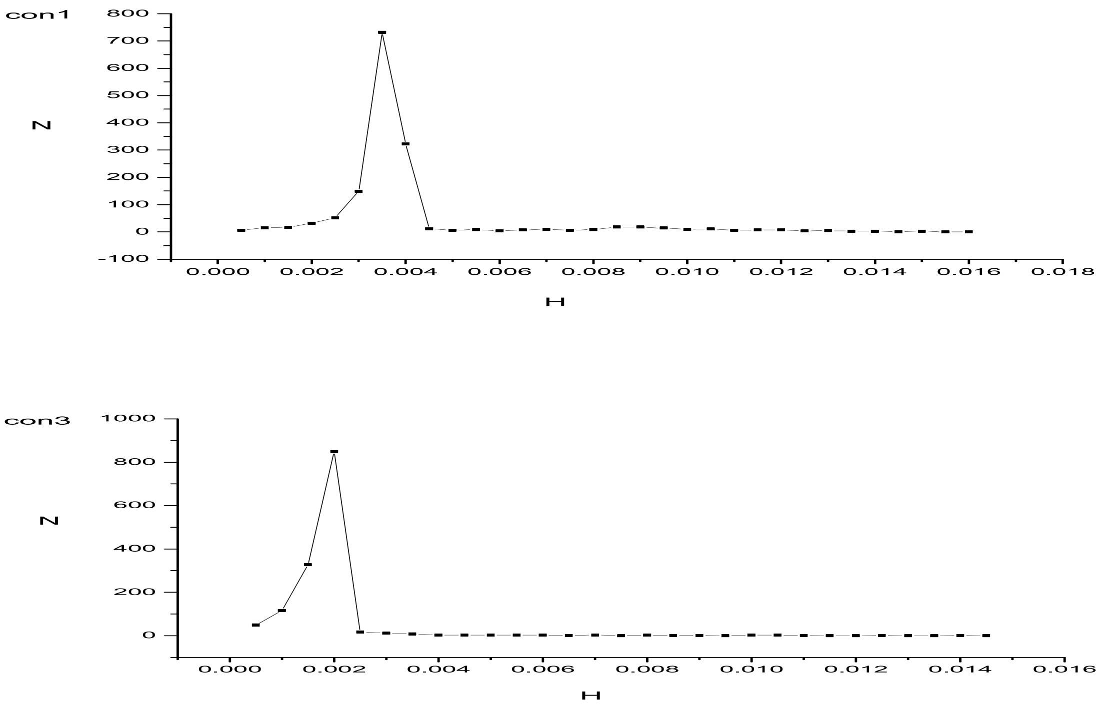

**شکل۱۳.** افت وخیزهای میانگین فاصلهٔ بازه هایی با ده عضو مربوط به قلب سالم.



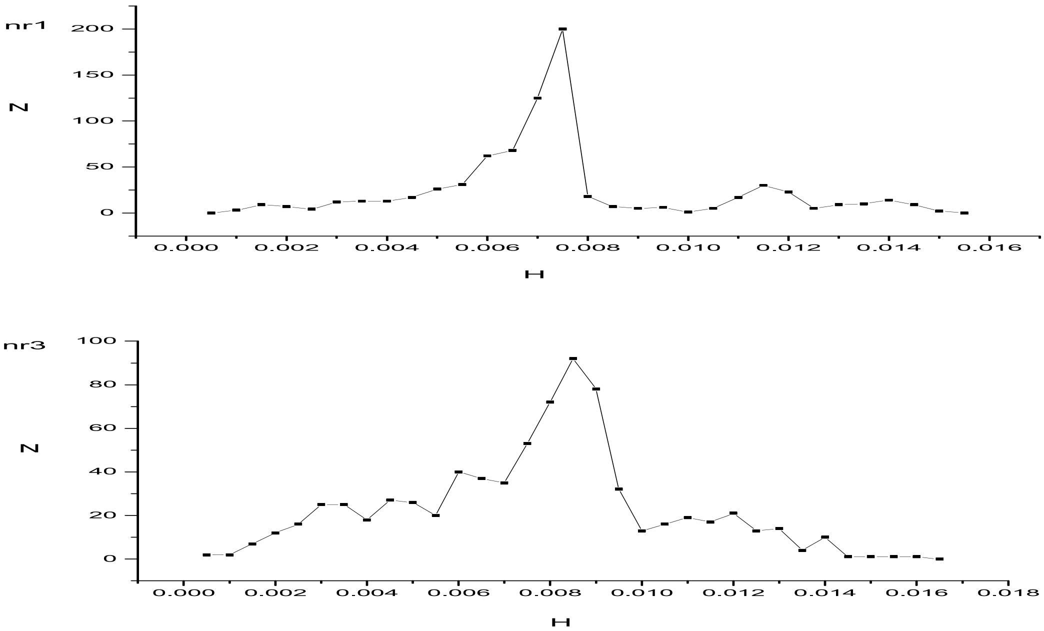

**شکل۱۴** . افت وخیزهای میانگین فاصلهٔ بازه‌هایی با ده عضو مربوط به قلب بیمار.



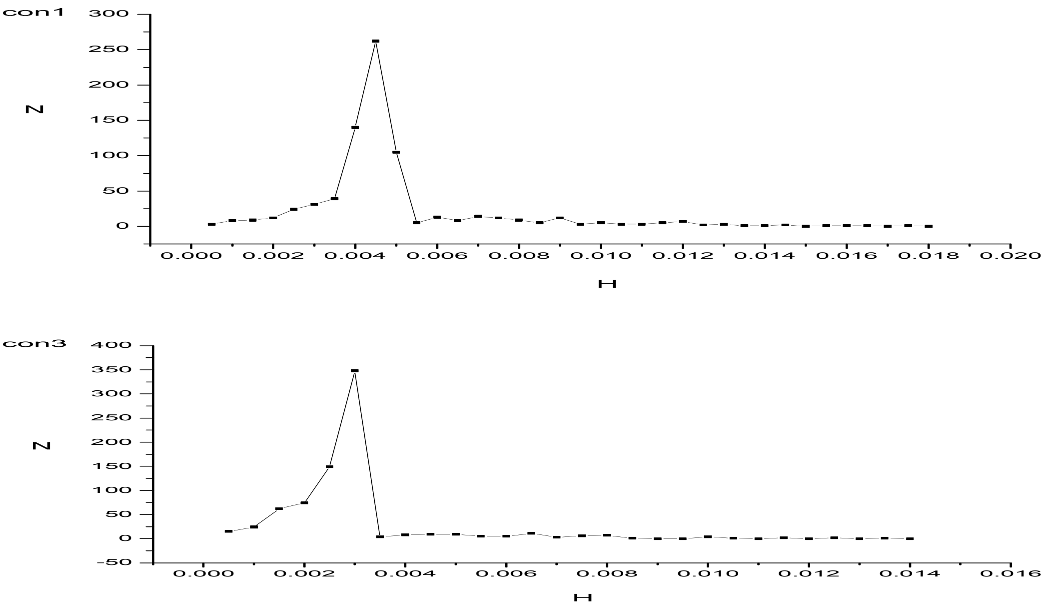

**شکل۱۵.** توزیع افت وخیزهای میانگین فاصلهٔ بازه‌هایی با پنج عضو مربوط به قلب سالم.




**شکل ۱۶.** توزیع افت وخیزهای میانگین فاصلهٔ بازه‌هایی با پنج عضو مربوط به قلب بیمار.




**شکل ۱۷.** توزیع افت وخیزهای میانگین فاصلهٔ بازه‌هایی با ده عضو مربوط به قلب سالم.




**شکل۱۸.** توزیع افت وخیزهای میانگین فاصلهٔ بازه‌هایی با ده عضو مربوط به قلب بیمار.

غیر آشوبی همچنین قلب سالم را از قلب بیمار تشخیص داد. این فرمولبندی می‌تواند در دیگر سریهای زمانی نیز مورد استفاده قرار گیرد.

**قدردانی**

نویسندگان از آقای دکتر فرهاد شهبازی وآقای دکتر کیوان سامانی به خاطر راهنماییهای ارزنده شان صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنند.

## مراجع

1. A Bunde, A G Piersol, H J Schellnhuber, “The Science of Disasters”, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2002).
2. Enrique Canessa, *J. Phys.* A. *Mathematica and general* (2000).
3. Plamen Ch. Ivanov et al., *Nature,* **399** (1999).
4. Plamen Ch. Ivanov et al., cond-matt/0409545 (2004).
5. Jan W Kantelhart et al., *Physica* A **316** (2002) 88-114.
6. F Atyabi, M A Livari, K Kaviani, M R Rahimi tabar, *J. Biol. Phys.* **32** (2006) 48.
7. M J Lichtenberg and M A Liberman, “*Regular and Stochastic Motion*” *Springer*- Verlag (1983).
8. A Porter, L Liboff, *Chaos on the Quantum Scale* http://www.sigmaxi.org/amsci/articles/01articles/portercape6.html
9. K Ch Chatzisavvas, Ch C Moustakidis, and C P Panos, *J. Chem. Phys*. **123** (2005) 174111.
10. S Kullback, *Statistics and Information theory*, wiley, New York (1959).
11. A Majtey, P W Lamberti, M T Martin and A Plastinoe-print quant-ph/0408082.
12. C Rao, “*Differential Geometry in Statistical Interference*”, *IMS-Lecture Notes* **10** (1987) 217.
13. J Lin, *IEEE Trans. Inf. Theory* **371** (1991) 145.
14. M J Lichtenberg and M A Liberman, “*Regular and Stochastic Motion* Springer- Verlag (1983).
15. M Henon, “*Numerical Exploration of Hamiltonian Systems*” North-Holland P.C. (1983).
16. M C Gutzwiller, “*Chaos in classical and Quantum Mechanics*”, Springer-Verlag (1990).
۱۷. حمید مصدق، بررسی آشوب بیلیاردهای کوانتومی با استفاده از شعاع ژیراسیون، رساله کارشناسی ارشد، دانشکدۀ فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان (۱۳۸۵).
18. www.physionet.org.