

## فرمولبندی هندسی کوانتش تغییر شکل برزین

رسول رکنی زاده  
دانشگاه اصفهان - گروه فیزیک

دریافت مقاله: ۸۱/۲/۹

دریافت مقاله: ۸۰/۴/۱۰

### چکیده

در این مقاله سعی می‌شود تا کوانتش برزین روی فضای هیلبرت تصویری  $\mathbb{P}(H)$  مجدداً فرمولبندی شود تا از این طریق رابطه (پاد) کوانتش برزین با فرمولبندی هندسی مکانیک کوانتومی آشکار شود. خواهیم دید از این طریق بروشنی می‌توان دینامیک در کوانتش برزین را مورد مطالعه قرار داد و از کوانتش برزین حد کلاسیک فرمولبندی هندسی مکانیک کوانتومی را بدست آورد.

واژه‌های کلیدی: کوانتش برزین، هندسه مکانیک کوانتومی، کوانتش تغییر شکل

### ۱ مقدمه

فرض می‌شود یک چند گونای کیلری است. برزین نشان داد که که سمبلهای هموردا یک جبر  $*_{\hbar}$  تشکیل می دهند که این جبر در حد  $\hbar \rightarrow 0$  به براکنهای پوآسون بین مشاهده پذیرهای متناظر کلاسیک منجر می‌شود. هر چند وجود جبر  $*_{\hbar}$  برای همه چند گونا‌های سیمپلکتیک اثبات شده است [۴] اما ساختار این جبرها عمومی نمی‌باشد.

در این مقاله خواهیم دید که در واقع جبر  $*_{\hbar}$  یک جبر پوآسون است که از طریق دو فرمی فوبینی - استادی روی فضای حالت‌های همدوس تعریف می‌شود. فضای حالت‌های همدوس را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

کوانتش کلیدواژه‌ای برای بیان انگیزه تلاشهایی است که در صدد توصیف همه انواع برهم‌کنشها، به خصوص گرانش، در چارچوب ریاضی هندسی واحدی می‌باشند. در کوانتش برزین از یک نمایش جبر  $C^*$  مشاهده‌پذیرهای کوانتومی، سمبلهای هموردا‌ی متناظر با آنها تعریف می‌شود. این سمبلها مقادیر چشم‌داشتی مشاهده‌پذیرها در حالت‌های همدوس برزین هستند. حالت‌های همدوس برزین توابع هولومورفیک روی فضای فاز کلاسیک  $M$  می‌باشند که

دینامیک : از طریق عملگر هامیلتونی  $H$  در معادله شرودینگر  $H\psi = i\hbar\partial_t\psi$

## کوانتش

کوانتش عبارت است از فرایندی که در آن این دو ساختار به هم مربوط می‌شوند.

## ۲ کوانتش برزین

برزین [۲] در سالهای ۱۹۷۴-۱۹۷۵ یک روش جالب برای کوانتش سیستم‌های کلاسیک براساس حالت‌های همدوس ارائه نمود. رویکرد اساسی در این روش آن است که فضای فاز کلاسیک  $M^2(q_1, \dots, p_f)$  با  $f$  درجه آزادی را با فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  به هم مربوط کنند. اینکار با استفاده از حالت‌های همدوس  $\Phi_z \in \mathcal{H}$  انجام می‌شود که از طریق نقاط فضای فاز  $M$  پارامتریزه می‌شوند. حال اگر مقدار چشم‌داشتی یک عملگر کراندار را در حالت‌های همدوس محاسبه کنیم یک تابع دارای مقدار مختلط روی فضای فاز بدست می‌آید. برای یک زیر فضا از توابع روی فضای فاز، یعنی سمبل‌های هموردا، یک نگاهت کوانتش ساخته می‌شود. به این ترتیب به هر عملگر یک سمبل هموردا نسبت داده می‌شود که این سمبلها در یک جبر شرکت پذیر ناجابه‌جایی با ضرب  $*$ ، که به  $\hbar$  وابسته است شرکت می‌کنند. تغییر  $\hbar$  مطابق با تغییر شکل این جبر است. ضرب  $\hbar$  بایستی در حد  $\hbar \rightarrow 0$  به حاصلضرب نقطه به نقطه معمولی بین توابع تبدیل شود و اصل انطباق نیز برآورده شود

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0^+} \hbar^{-1} (f *_{\hbar} g - g *_{\hbar} f) = -i \{f_0, g_0\} \quad (1.2)$$

که در اینجا

$$f_0 = \lim_{\hbar \rightarrow 0^+} f, g_0 = \lim_{\hbar \rightarrow 0^+} g.$$

به این ترتیب کوانتش برزین یک کوانتش برای حالت‌ها و پاد کوانتش برای عملگرهاست

$$M \ni z \rightarrow \Phi_z \in \mathcal{H}, \quad A \rightarrow \frac{\langle \Phi_z | A | \Phi_z \rangle}{\langle \Phi_z, \Phi_z \rangle} \quad (2.2)$$

حالت‌های همدوس یک زیر فضای چگال  $\tilde{\mathcal{H}}$  از فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  را می‌پوشانند.  $\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{H}})$ ، فضای براکنشی حالت‌های همدوس را با  $M$  نمایش می‌دهیم.  $M$  یک خمینه کیلری با دو فرمی سیمپلکتیک فوبینی-استادی است. می‌توان سمبل‌های هموردا را به عنوان توابعی روی این فضا در نظر گرفت که از طریق دو فرمی سیمپلکتیک یک جبر یوآسون تشکیل می‌دهند.

با نشان دادن اینکه بین  $M$  و  $M$  یک نگاهت نشانندگی وجود دارد که هر حالت  $z \in M$  را به یک حالت  $Z \in \mathcal{M}$  بطور پیوسته می‌نگارد، روشن می‌شود که در واقع کوانتش برزین رابطه این دو جبر یوآسون می‌باشد. به این ترتیب به یک فرمولبندی هندسی مشترک برای مکانیک کوانتومی و مکانیک کلاسیک دست می‌یابیم. بویژه این فرمولبندی روی خمینه فضای فاز، که ضرورتاً خطی نیست، انجام می‌شود. دینامیک کوانتومی در این فرمولبندی از طریق معادلات هامیلتون، به جای معادله شرودینگر، داده می‌شود. دینامیک در کوانتش برزین نیز به صورت رابطه معادلات هامیلتون در  $M$  و  $M$  تعریف می‌شود.

آنچه گفته شدرا می‌توان به صورت زیر خلاصه نمود

### ساختار مکانیک کلاسیک

محیط ریاضی : فضای فاز  $M$  که یک خمینه سیمپلکتیک عموماً غیرخطی است

حالتها: نقاط  $(q, p)$  در فضای فاز  $M$

مشاهده‌پذیرها: توابع  $f$  روی  $M$

نتایج اندازه گیری: مقادیر دقیق توابع در نقاط  $f(q, p) : M$   
دینامیک : از طریق تابع هامیلتونی به صورت معادلات هامیلتون :  $\dot{p}_i = -\partial H / \partial q^i$  و  $\dot{q}^i = \partial H / \partial p_i$

### ساختار مکانیک کوانتومی

محیط ریاضی : فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$ ، که یک فضای برداری خطی نرم دار کامل است

حالتها: بردارهای  $\psi \in \mathcal{H}$

مشاهده‌پذیرها: عملگرهای خود الحاق  $A$  روی  $\mathcal{H}$   
نتایج اندازه گیری : مقادیر چشم‌داشتی عملگرها در حالت‌های مختلف  $\langle A \rangle_{\psi} = \langle \psi | A | \psi \rangle$

شرایط (۲.الف) و (۲.ب) اصل انطباق ضعیف نامیده می‌شوند. اگر  $\tilde{U} = U$  آنگاه به آن اصل انطباق قوی می‌گویند. (۲.ج) تضمین می‌کند که به اندازه کافی توابع کوانتش پذیر وجود دارد.

## ۲.۲ جبر سمبلهای هموردا

ابتدا فضای برگمن وزندار  $\mathcal{H}_h$  را معرفی می‌کنیم

$$\mathcal{H}_h = \{f \mid \int |f(z)|^2 e^{-\frac{1}{h}\Psi(z, \bar{z})} d\nu(z, \bar{z}) = \|f\|_h^2 < \infty\} \quad (5.2)$$

این فضا یک زیر فضای  $L^2(M, e^{-\frac{1}{h}\Psi})$  است. در واقع  $\mathcal{H}_h$  فضای توابع تحلیلی مربعاً انتگرال پذیر روی خمینه کیلری  $M$  با سنجۀ زیر است

$$d\mu(z, \bar{z}) = e^{-\frac{1}{h}\Psi(z, \bar{z})} d\nu(z, \bar{z}) \quad (6.2)$$

دیگر ویژگی‌های این فضا در [۱۳] و [۱۵] آمده است. حالت‌های همدوس برزین  $\Phi_{\bar{z}}$  یک مجموعه فوق کامل در این فضا می‌سازند. با توجه به تعریف حاصل ضرب داخلی در این فضا داریم

$$\langle \Phi_{\bar{\zeta}}^h(z), \Phi_{\bar{\zeta}'}^h(z) \rangle_h =: K_h(\bar{\zeta}, z) \quad (7.2)$$

که در اینجا  $K_h(\bar{\zeta}, z)$  کرنل برگمن است [۱۵] که دارای ویژگی مهم بازآفرینی است

$$f(\zeta) = \langle \Phi_{\bar{\zeta}}^h, f \rangle_h \quad (8.2)$$

به عبارت دیگر

$$\Phi_{\bar{\zeta}}^h(z) = K_h(\bar{\zeta}, z) = \int_M K_h(\bar{\zeta}, \zeta') K_h(\zeta', z) d\mu(\zeta', \zeta') \quad (9.2)$$

وازاینرو داریم

$$1 = \int |\Phi_{\bar{z}}^h \langle \Phi_{\bar{z}}^h | d\mu(\bar{z}, z) \rangle \quad (10.2)$$

همچنین کرنل برگمن هریتی است یعنی

$$K_h(\bar{\zeta}, z) = \overline{K_h(\bar{z}, \zeta)} \quad (11.2)$$

با توجه به دو ویژگی فوق کرنل برگمن به طور یگانه برای هر فضا تعیین می‌شود. در واقع کرنل برگمن حامل ساختار

## ۱.۲ کوانتش برزین روی یک خمینه کیلری

فرض می‌کنیم  $M$  یک خمینه کیلری با فرم سیمپلکتیک  $\omega$  و براکت پواسون  $\{ \cdot, \cdot \}$  باشد. منظور از کوانتش برزین  $(M, \omega)$  یک جبر شرکت پذیر  $\mathcal{U}$  با خودوارونی است که شرایط زیر را برآورده می‌کند

(۱) یک خانواده  $\mathcal{A}_h$  از جبرهای شرکت پذیر و ضرب  $*_h$  با تعریفی که در بالا داده شده است یعنی

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1} (f *_h g - g *_h f) = -i \{f, g\} \quad (3.2)$$

که در اینجا

$$f_* = \lim_{h \rightarrow 0^+} f, g_* = \lim_{h \rightarrow 0^+} g.$$

وجود دارد که برای آن داریم

• (۱.الف) هر  $\mathcal{A}_h$  یک جبر از توابع روی  $M$  با جمع نقطه به نقطه و ضرب در اسکالر و مزدوج مختلط به عنوان خودوارونی می‌باشد:

• (۱.ب)  $h \in \Delta \subset (0, \infty)$  و  $0 \notin \Delta$ ؛

• (۱.ج)  $\mathcal{U}$  یک زیر جبر مستقیم  $\oplus \mathcal{A}_h$  از جبرهای  $\mathcal{A}_h$  است که برای آن  $h \in \Delta$  می‌باشد. عناصر  $\mathcal{U}$  به شکل  $f(h|\cdot)$  نوشته می‌شوند که برای آنها  $f(h|\cdot) \in \mathcal{A}_h$  و  $z \in M$  و  $h \in \Delta$

(۲) برای  $f \in \mathcal{U}$  و  $z \in M$  حد زیر وجود دارد

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h|z) = \varphi(f)(z), \quad (4.2)$$

نگاشت  $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}(M)$  که مجموعه توابع هموار روی  $M$  است، دارای این ویژگی است که برای جبر خطی  $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$

• (۲.الف)  $\varphi(f_1 * f_2) = \varphi(f_1) \cdot \varphi(f_2)$

• (۲.ب)

$$\varphi\left(\frac{1}{h}(f_1 * f_2 - f_2 * f_1)\right) = -i\{\varphi(f_1), \varphi(f_2)\}$$

در اینجا  $f_1, f_2 \in \tilde{\mathcal{U}}$

• (۲.ج) برای هر دو نقطه  $z_1, z_2 \in M$

یک  $f \in \tilde{\mathcal{U}}$  وجود دارد به طوری که  $\varphi(f)(z_1) \neq \varphi(f)(z_2)$

$$\begin{aligned}\widetilde{A}^*(\bar{\zeta}, z) &= \overline{\widetilde{A}(\bar{z}, \zeta)}, \quad c\widetilde{A} = c\widetilde{A}, c \in \mathbb{C} \\ (Af)(z) &= \int_M \widetilde{A}(\bar{\zeta}, z) K_h(\bar{\zeta}, z) f(\zeta) d\mu(\bar{\zeta}, \zeta).\end{aligned}\quad (16.2)$$

$$\begin{aligned}\widetilde{AB} &= \widetilde{A} *_{\bar{h}} \widetilde{B}(z) \\ &= \int_M \widetilde{A}(\bar{\zeta}, z) \widetilde{B}(\bar{z}, \zeta) \frac{|K_h(\bar{\zeta}, z)|^2}{K_h(\bar{z}, z)} \\ &\quad \times e^{-\frac{1}{\bar{h}}\Psi(\bar{\zeta}, z)} d\mu(\bar{\zeta}, \zeta)\end{aligned}\quad (17.2)$$

تحدید  $\widetilde{A}(\bar{\zeta}, z)$  به عناصر قطری

$$\widetilde{A}(z) = \widetilde{A}(\bar{z}, z), \quad z \in M \quad (18.2)$$

سمبل هموردای عملگر  $A$  نامیده می‌شود.  $\widetilde{A}(z)$  مقدار چشم‌داشتی  $A$  در حالت هم‌دوس  $\Phi_{\bar{z}}$  است که توسط  $z$  پارامتریزه می‌شود و لذا تابعی روی خمینه  $M$  است. بنا بر قضیه شوارتز داریم

$$|\widetilde{A}(z, \bar{z})| \leq \|A\|, \quad \forall z \in M, \quad (19.2)$$

یعنی  $\widetilde{A}(z)$  یک تابع کراندار روی  $M$  است.

به این ترتیب ما به یک تحقق از جبر  $A$  می‌رسیم

$$A = \{\widetilde{A}(z) : \text{عملگر خود الحاق روی } \mathcal{H}\} \quad (20.2)$$

از آنجایی که یک تابع تحلیلی از دو متغیر  $z$  و  $\bar{z}$  به طور یگانه از طریق تحدید به عناصر پاد قطری یعنی  $\bar{z} = z$  معین می‌شود [۸] در نتیجه  $\widetilde{A}(z)$  به طور یگانه  $\widetilde{A}(\bar{\zeta}, z)$  را و بنابراین  $K_A(\bar{\zeta}, z)$  و بالاخره  $A$  را تعیین می‌کند؛ لذا تناظر  $\bar{z} \leftrightarrow A(z)$  یک به یک است. از اینرو می‌توان جمع را از طریق  $(\widetilde{A} + \widetilde{B})(z) = \widetilde{(A+B)}(z)$ ، ضرب در یک اسکالر را از طریق  $c\widetilde{A} = \widetilde{cA}$  و خودوارونی را از طریق  $(\widetilde{A})^* = \widetilde{A}$  حاصل ضرب در  $A$  را از طریق (۱۷.۲) تعریف کرد.

بنابراین  $A_h$  یک جبر  $*$ -شکرت پذیر روی  $M$  است که عنصر همانی آن  $\bar{I} = 1$  می‌باشد.  $A_h$  جبر سمبل‌های هموردای  $\mathcal{H}_h$  نامیده می‌شود و با جبر همه عملگرهای خودالحاق روی  $\mathcal{H}_h$  یکرخت است.

بنابراین در اینجا نیز به تحقق از جبر مجرد  $A_h$  رسیدیم که برای بدست آوردن مشاهده‌پذیرهای کوانتومی نیاز داشتیم.

هندسی فضای فاز به (فضای هیلبرت) حالت‌های هم‌دوس است.

حال عملگر برافکنشی  $P_h$  از  $L^2(M, e^{-\frac{1}{\bar{h}}\Psi})$  به  $\mathcal{H}_h$  را تعریف می‌کنیم

$$(P_h f)(z) = \int f(\bar{\zeta}, \zeta) K_h(\bar{\zeta}, z) e^{-\frac{1}{\bar{h}}\Psi(\bar{\zeta}, z)} d\nu(\bar{\zeta}, \zeta) \quad (12.2)$$

برای یک عملگر کراندار  $A$  روی  $\mathcal{H}_h$  داریم

$$\begin{aligned}(Af)(z) &= \langle K_h(z, \cdot), Af \rangle_h = \langle A^\dagger K_h(z, \cdot), f \rangle_h \\ &= \int_M \overline{A^\dagger K_h(\bar{z}, \cdot)}(\zeta) f(\zeta) d\mu(\zeta) \\ &= \int_M f(\zeta) K_A(\bar{\zeta}, z) d\mu(\bar{\zeta}, \zeta),\end{aligned}\quad (13.2)$$

که در اینجا

$$\begin{aligned}K_A(\bar{\zeta}, z) &= \overline{(A^\dagger K_h(z, \cdot))(\zeta)} \\ \langle K_h(\bar{\zeta}, \cdot), A^\dagger K(\zeta, \cdot) \rangle_h &= \langle A^\dagger K_h(z, \cdot), K_h(\bar{\zeta}, \cdot) \rangle_h \\ &= \langle K_h(\bar{z}, \cdot), AK_h(\bar{\zeta}, \cdot) \rangle_h\end{aligned}\quad (14.2)$$

لذا هر عملگر کراندار  $A$  روی  $\mathcal{H}_h$  یک عملگر انتگرالی با کرنل  $K_A$  می‌باشد. فرض می‌کنیم  $A$  و  $B$  عملگرهای کراندار باشند. با توجه به تعریف کرنل به سادگی می‌توان نشان داد

$$\begin{aligned}K_{A+B} &= K_A + K_B, \quad K_{cA} = cK_A, \quad c \in \mathbb{C} \\ K_{A^\dagger}(\bar{\zeta}, z) &= \overline{K_A(\bar{z}, \zeta)}, \quad K_I(\bar{\zeta}, z) = K_h(\bar{\zeta}, z) \\ K_{AB}(\bar{\zeta}, z) &= \int K_A(\xi, z) K_B(\bar{\zeta}, \xi) d\mu(\xi, \xi).\end{aligned}$$

(برای سادگی در نوشتن، شناسه  $h$  در بعضی موارد نوشته نمی‌شود).

تابع

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(\bar{\zeta}, z) &= \frac{K(\bar{\zeta}, z)}{K_A(\bar{\zeta}, z)} = \frac{\langle K_h(z, \cdot), AK_h(\bar{\zeta}, \cdot) \rangle_h}{K_h(\bar{\zeta}, z)} \\ &= \frac{\langle \Phi_z^h, A\Phi_{\bar{\zeta}}^h \rangle_h}{\langle \Phi_z^h, \Phi_{\bar{\zeta}}^h \rangle_h}\end{aligned}\quad (15.2)$$

یک تابع مرمورفیک در  $z$  و پادمورمورفیک در  $\bar{z}$  است و در روابط زیر صدق می‌کند

$$\widetilde{\bar{I}}(\bar{\zeta}, z) = 1, \quad \widetilde{(A+B)} = \widetilde{A} + \widetilde{B}$$

## ۳.۲ فرضیات واصل انطباق

فرض می‌کنیم  $\bar{U} \subset U$  مجموعه همه توابعی باشد که بتوان آنها را به صورت زیر بسط داد

$$f(h|z) = f(\circ|\bar{z}, z) + hf_1(h|\bar{z}, z) + h^2 f_2(h|\bar{z}, z) \quad (24.2)$$

که در اینجا  $f_1(\bar{z}, z)$ ،  $f_2(\bar{z}, z)$  و  $f_2(h|\bar{z}, z)$  توابع یک و نیم خطی (sesquilinear) روی  $M \times \bar{M}$  هستند و یک گسترش تحلیلی روی آن دارند. با این فرضیات می‌توان قضیه زیر را ثابت کرد

در اینجا بایستی نشان داد که می‌توان از طریق جبر  $A_h$  در حد  $h \rightarrow 0$  جبر پوآسون بین مشاهده پذیرهای کلاسیک متناظر با عملگرهای خودالحاق را بدست آورد. برای اینکار نیازه فرضیات زیر است

- فرض  $A$  یک زیر مجموعه  $\mathbb{R}^+ \subset \Delta$  که  $0 \notin \Delta$  وجود دارد که برای همه  $h \in \Delta$  یک ثابت  $\lambda_h$  طوری وجود دارد که

$$K_h(\bar{z}, z) = \lambda_h e^{\frac{1}{h}\Psi(\bar{z}, z)} \quad (21.2)$$

قضیه ۱.۲. اگر فرضیات  $A, B, C$  و  $D$  برقرار باشند و  $h \in \Delta'$  در حد  $h \rightarrow 0$  داریم

$$(f * g)(h|z) = f(\circ|z)g(\circ|z) + O(h) \quad (25.2)$$

$$\frac{1}{h}(f * g - g * f)(h|z) = -i\{f(\circ|\cdot), g(\circ|\cdot)\}(z) + O(h). \quad (26.2)$$

که در اینجا  $\Delta'$  زیر مجموعه‌ای از  $\Delta$  است که  $f(h|z)$  با توجه به تعریف نرم در  $\mathcal{H}_h$  مربعاً انتگرال پذیر است.

- فرض  $B$  یک نقطه  $h_0 \in \Delta$  وجود دارد که برای  $h, h_0 \leq h$  توابع  $f(z) \in \mathcal{H}_h$  نقاط  $M$  را جدا می‌کنند، یعنی برای  $z_1, z_2 \in M$  و  $z_1 \neq z_2$  یک تابع  $f(z) \in \mathcal{H}_h$  وجود دارد که  $f(z_1) \neq f(z_2)$ .

- فرض  $C$  اگر  $(z_n)$  یک دنباله در  $M$  باشد و حد  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  برای هر  $f \in \mathcal{H}_h$  وجود داشته باشد، آنگاه  $z_n$  به یک نقطه  $z_0 \in M$  همگرا می‌شود.

- فرض  $D$  یک نقطه  $z_0 \in M$  طوری وجود دارد که  $\Psi(z_0, \cdot)$  برابر با یک ثابت است.

فرض  $D$  یک شرط بهنجارش است؛ می‌توان بدون ایجاد محدودیت قرار داد  $\Psi(z_0, z) = 0$ . فرض  $B$  تضمین می‌کند که  $\mathcal{H}_h$  در  $C^\infty(M)$  چگال است. فرض  $A$  در بعضی از خمینه‌ها می‌تواند مسئله ساز باشد اما در بسیاری از خمینه‌های جالب توجه در فیزیک می‌توان آن را بکاربرد [6].

در ابتدای این بخش جبر سمبلهای هموردا  $A_h$  برای فضای هیلبرت  $\mathcal{H}_h$  تبیین گردید. فرض می‌کنیم  $U$  مجموعه توابع  $f(h|z)$  باشد، که در اینجا  $h \in \Delta$  و  $z \in M$  طوری که  $f(h|\cdot) \in A_h$  و حد

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h|z) =: f(\circ|z) \quad (22.2)$$

برای هر  $z \in M$  وجود داشته باشد. با توجه به عملیات زیر یک جبر شرکت پذیر است

$$(f + g)(h|z) = f(h|z) + g(h|z)$$

$$(cf)(h|z) = cf(h|z)$$

$$(f * g)(h|z) = (f(h|\cdot) * g(h|\cdot))(z). \quad (23.2)$$

اثبات [۲]

خلاصه. با توجه به فرایند (پاد) کوانتس برزین ما فضای هیلبرت حالت‌های همدوس را روی خمینه کیلری فضای فاز کلاسیک بنا کردیم به طوری که هر حالت با یک نقطه در فضای فاز به هم مربوط می‌شود (کوانتس حالتها) و جبر مشاهده پذیرهای کلاسیک را از سمبلهای هموردا مشاهده پذیرهای کوانتومی بدست آوردیم (پادکوانتس مشاهده پذیرها).

حال می‌خواهیم از روش فرمولبندی هندسی مکانیک کوانتومی برای یک فرمولبندی هندسی کوانتس برزین استفاده کنیم.

### ۳ فضای فاز کوانتومی

در این مختصات خواهیم داشت  $(\psi, \psi) = (1 + \sum_n Z_n^k Z_n^k)$  می توان نشان داد  $\varphi_k \circ \varphi_{k'}^{-1}$  یک نگاشت هولومورف دو سویه است. بنابراین  $\{\mathcal{V}_k, \varphi_k\}$  یک اطلس هولومورف است. می توان این اطلس را به صورت دیگری نیز بنا نمود. بنا بر تعریف

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k &:= \{[\psi] \in \mathbb{P}(\mathcal{H}) : \lambda_k = \langle \phi_k, \psi \rangle \neq 0\} \\ \mathcal{W}_k &:= [\phi_k]^\perp \\ \varphi_k &: \mathcal{V}_k \rightarrow \mathcal{W}_k, [\psi] \mapsto \varphi_k([\psi]) = \frac{\psi}{\langle \phi_k, \psi \rangle} - \phi_k. \end{aligned} \quad (۴.۳)$$

بنابراین برای  $[\psi] \in \mathcal{V}_k \cap \mathcal{V}_{k'}$  داریم

$$\varphi_k \circ \varphi_{k'}^{-1}[\psi] = \frac{\psi + \phi_{k'}}{\langle \phi_k, \psi + \phi_{k'} \rangle} - \phi_k. \quad (۵.۳)$$

برای اثبات اینکه این یک اطلس روی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  می سازد به طریق زیر عمل می کنیم

مخرج کسر طرف راست برای هر  $[\psi]$  متعلق به  $\mathcal{V}_k$  غیر صفر است، بنابراین  $\varphi_k \circ \varphi_{k'}^{-1}$  تابع هموار روی حوزه تعریف خود می باشد.

فرض می کنیم  $\frac{\psi'}{\langle \phi_k, \psi' \rangle} - \phi_k = \frac{\psi}{\langle \phi_k, \psi \rangle} - \phi_k$ ؛ آنگاه

$$\psi' = \frac{\langle \phi_k, \psi' \rangle}{\langle \phi_k, \psi \rangle} \psi = c\psi$$

و بنا براین  $[\psi] = [\psi']$ . یعنی  $\varphi_k$  یک به یک است. چون برای  $\chi \in \mathcal{W}_k$  داریم  $\langle \phi_k, \chi \rangle = 0$  و  $\langle \phi_k + \chi, \phi_k \rangle = 1 \neq 0$  بنا براین  $\phi_k + \chi \in \mathcal{V}_k$ . حال می توان نشان داد هر عنصر  $\mathcal{W}_k$  به صورت تصویر یک عنصر از  $\mathcal{V}_k$  می تواند نوشته شود  $\varphi_k(\phi_k + \chi) = \frac{\phi_k + \chi}{\langle \phi_k, \phi_k + \chi \rangle} - \phi_k = \chi$  می باشد. از اینرو  $(\mathcal{V}_k, \mathcal{W}_k; \varphi_k)$  یک اطلس روی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  می سازد.

### ۲.۳ میدان های برداری هامیلتونی روی فضای فاز کوانتومی

ابتدا یک میدان برداری هامیلتونی را روی یک خمینه سیمپلکتیک  $(M, \omega)$  تعریف می کنیم. میدان  $A$  را هامیلتونی

فرض می کنیم  $\mathcal{H}$  یک فضای هیلبرت باشد. فضای پرتوها در فضای هیلبرت را با  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  نشان می دهیم و به آن فضای هیلبرت برافکنشی می گوئیم.  $\pi: \mathcal{H} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H})$  یک برافکنش کانونیک است. هر نقطه در فضای برافکنشی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  را با  $[\psi]$  نشان می دهیم که متناظر با زیر فضای یک بعدی  $\mathbb{C}\psi$  در  $\mathcal{H}$  است. فضای  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  یک خمینه کیلری با دو فرمی فوبینی-استادی است که به صورت زیر تعریف می شود [۱۱]

$$\Omega_{[\psi]}^h(T_\psi \pi(\phi_1), T_\psi \pi(\phi_2)) = -2h(\langle \phi_1, \phi_2 \rangle) \quad (۱.۳)$$

که در اینجا  $\phi \in (\mathbb{C}\psi)^\perp$  و  $[\psi] \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$  یک نقطه در فضای برافکنشی و  $T_\psi \pi(\phi)$  فضای مماسی در نقطه  $[\psi]$  بر  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  است که با  $\mathcal{H} \setminus \mathbb{C}\psi$  یکرخت می باشد

$$T_\psi \pi: \mathcal{H} \rightarrow T_{[\psi]} \mathbb{P}(\mathcal{H}) \simeq \mathcal{H} / \mathbb{C}\psi$$

و به صورت زیر تعریف می شود

$$(T_\psi \pi)(\phi) = \frac{d}{dt} \pi(\psi + t\phi) |_{t=0}$$

### ۱.۳ اطلس روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$

فرض می کنیم  $\{\varphi_n\}$  یک دستگاه راست هنجار دلخواه در  $\mathcal{H}$  باشد. ضرایب فوریه بردار  $\psi$  در این پایه عبارتند از  $\lambda_k = \langle \phi_k, \psi \rangle$ . برای هر  $k \in \mathbb{N}$  تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k &:= \{[\psi] \in \mathbb{P}(\mathcal{H}) \mid \lambda_k = \langle \phi_k, \psi \rangle \neq 0\} \\ \varphi_k &: \mathcal{V}_k \rightarrow l^2(\mathbb{C}) \\ \varphi_k([\psi]) &:= \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_k}, \frac{\lambda_2}{\lambda_k}, \dots, \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}, \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}, \dots \right) \end{aligned} \quad (۲.۳)$$

که در اینجا  $l^2(\mathbb{C})$  فضای هیلبرت دنباله های مربعاً انتگرال پذیر از اعداد مختلط است. مختصات  $[\psi]$  در رابطه با مختصات  $(\mathcal{V}_k, \varphi_k)$  را با  $Z_n^k$  نشان می دهیم. به طوری که

$$Z_n^k = \begin{cases} \frac{\lambda_n}{\lambda_k} & : n < k \\ \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_k} & : n \geq k \end{cases} \quad (۳.۳)$$

به صورت زیر در خواهد آمد

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \sum_n \lambda_n \phi_n = H_A \sum_n \lambda_n \phi_n \quad (10.3)$$

و یا

$$i\hbar \dot{\lambda}_n = \sum_m h_{nm}^A \lambda_m \quad (11.3)$$

که در اینجا  $\dot{\lambda}_n = \partial \lambda_n / \partial t$ . از اینجا به بعد ما  $k \in \mathbb{N}$  را ثابت در نظر می گیریم و علامتگذاری زیر را معرفی می کنیم

$$\hat{n} = \begin{cases} n & : n < k \\ n+1 & : n \geq k \end{cases} \quad (12.3)$$

و بنابراین می توانیم مختصات جدید روی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  را تعریف کنیم

$$Z_n^k = \frac{\lambda_{\hat{n}}}{\lambda_k} \quad (13.3)$$

در مختصات جدید معادله شرودینگر (۹.۳) به صورت زیر در می آید

$$i\hbar \dot{Z}_k^n = \sum_m h_{\hat{n}m}^A Z_m^k + h_{\hat{n}k}^A - \sum_m h_{k\hat{m}}^A Z_m^k Z_n^k - h_{kk}^A Z_n^k \quad (14.3)$$

در اینجا از رابطه

$$\sum_m h_{nm}^A \lambda_m = \sum_m h_{\hat{n}m}^A \lambda_{\hat{m}} + h_{\hat{n}k}^A \lambda_k \quad (15.3)$$

استفاده کرده ایم. می خواهیم رابطه (۱۴.۳) را با معادله که از  $A$  بدست می آید مقایسه کنیم. همان طور که در ابتدای این بخش گفته شد مقدار چشم داشتی  $H_A$  تابع هامیلتونی میدان برداری  $A$  است

$$\langle H_A \rangle = \frac{\langle \psi, H_A \psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} = \frac{\sum_{n,m} \bar{\lambda}_n h_{\hat{n}m}^A \lambda_m}{\sum_n \bar{\lambda}_n \lambda_n} \quad (16.3)$$

در مختصات  $Z_m^k$  مقدار چشم داشتی  $H_A$  به صورت زیر در خواهد آمد

$$\langle H_A \rangle = \left[ \sum_{m,n} \bar{Z}_n^k h_{\hat{n}m}^A Z_m^k + \sum_n h_{k\hat{n}}^A Z_n^k + \sum_m \bar{Z}_m^k h_{\hat{m}k}^A h_{kk}^A \right] \left( 1 + \sum_i Z_i^k \bar{Z}_i^k \right)^{-1} \quad (17.3)$$

می نامیم اگر بتوان همواره روی  $M$  تابع هموار  $f$  را پیدا کرد که برای آن داشته باشیم

$$i_A \omega = df \quad (6.3)$$

که در اینجا  $i_A$  ضرب درونی دوفرمی  $\omega$  نسبت به  $A$  است. مشاهده پذیرهای  $H$  مکانیک کوانتومی عملگرهای خودالحاق روی فضای هیلبرت اند. مقادیر چشم داشتی یک عملگر  $\langle H \rangle$  در حالت‌های مختلف  $\psi \in \mathcal{H}$  می توانند توابعی روی خمینه سیمپلکتیک  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  در نظر گرفته شوند.  $A$  یک میدان برداری هامیلتونی است اگر یک عملگر خودالحاق  $H_A$  طوری وجود داشته باشد که با دوفرمی فوبینی-استادی رابطه زیر برقرار باشد

$$i_A \Omega_{FS} = d \langle H_A \rangle. \quad (7.3)$$

که در اینجا  $\langle H_A \rangle$  مقدار چشم داشتی  $H_A$  می باشد

$$\langle H_A \rangle = \frac{\langle \psi, H_A \psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle}. \quad (8.3)$$

$H_A$  را عملگر هامیلتونی مربوط به  $A$  می گویند. مسئله‌ای که در اینجا مطرح می شود آن است که وقتی عملگر هامیلتونی بیکران باشد مقدار چشم داشتی آن فقط روی یک زیر مجموعه چگال در  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  و نه روی کل  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ ، یک تابع هموار تعریف می کند. در اینجا به مورد عملگرهای بیکران نمی پردازیم. حال می خواهیم نشان دهیم [۱۳، ۳]

قضیه ۱.۳. فرض می کنیم  $A$  یک میدان برداری هامیلتونی روی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  و  $H_A$  عملگر هامیلتونی مربوط به آن باشد. معادله شرودینگر روی فضای هیلبرت با هامیلتونی  $H_A$  هم ارز با معادله ای است که توسط  $A$  روی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  داده می شود.

اثبات. فرض می کنیم  $\{\phi_n\}$  یک پایه راست هنجار در  $\mathcal{H}$  و  $\psi \in \mathcal{H} - \{0\}$  باشد. ضرایب فوریه در این پایه عبارتند از  $\lambda_n = \langle \phi_n, \psi \rangle$  و عناصر ماتریسی  $H_A$  از رابطه  $\langle \phi_m, H_A \phi_n \rangle = h_{mn}^A$  معین می شوند. معادله شرودینگر

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_A \psi \quad (9.3)$$

که در اینجا رابطه زیر بکار رفته است

$$\sum_n \bar{\lambda}_n \lambda_n = \sum_n \bar{\lambda}_n \lambda_n + \bar{\lambda}_k \lambda_k = (\bar{\lambda}_k \lambda_k) \left( 1 + \sum_i \bar{Z}_i^k Z_i^k \right)$$

می‌توان معادله زیر را از روابط بالا بدست آورد

$$\frac{\partial \langle H_A \rangle}{\partial Z_p^k} = \sum G_{np}^k \left( \sum_m h_{n\bar{m}}^A Z_m^k + h_{n\bar{k}}^A - \sum h_{k\bar{m}}^A Z_m^k Z_n^k - h_{kk}^A Z_n^k \right) \quad (18.3)$$

که در اینجا  $G_{np}^k$  همان دو فرمی فوبینی - استادی  $\Omega_{np}^k / (\hbar)$  روی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  است که در مختصات موضعی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\Omega_{np}^k = \hbar \left[ \left( 1 + \sum_i Z_i^k \bar{Z}_i^k \right)^{-1} \delta_{np} - \left( 1 + \sum_i Z_i^k \bar{Z}_i^k \right)^{-2} Z_n^k \bar{Z}_p^k \right]. \quad (19.3)$$

در مختصات موضعی می‌توان میدان برداری  $A$  در رابطه (۶.۳) را به صورت زیر نوشت

$$A = -i \sum_{n,p} \Omega_{n,p}^k \left( \frac{\partial \langle H_A \rangle}{\partial \bar{Z}_p^k} \frac{\partial}{\partial Z_n^k} - \frac{\partial \langle H_A \rangle}{\partial Z_p^k} \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_n^k} \right) \quad (20.3)$$

که در اینجا  $\Omega_{n,p}^k$  وارون  $\Omega_{np}^k$  در مختصات موضعی است. چون  $\langle H_A \rangle$  حقیقی است

$$\overline{\frac{\partial \langle H_A \rangle}{\partial \bar{Z}_p^k}} = \frac{\partial \langle H_A \rangle}{\partial Z_p^k} \quad (21.3)$$

بنابراین در این مختصات  $A$  به صورت زیر خواهد شد

$$A = -\frac{i}{\hbar} \sum_n \left( \sum_m h_{n\bar{m}}^A Z_m^k + h_{n\bar{k}}^A - \sum h_{k\bar{m}}^A Z_m^k Z_n^k - h_{kk}^A Z_n^k \right) \frac{\partial}{\partial Z_n^k} + c.c. \quad (22.3)$$

با استفاده از (۱۴.۳) داریم  $A(Z_n^k) = -\frac{i}{\hbar} (i\hbar) \dot{Z}_n^k = \dot{Z}_n^k$  که از اینجا نتیجه می‌شود

$$\{ \mathcal{H}, \frac{-i}{\hbar} H_A \} \equiv \{ \mathbb{P}(\mathcal{H}), A = X_{\langle H_A \rangle} \} \quad (23.3)$$

به عبارت دیگر

$$A[\psi] = \frac{1}{i\hbar} \frac{H_A \psi}{\|\psi\|}. \quad (24.3)$$

در اینجا  $A[\psi]$  یک بردار مماسی روی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  در نقطه  $[\psi]$  است. ■

بخش مزدوج مختلط  $A$  معادله شرودینگر را برای  $\psi^*$  نتیجه می‌دهد.

به عنوان یک نتیجه خاص می‌توان گفت تحول زمانی یک دستگاه کوانتوم مکانیکی به صورت معادلات هامیلتونی مکانیک کلاسیک می‌تواند نوشته شود، که تابع هامیلتونی مقدار منتظره عملگر هامیلتونی است.

به این ترتیب می‌توان انتظار داشت که روی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  یک ساختار پوآسون وجود داشته باشد. در گزاره زیر خواهیم دید که این ساختار پوآسونی بر حسب دو فرمی فوبینی - استادی تعریف می‌شود. روی یک خمینه سیمپلکتیک با دو فرمی  $\Omega$  رابطه زیر برقرار است

$$\{f, g\} = \Omega(X_f, X_g) \quad (25.3)$$

که در اینجا  $X_f$  و  $X_g$  به ترتیب میدانهای برداری هامیلتونی  $f$  و  $g$  هستند. ثابت می‌کنیم

گزاره ۲.۳ اگر  $A, B : \mathbb{P}(\mathcal{H}) \rightarrow T\mathbb{P}(\mathcal{H})$  دو میدان برداری هامیلتونی خطی که به توابع  $\langle H_A \rangle$  و  $\langle H_B \rangle$  روی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  باشند، آنگاه

$$\{ \langle H_A \rangle, \langle H_B \rangle \} = \left\langle \frac{1}{i\hbar} [H_A, H_B] \right\rangle \quad (26.3)$$

اثبات. چون  $A = X_{\langle H_A \rangle}$ ، بنابراین

$$\{ \langle H_A \rangle, \langle H_B \rangle \} = \Omega(A, B)$$

و از طرف دیگر با توجه به تعریف دو فرمی فوبینی - استادی داریم (۳.۱)

$$\Omega_{[\psi]}(A, B) = -2\hbar \text{Im} \langle A[\psi], B[\psi] \rangle \quad (27.3)$$

با استفاده از (۲۵.۳) داریم

$$\begin{aligned} \{ \langle H_A \rangle, \langle H_B \rangle \} \cdot &= \Omega(A, B) \\ &= \frac{-2\hbar}{\|\psi\|^2} \text{Im} \left\langle \frac{1}{i\hbar} H_A \psi, \frac{1}{i\hbar} H_B \psi \right\rangle \end{aligned}$$



می‌توان معادلات هامیلتونی را به شکل زیر نوشت

$$\frac{dx^a}{dt} = \sum_b \Omega^{ab} \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial x^b}, \quad (۳۵.۳)$$

که  $\Omega^{ab}$  وارون دو فرمی فوبینی—استادی است. براکت پواسون در رابطه با توابع روی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  به صورت زیر داده می‌شود

$$\{f, g\} = \sum_{ab} \Omega^{ab} \frac{\partial f}{\partial x^a} \frac{\partial g}{\partial x^b}, \quad (۳۶.۳)$$

و از اینجا تحول زمانی یک تابع دلخواه  $f$  به صورت زیر داده می‌شود

$$\frac{df}{dt} = \{f, \langle H \rangle\}. \quad (۳۷.۳)$$

در فرمولبندی هندسی مکانیک کوانتومی به صورت فوق تمایز بین تصویر شرودینگر و هایزنبرگ برداشته می‌شود، زیرا در هر دو تصویر مقدار چشم‌داشتی یک مشاهده پذیر در شکل یکسان (۳۷.۳) داده می‌شود.

نکته. ساختار پواسونی که در اینجا مطرح گردید، یک ساختار کوانتوم مکانیکی است زیرا جبر پواسون روی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  و نه روی فضای فاز کلاسیک  $M$  تعریف شده‌است.

مشابه‌ها می‌توانیم ساختار دیگری در رابطه با متریک فوبینی—استادی روی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  را مطالعه کنیم. همانطور که گفته شد این متریک به صورت زیر تعریف می‌شود

$$g_{[\psi]}(A, B) = \frac{2\hbar}{\|\psi\|^2} \operatorname{Re} \left( \left\langle \frac{H_A}{i\hbar} \psi, \frac{H_B}{i\hbar} \psi \right\rangle \|\psi\|^2 \right) \quad (۳۸.۳)$$

که در اینجا  $A$  و  $B$  روی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  و  $H_A$  و  $H_B$  روی  $\mathcal{H}$  عمل می‌کنند و  $\psi \in \mathcal{H} - \{0\}$ . چون  $H_B$  و  $H_A$  خودالحاق‌اند بنابراین

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\langle \frac{H_A}{i\hbar} \psi, \frac{H_B}{i\hbar} \psi \right\rangle &= \frac{1}{2\hbar^2} (\langle H_A \psi, H_B \psi \rangle \\ &+ \langle H_B \psi, H_A \psi \rangle) \\ &= \frac{1}{2\hbar^2} (\langle (H_A H_B + H_B H_A) \psi, \psi \rangle) \\ &= \frac{1}{2\hbar^2} \langle [H_A, H_B] + \psi, \psi \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-1}{i\hbar \|\psi\|^2} \langle H_A \psi, H_B \psi \rangle \\ &- \langle H_B \psi, H_A \psi \rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar \|\psi\|^2} \langle [H_A, H_B] \psi, \psi \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{i\hbar} [H_A, H_B] \right\rangle. \end{aligned}$$

■ برای آنکه دینامیک روی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  را از نزدیک مورد مطالعه قرار دهیم، فرض می‌کنیم  $\{\phi_n\}$  ویژه حالت‌های عملگر هامیلتونی  $H$  باشند و بردار  $\psi$  را با نرم واحد انتخاب می‌کنیم یعنی  $\langle \psi, \psi \rangle = 1$  آنگاه

$$H \phi_k = E_k \phi_k \quad \langle H \rangle = \langle H \psi, \psi \rangle = \sum_k |\lambda_k|^2 E_k. \quad (۲۸.۲)$$

اعداد مختلط  $\lambda_k$  را می‌توان به صورت حاصل جمع دو بخش حقیقی و موهومی نوشت

$$\lambda_k = \frac{q_k + ip_k}{\sqrt{2\hbar}}. \quad (۲۹.۳)$$

در اینجا  $q_k, p_k$  مختصات روی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  می‌باشند. بنابراین

$$\langle H \rangle = \sum \frac{1}{2\hbar} E_k (q_k^2 + p_k^2). \quad (۳۰.۳)$$

که شبیه به معادله هامیلتونی نوسانگر ساده‌است! شرط بهنجارش در این مختصات به صورت زیر است

$$\sum (q_k^2 + p_k^2) = 2\hbar. \quad (۳۱.۳)$$

وقتی معادله (۲۸.۲) در مختصات  $q_k, p_k$  بیان شود خواهیم داشت

$$i\hbar \left( \frac{\dot{q}_k + ip_k}{\sqrt{2\hbar}} \right) = \sum E_k \left( \frac{q_k + ip_k}{\sqrt{2\hbar}} \right) \quad (۳۲.۳)$$

بنابراین

$$\dot{q}_k = \frac{E_k p_k}{\hbar}, \quad \dot{p}_k = -\frac{E_k q_k}{\hbar}. \quad (۳۳.۳)$$

با استفاده از (۲۸.۲) بدست می‌آوریم

$$\dot{q}_k = \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial q_k}. \quad (۳۴.۳)$$

که همان معادلات هامیلتون در مکانیک کلاسیک است. در رابطه با دو فرمی سیمپلکتیک روی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  و مختصات

یک احتمال گذار طبیعی دانست. به این ترتیب می توان گفت اصل عدم قطعیت هایزنبرگ نتیجه ای از ساختار هندسی فضای هیلبرت و  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  است.

با توجه به مباحث فوق به طور خلاصه می توان فرمولبندی هندسی مکانیک کوانتومی را به صورت زیر بیان نمود:

یک میدان برداری حقیقی  $A$  روی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  یک میدان برداری هامیلتونی است که از طریق دو فرمی  $\Omega$  با مقادیر چشم داشتی یک عملگر خودالحاق  $H_A$  در فضای  $\mathcal{H}$  متناظر است. معادله شرودینگری که  $H_A$  در  $\mathcal{H}$  تعریف می کند متناظر با معادله حرکت تعریف شده توسط  $A$  روی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  می باشد. مقادیر چشم داشتی عملگرهای هامیلتونی توابعی روی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  می باشند.

حال می خواهیم در مورد شار بردارهای هامیلتونی بحث کنیم. فرض می کنیم  $X_{\langle H_A \rangle}$  یک میدان برداری هامیلتونی روی خمینه سیمپلکتیک  $(\mathbb{P}(\mathcal{H}), \Omega)$  با تابع هامیلتونی  $\mathbb{P}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R} : \langle H \rangle$  باشد. شار  $X_{\langle H_A \rangle}$  مجموعه نگاشتهای  $\varphi_t : \mathbb{P}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H})$  است که با رابطه زیر داده می شوند

$$\frac{d}{dt} \varphi_t(z) = X_{\langle H \rangle}(\varphi_t(z)) \quad (45.3)$$

که در اینجا  $z \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$  و  $t \in \mathbb{R}$  است. بنا براین قضیه زیر برقرار است

قضیه ۴.۳. یک میدان برداری حقیقی روی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  یک میدان برداری هامیلتونی است اگر و فقط اگر شار آن یک گروه یک پارامتری دیفرانسیل پذیر از ایزومتري های کیلری روی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  باشد. [۳]

این قضیه به معنی آن است که وقتی  $A$  یک میدان برداری هامیلتونی است آنگاه عملگر  $U_A(t) = \exp(-iH_A t)$  شار  $A$  را تعریف می کند، که در اینجا  $H_A$  عملگر هامیلتونی مربوط به  $A = X_{\langle H_A \rangle}$  است. برای میدان برداری هامیلتونی  $A$  داریم  $\mathcal{L}_{A}g = 0$ ، که در اینجا  $g$  متریک فوبینی-استادی روی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  و  $\mathcal{L}_A$  مشتق لی در امتداد  $A$  است. از اینرو

تعریف ۵.۳. فرض می کنیم  $f \in C^\infty(\mathbb{P}(\mathcal{H}), \mathbb{R})$  یک تابع هموار حقیقی روی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  و  $X$  میدان برداری باتعریف  $df = iX_{\langle f \rangle} \Omega_{FS}$  باشد. تابع  $f$  کیلری نامیده می شود اگر  $\mathcal{L}_A g = 0$  باشد. وقتی  $f \in C^\infty(\mathbb{P}(\mathcal{H}), \mathbb{C})$  باشد، آنگاه  $f$  کیلری است اگر  $Re f$  و  $Im f$  کیلری باشند.

به این ترتیب می توان متریک رابه صورت زیر نوشت

$$g_{[\psi]}(A, B) = \frac{1}{\hbar} \frac{\langle [H_A, H_B]_+ \psi, \psi \rangle}{\|\psi\|^2} \quad (39.3)$$

در نتیجه

$$\hbar g_{[\psi]}(A\eta, B\eta) = \frac{1}{\hbar} \langle [H_A, H_B]_+ (\psi) \rangle. \quad (40.3)$$

علاوه براین برای پراکنندگی یک عملگر داریم

$$(\Delta H_A)^2 = \langle H_A^2 \rangle - \langle H_A \rangle^2. \quad (41.3)$$

بنا براین نتیجه می شود

$$(\Delta H_A)^2 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} g(A, A) + \langle H_A \rangle^2. \quad (42.3)$$

تعریف ۳.۳. فرض می کنیم  $\langle H_A \rangle, \langle H_B \rangle$  متعلق به  $C^\infty(\mathbb{P}(\mathcal{H}), \mathbb{R})$  باشند. براکت ریمان  $\{\langle H_A \rangle, \langle H_B \rangle\}_R$  یک تابع حقیقی هموار روی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  می باشد که به صورت زیر تعریف می شود

$$\{\langle H_A \rangle, \langle H_B \rangle\}_R = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} g(X_{\langle H_A \rangle}, X_{\langle H_B \rangle}) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} g(A, B). \quad (43.3)$$

متریک ریمانی هیچ مشابهی در مکانیک کلاسیک ندارد، زیرا فضای فاز کلاسیک در حالت کلی دارای یک ساختار ریمانی طبیعی نیست. می توان رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ را بر حسب متریک ریمانی به صورت زیر بیان نمود [۱۳]

$$\begin{aligned} (\Delta H_A)^2 (\Delta H_B)^2 &\geq \left\langle \frac{-i}{\sqrt{2}} [H_A, H_B] \right\rangle^2 \\ &+ \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} [H_A, H_B]_+ \right\rangle^2 = \left( \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \{\langle H_A \rangle, \langle H_B \rangle\}_R \right)^2 \\ &+ \left( \{\langle H_A \rangle, \langle H_B \rangle\}_R - \langle H_A \rangle \langle H_B \rangle \right)^2. \end{aligned} \quad (44.3)$$

از اینرو

وجود یک ساختار ریمانی کانونیک با مشخصه احتمالی مکانیک کوانتومی متناظر است. از طریق این متریک می توان احتمال گذار بین دو حالت را بیان نمود. به این لحاظ می توان  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  را فضای فاز کوانتومی دارای

به عنوان یک نتیجه از قضیه فوق می‌توان نشان داد

گزاره ۶.۳. فرض کنید  $f$  یک تابع دارای مقدار مختلط روی  $\mathbb{P}(H)$  باشد؛ آنگاه  $f$  کیلری است اگر و فقط اگر یک عملگر کراندار  $B$  وجود داشته باشد که  $f = \langle B, \cdot \rangle$ .

نتیجه

می‌توان عملگرهای خودالحاق یعنی مشاهده پذیرهای کوانتومی را از طریق یک ردهٔ منتخب از توابع هموار روی فاز کوانتومی  $\mathbb{P}(H)$ ، یعنی توابع کیلری، نمایش داد. چون ساختار هندسی  $\mathbb{P}(H)$  (متریک و دوفرمی سیمپلکتیک) تحت کنش شارهای هامیلتونی پایسته می‌ماند، می‌توان گفت که مشاهده پذیرها، مولدهای تقارنهای ساختاری فضای فاز کوانتومی اند.

در اینجا  $[U_g \Phi_0]$  برافکنش نمایش  $U_g$  روی فضای  $\mathbb{P}(H)$  است. نشان داده شده است [۱۰] که در مورد گروه‌های نیم‌ساده (فشرده یا غیر فشرده) این مدارها زیرخمینه کیلری، یعنی خمینه سیمپلکتیک با ساختار مختلط، هستند. لذا  $\mathcal{M}$  در  $\mathbb{P}(H)$  نشانده می‌شود  $\mathbb{P}(H) \hookrightarrow \mathcal{M}$  و از این طریق دو فرمی  $\Omega_{PS}$  روی آن القا می‌شود

$$\Omega = \iota^* \Omega_{PS} = \Omega_{PS}|_{\mathcal{M}}$$

گاهی اوقات  $\mathcal{M}$  فضای فاز کوانتومی نامیده می‌شود.

همه آنچه در مورد ساختار هندسی  $\mathbb{P}(H)$  گفته شد در مورد  $\mathcal{M}$  برقرار است، زیرا همانطور که گفته شد  $\tilde{H}$  در  $H$  چگال و لذا  $\mathbb{P}(\tilde{H})$  در  $\mathbb{P}(H)$  چگال می‌باشد.

### ۴.۳ نشان دادن فضای فاز کلاسیک در فضای حالت‌های همدوس

حال می‌خواهیم رابطه بین فضای فاز کلاسیک  $M$  و فضای حالت‌های همدوس  $\mathcal{M}$  را مورد مطالعه قرار دهیم. این موضوع کوانتش حالت‌های همدوس است [۱] همان‌طور که در بخش قبل دیدیم، مدارهای حالت‌های همدوس زیر فضای کیلری چگال در  $\mathbb{P}(H)$  هستند که ساختار کیلری روی آنها القا می‌شود. با توجه به اینکه می‌توان مدار حالت‌های همدوس  $\mathcal{M}$  را از طریق نقاط فضای فاز کلاسیک پارامتریزه نمود [۱۵] می‌توان از نشان دادن فضای فاز کلاسیک در فضای فاز کوانتومی سخن گفت. اگر از یک دستگاه کلاسیک شروع کنیم آنگاه این نشانده‌گی به کوانتش دستگاه کلاسیک منجر می‌شود. با استفاده از قضیه نشانده‌گی کودایرا [۷] می‌توان اثبات کرد که یک نگاشت نشانده‌گی هولومورف برای یک خمینه کیلری  $M$  به صورت  $M \rightarrow \mathcal{M}$  وجود دارد [۱۲]. دو ویژگی مهم این نشانده‌گی عبارت است از اینکه این نگاشتها یک به یک و همه جا دارای ديفرانسیل غیر صفرند. از بیانات فوق نتیجه می‌شود که یک نقطه در فضای فاز کلاسیک  $(M, \omega)$  به یک حالت همدوس در فضای فاز کوانتومی مرتبط می‌شود و رابطه ساختارهای سیمپلکتیک آن دو به صورت  $\omega = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \iota_{\hbar}^* \Omega_{PS}$  به هم مربوط می‌شود، یعنی  $\iota_{\hbar}$  یک سیمپلکتومورفیزم تقریبی است. اگر حالت‌های همدوس از نمایش یک گروه لی  $G$  تولید شده باشند  $(M, \Omega_{PS})$  نیز یک خمینه سیمپلکتیک همگن است

### ۳.۳ خمینه حالت‌های همدوس

یک دستگاه کوانتومی دارای تقارن سه مؤلفه دارد: یک فضای هیلبرت تفکیک پذیر  $H$ ، یک گروه لی  $G$  و یک نمایش کاهش ناپذیر از  $G$  روی  $H$ . حالت‌های همدوس تعمیم یافته [ر.ک. [۱۵] و مراجع معرفی شده در آن] عبارتند از عناصر یک  $G$ -مدار که از کنش نمایش اعضای گروه روی یک حالت مرجع  $\Phi_0 \in H$  بدست می‌آیند. حالت‌های همدوسی که به این ترتیب بدست می‌آیند به انتخاب حالت مرجع بستگی دارند. در مورد گروه‌های نیم‌ساده بردار با بالاترین وزن انتخاب می‌شود. زیر گروه  $G$  که عناصر آن حالت مرجع را، با صرف نظر از یک ضریب فاز ناوردا می‌گذارند، زیر گروه پایداری ماکزیمال  $\mathcal{K}$  نامیده می‌شود و به صورت زیر نوشته می‌شود

$$h \cdot \Phi_0 = \Phi_0 e^{i\varphi(h)}, \quad h \in \mathcal{K}. \quad (۴۶.۳)$$

به این ترتیب  $G$ -مدار  $\Phi_0$  یک زیر فضای  $\tilde{H}$  چگال در  $H$  می‌سازند به طوری که  $\mathbb{P}(\tilde{H}) \subset \mathbb{P}(H)$ . از رابطه فوق پیداست خمینه حالت‌های همدوس  $\mathcal{M} \cong \mathbb{P}(\tilde{H})$  ایزومورف با فضای خارج قسمت  $G/\mathcal{K}$  است و حالت‌های همدوس از طریق نقاط  $G/\mathcal{K}$  پارامتریزه می‌شود، یعنی برای  $g \in G$  داریم

$$[U_g \Phi_0] = [\Phi_g] \in \mathcal{M} \quad (۴۷.۳)$$

مانند درجات آزادی داخلی، اصل طرد پاؤلی و تقارن‌های دینامیکی حفظ می‌شوند.

حد کلاسیک. با توجه به رابطه نشانندگی فضای فاز کلاسیک در فضای فاز حالت‌های همدوس و تشابه جبر مشاهده پذیرهای آنها، می‌توان حد کلاسیک برای یک دستگاه کوانتومی را با استفاده از رابطه (۴.۲) به صورت زیر نوشت

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \{ \tilde{A}, \tilde{B} \}_{i, \Omega_{FS}}(Z) = \{ \varphi(\tilde{A}), \varphi(\tilde{B}) \}(z), \quad z \in M, Z \in \mathcal{M} \quad (51.4)$$

که در اینجا  $\varphi$  نگاشتی است که در معادله (۴.۲) تعریف شده است.

### مراجع

- [1] S T Ali, J P Antoine, J P Gazeau  
*Coherent States, Wavelets and Their Generalization* Springer-Verlag (2000).
- [2] F A Berezin,  
*Math.USSR-Izv.* 8(1974)no 5, 1109-1165.
- [3] R Cirelli, P Lanyavecchia,  
*Nuovo Cimento B* 79(1984) 271-283.
- [4] M De Wilde, P B A Lecompte,  
*Lett. Math.Phys.* 7(1983), 487-496.
- [5] M Englis,  
*Trans.Amer.Math.Soc.* 348, no 2 (1996) 411-479.
- [6] M Englis,  
*Trans.Amer.Math.Soc.* 349, no 9(1997) 3717-3735.
- [7] Ph Griffith, P Harris,  
*Principles of algebraic geometry*, John Wiley, New York (1978).

که گروه حرکت آن گروه لی  $G$  می‌باشد.

## ۴ جمع‌بندی نهایی و نتیجه‌گیری

تا اینجا ابزار ریاضی کافی برای فرمولبندی هندسی کوانتس برزین فراهم گردید. حال می‌توان با استفاده از ویژگیهای فضای برافکنشی  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  و  $\mathcal{M}$  کوانتس برزین برای فضای فاز کلاسیک کیلری را به صورت زیر فرمولبندی کرد:

حالت‌ها. از طریق نگاشت نشانندگی  $i\hbar$  به هر نقطه  $M$  یک حالت همدوس، که به صورت یک نقطه در  $\mathcal{M}$  نمایش داده می‌شود، منسوب می‌گردد. که این یک نگاشت یک به یک و دیفرانسیل پذیر است.

سمبلهای هموردا. سمبلهای هموردا عبارتند از توابع کیلری روی  $\mathcal{M}$  که در واقع مقدار چشم داشتنی میدانهای برداری هامیلتونی هستند که ساختار هندسی فضای فاز کوانتومی را حفظ می‌کنند [تعریف (۵.۳)].

جبر  $*_{\hbar}$ . می‌توان به سادگی نشان داد که جبر  $*_{\hbar}$  بین سمبلهای هموردا همان جبر پوآسون بین توابع کیلری روی  $\mathcal{M}$  است. با استفاده از گزاره (۲.۳) داریم

$$\frac{1}{i\hbar} [\widetilde{Q_1}, \widetilde{Q_2}] = \{ \widetilde{Q_1}, \widetilde{Q_2} \}_{i, \Omega_{FS}} \quad (48.4)$$

از طرف دیگر از رابطه (۱۷.۲) بدست می‌آید

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\hbar} [\widetilde{Q_1}, \widetilde{Q_2}] &= \frac{1}{i\hbar} (\widetilde{Q_1} *_{\hbar} \widetilde{Q_2} - \widetilde{Q_2} *_{\hbar} \widetilde{Q_1}) \\ &= \{ \widetilde{Q_1}, \widetilde{Q_2} \}_{i, \Omega_{FS}} \end{aligned} \quad (49.4)$$

لذا ثابت می‌شود

جبر  $*_{\hbar}$  و جبر پوآسون روی  $\mathcal{M}$  با هم مطابقت دارند.

دینامیک. می‌توان معادله حرکت  $\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [Q, H]$  را به صورت زیر نوشت

$$\frac{d\tilde{Q}(Z)}{dt} = \{ \tilde{Q}(Z), \tilde{H}(Z) \}_{i, \Omega_{FS}}, Z \in \mathcal{M} \quad (50.4)$$

که همان شکل معادله حرکت کلاسیک است. لازم است مجدداً یادآوری شود که این ساختار پوآسون روی فضای فاز کوانتومی تعریف شده است و ویژگیهای کوانتومی سیستم

- [12] A Odziejewicz,  
*Commun. Math. Phys.*, **150**(1992)385-413.
- [13] R Roknizadeh,  
*Geometrisierung der Quantenmechanik durch Berezin-Quantisierung*, Phd. Thesis, Papierflieger(1999).
- [14] R Roknizadeh, H D Doebner,  
*Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Okrain* (2002) Vol. 43, Part 2, 683-687.
- [15] رسول رکنی زاده، ماشین ریاضی تولید حالت‌های همدوس، آماده برای نشر.
- [8] S G Krantz,  
*Function Theory of Several Complex Variables*, Wadsworth & Brooks, pasific Grove, California (1992).
- [9] N P Landsman,  
*Mathematical Topics Between Classical and Quantum Mechanics*, Springer (1998).
- [10] W Lisiecki,  
*Ann. Ins. Henri Poincare* **53**(1990)245-258.
- [11] J E Marsden, T S Ratiu,  
*Introduction to Mechanics and Symmetry*, Springer (1994).