مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۵، شمارهٔ ۴، زمستان ۱۳۸۴

یادداشتی بر دوگانی AdS/CFT

الهام بیگلر[۱] و فرهنگ لران[۲]

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

اصفهان – کدپستی ۸۴۱۵۶، ایران

پست الکترونیکی: ۱. elh_biglar@ph.iut.ac.ir

۲. loran@cc.iut.ac.ir

(دریافت مقاله:۸۳/۹/۲۴ ؛ دریافت نسخه‌نهایی:۸۴/۳/۱۷)

چکیده

در این مقاله دوگانی نظریه‌های میدان در فضاهای R^{d+1} و AdS_{d+1} اقلیدسی را برای میدانهای آزاد نرده‌ای و برداری بررسی می‌کنیم. در مورد میدانهای نرده‌ای، نگاشت یک به یک بین میدانهای نرده‌ای بی جرم با جفت‌شدگی همدیس در دو فضا را مرور می‌کنیم. در مورد میدانهای برداری نشان می‌دهیم که چنین نگاشتی تنها در چهار بعد برقرار خواهد بود. با استفاده از این نگاشتها و همدیسی فضای AdS_{d+1} اقلیدسی و نیم‌فضای R^{d+1} یک تعبیر از تطابق AdS/CFT بر حسب رابطه‌ای بین جوابهای معادلهٔ حرکت و مقدارهای اولیهٔ آنها ارائه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: دوگانی AdS/CFT، نظریهٔ میدان در ابعاد بالاتر

۱. مقدمه

مطابق قانون دوم ترمودینامیک آنتروپی ماده و نیز سیاه‌چاله‌ها در طی فرایندهای فیزیکی کاهش نمی‌یابد. این قانون به اصل هولوگرافی منجر می‌شود که رابطه‌ای است بین اطلاعات و هندسه و یا آنتروپی و سطح افق رویداد. در سال ۱۹۷۴ استفن هاکینگ نشان داد که آنتروپی یک سیاه‌چاله از رابطهٔ $S = \frac{kc^3}{\hbar G}\frac{A}{4}$ پیروی می‌کند. که A سطح افق رویداد سیاه‌چاله، $\hbar$ ثابت پلانک، k ثابت بولتزمن، G ثابت گرانشی نیوتن، c سرعت نور و S آنتروپی است.

این رابطه بیان می‌کند که گرانش کوانتومی رفتار هولوگرافی دارد. بدین معنا که اطلاعات در مورد حالات کوانتومی در یک ناحیه از فضا– زمان را می‌توان با استفاده از اطلاعات روی مرز ناحیه به‌دست آورد. به عبارت دیگر یک نظریهٔ کوانتومی شامل گرانش در داخل حجم فضا، با یک نظریهٔ مرزی بدون گرانش معادل است[۱].یکی از شواهد درستی اصل هولوگرافی، دوگانی یافت شده بین فیزیک فضای AdS و فیزیک روی مرز آن است[۲،۳]. فضای AdS_{d+1} با متریک $ds^2 = \frac{1}{x_0^2}\left(\sum_{i=0}^{d}(dx_i)^2\right)$ دارای یک مرز کروی S^d در $x^0 = 0$ است، که هم‌ارز یک صفحهٔ اقلیدسی R^d به‌علاوه یک نقطه در بی‌نهایت می‌باشد. متریک القایی مرز AdS را تا حد یک ضریب می‌توان تعیین کرد، بنابراین نظریهٔ فیزیکی روی این مرز یک

نظریهٔ همدیس است[۴].بین این مرز و صفحهٔ $t=0$ فضای اقلیدسی با متریک $ds^2=\left(\sum_{i=0}^{d}(dx_i)^2\right)$ نگاشت یک‌به‌یک و همچنین بین دو فضای اقلیدسی و AdS یک رابطهٔ همدیس ($g_{\mu\nu}=\frac{1}{t^2}\eta_{\mu\nu}$) وجود دارد، پس انتظار می‌رود فیزیک در این دو فضا هم‌ارز باشد. با استفاده از تطابق AdS/CFT می‌دانیم که نظریهٔ دوگان روی مرز $x^0=0$، یک نظریهٔ همدیس با کنش غیر موضعی زیر است[۴]

$$I[\phi]=\int d^dy\,d^dz\,\frac{\phi_0(y)\phi_0(z)}{|y-z|^{2(d-\alpha_-)}}, \qquad (۱)$$

α_- کوچکترین ریشه معادلهٔ $\alpha(\alpha-d)=m^2$ و ϕ_0 تابعی روی مرز است که در حد $t\longrightarrow 0$، $\Phi(\vec{x},t)\sim t^{\alpha_-}\phi_0$ می‌باشد.

به‌دلیل یکریختی مرز فضای AdS و صفحهٔ $t=0$ فضای اقلیدسی، ما به‌دنبال تعبیری برای کنش مرزی (۱) و همچنین توابع ϕ_0 در فضای اقلیدسی هستیم. برای به‌دست آوردن کنش مرزی در فضای اقلیدسی ابزاری به‌جز حل معادلهٔ حرکت و محاسبه کنش بر حسب مقادیر اولیهٔ میدان وجود ندارد. با محاسبه این کنش نشان خواهیم داد که ϕ_0 فضای AdS چیزی جز مقدار اولیهٔ میدان فضای اقلیدسی داده شده در $t=0$ نیست.

در این مقاله در بخش دوم میدانهای نرده‌ای و دوگانی موجود بین آنها در فضای اقلیدسی و AdS بررسی می‌گردد.در قسمت سوم به مطالعهٔ میدانهای برداری خواهیم پرداخت. در بخش چهارم خلاصهٔ مطالب گفته شده را می‌آوریم.

۲. میدانهای نرده‌ای

معادلهٔ حرکت برای میدانهای آزاد جرم‌دار نرده‌ای در فضای AdS_{d+1} اقلیدسی با متریک،

$$ds^2=\frac{1}{t^2}\left(dt^2+\sum_{i=1}^{d}dx_i^2\right), \qquad (۲)$$

به صورت

$$(t^2\partial_t^2+(1-d)t\partial_t+t^2\nabla^2-m^2)\Phi=0, \qquad (۳)$$

است که

$$\nabla^2=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2},\qquad \partial_t=\frac{\partial}{\partial t}. \qquad (۴)$$

می‌دانیم که در فضای $d+1$ بعدی اقلیدسی با متریک ($ds^2=dt^2+\sum_{i=1}^{d}dx_i^2$)، یک میدان اسکالر بی‌جرم ϕ در معادلهٔ زیر صدق می‌کند.

$$(\partial_t^2+\nabla^2)\phi=0. \qquad (۵)$$

بنابراین $\Phi=t^{\alpha_-}\phi$ با جرم $m^2=\frac{1-d^2}{4}$ حلی از معادلهٔ (۳) خواهد بود.[۱] از آن جا که $\frac{-d^2}{4}<m^2<0$ است این حل در فضای AdS_{d+1} پایدار است. $\Phi(x,t)$ میدان فضای AdS و $\phi(x,t)$ میدان فضای اقلیدسی هستند. به تعبیری یک نظریهٔ میدان بی‌جرم نرده‌ای در فضای اقلیدسی دوگان نظریهٔ نرده‌ای جرم‌دار با جرم $m^2=\frac{d^2-1}{4}$ در فضای AdS است.

ما در این جا کنش مرزی (۱) را با جایگذاری جواب معادلات حرکت بر حسب شرایط اولیهٔ $\phi(x,0)$ در کنش میدان نرده‌ای در فضای R^{d+1}،

$$I[\phi]=\frac{1}{2}\int dt\,d^dx\left((\partial_t\phi)^2+(\nabla\phi)^2\right), \qquad (٦)$$

به‌دست می‌آوریم[۶،۵]. یک حل کلی برای معادلهٔ حرکت $({\partial_t}^2+\nabla^2)\phi=0$ که در حد $t\to\infty$ صفر شود، به صورت زیر است.

$$\phi(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^dk\,\tilde{\phi}(k)e^{ik\cdot x}e^{-\omega t}, \qquad (۷)$$

که $\omega=|k|$ و

$$\tilde{\phi}(k)=\frac{1}{V}\int d^dx\,\phi_0(x)e^{-ik\cdot x}\,. \qquad (۸)$$

همان طور که گفته شد $\phi_0(x)$ مقدار اولیهٔ میدان روی صفحه $t=0$ است. با قرار دادن معادلهٔ (۸) در معادلهٔ (۷) خواهیم

[۱] جملهٔ m^2 در معادله (۳) را می‌توان به‌عنوان ضریب جفت‌شدگی همدیس تعبیر کرد. این ضریب در مورد AdS_{d+1}، $\frac{d^2-1}{4}$ است.

داشت

$$\phi(x,t) = \int d^d y \mathcal{G}(x,t,y)\phi_\circ(y), \qquad (9)$$

که

$$\mathcal{G}(x,t,y) = \frac{1}{V(2\pi)^3}\int d^d k e^{-\omega t} e^{ik\cdot(x-y)}. \qquad (10)$$

$\mathcal{G}(x,t,y)$ حلی از معادلهٔ موج است، یعنی $\square\mathcal{G} = 0$ که دارای شرط اولیهٔ $\mathcal{G}(x,t,y)$ می‌باشد. برای به‌دست آوردن کنش روی سطح $t = 0$ باید معادلهٔ (۹) را در معادلهٔ (٦) قرار داد. اما بهتر است در ابتدا کنش (٦) را به شکل زیر بازنویسی کنیم تا شکل کلی آن در $d+1$ بُعد به‌دست آید. در ادامه برای حالت خاص $d = 3$ کنش مرزی را از راه قرار دادن حل معادلهٔ حرکت محاسبه می‌کنیم

$$I[\phi] = -\frac{1}{2}\int d^{d+1}x\phi\square\phi - \frac{1}{2}\int d^d x\phi_\circ(x)\partial_t\phi_\circ(x). \quad (11)$$

این رابطه با استفاده از انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء و با فرض اینکه در $t\to\infty$ و بی‌نهایت فضایی، $\phi(x)$ صفر می‌شود، به‌دست آمده است. حال با قرار دادن رابطه (۹) در (۱۱) جملهٔ اول به‌طور بدیهی صفر خواهد شد و برای جملهٔ دوم داریم

$$I[\phi] = \frac{1}{2}\int d^d y d^d z\phi_\circ(y)\phi_\circ(z)F(y-z), \qquad (12)$$

که

$$F(x) = \int d^d k\omega e^{ik\cdot x}. \qquad (13)$$

چون $F(x)$ تحت دوران ناورداست $(x\to Rx, R\in SO(d))$ بنابراین $F(x)$ فقط به اندازهٔ x وابسته است. با مقیاس کردن x با فاکتور $\lambda > 0$ می‌توان نشان داد که

$$F(\lambda x) = \lambda^{-(d+1)}F(x), \qquad (14)$$

و در نتیجه

$$x\cdot\nabla F(x) = \lim_{\lambda\to 1}\frac{F(\lambda|x|) - F(|x|)}{\lambda - 1} = -(d+1)F(|x|). \qquad (15)$$

بنابراین $F(x) = c.|x|^{-(d+1)}$.[2] با استفاده از نتایج فوق برای $F(x)$، کنش (۱۲) به شکل

$$I[\phi] = c.\int d^d y d^d z\frac{\phi_\circ(y)\phi_\circ(z)}{|y-z|^{d+1}}, \qquad (16)$$

درمی‌آید. با شرط $m^2 = \frac{1-d^2}{4}$، در رابطهٔ (۱)، $\alpha_- = \frac{1-d}{2}$ به‌دست می‌آید که با این شرط، دو کنش (۱) و (١٦) برابر خواهند بود.

در اینجا ضریب c در کنش (١٦) را برای حالت خاص $d = 3$ یعنی فضای چهار بعدی به‌دست می‌آوریم. اگر عبارت (۹) را در معادلهٔ (۵) قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\int(\omega^2 - k^2)\phi_\circ(y)e^{-\omega t}e^{ik\cdot(x-y)}d^3 y d^3 k. = 0. \qquad (17)$$

معادلهٔ بالا نتیجه زیر را در برخواهد داشت

$$(\omega^2 - k^2) = 0. \qquad (18)$$

با قرار دادن حل معادلهٔ حرکت، یعنی عبارت (۹) در کنش (٦) به معادلهٔ زیر خواهیم رسید

$$I[\phi] = \frac{1}{2V(2\pi)^3}\int\frac{\omega^2 + k^2}{2\omega}e^{ik\cdot(z-y)}\phi_\circ(y) \qquad (19)$$
$$\phi_\circ(z)d^3 k d^3 y d^3 z.$$

با استفاده از شرطی که بین ω و k در معادلهٔ (۱۸) به‌دست آمد، برای عبارت کنش داریم

$$I[\phi] = \int F(z-y)\phi_\circ(y)\phi_\circ(z)d^3 y d^3 z, \qquad (20)$$

که

$$F(z-y) = \frac{1}{2V(2\pi)^3}\int\omega e^{ik\cdot(z-y)}d^3 k$$

$$= \frac{1}{V(2\pi)^2}\int\frac{k^2}{|z-y|}\sin(k|z-y|)$$

$$= \frac{1}{V(2\pi)^2}|z-y|\left(\frac{2 - k^2|z-y|^2}{|z-y|^3}\cos k|z-y|\right.$$

[2] باید توجه داشت که تابع دلتای دیراک هم شرط (۱۴) را برآورده می‌سازد منتها ما برای نوشتن کنش انتظار داریم که $F(x)$ یک تابع مشتق‌پذیر باشد.

$$+\frac{2k\sin k|z-y|}{|z-y|^2}\Bigg)_{k=0}^{k=\infty}$$

$$=\frac{-2}{V(2\pi)^2|z-y|^4}. \qquad (۲۱)$$

برای به‌دست آوردن عبارت آخر از قضیهٔ ریمان استفاده شده است. با قرار دادن معادلهٔ بالا در عبارت کنش خواهیم داشت

$$I[\phi]=\frac{-2}{V(2\pi)^2}\int\frac{\phi_0(y)\phi_0(z)}{|z-y|^4}d^3yd^3z. \qquad (۲۲)$$

که در توافق با رابطهٔ (۱۶) است.

البته باید توجه داشت که این محاسبات برای میدانهای بی‌جرم انجام شده است. زیرا به سادگی می‌توان نشان داد که در نظر گرفتن $\Phi=t^{\frac{d-1}{2}}\phi$ برای میدانهای نرده‌ای جرم‌دار در R^{d+1} امکان پذیر نیست. یک دلیل برای این مطلب این است که معادلهٔ حرکت میدانهای نرده‌ای جرم‌دار یعنی $(\square+m^2)\phi=0$ هموردای همدیس نیست، مگر اینکه $m=0$ باشد. در واقع اگر یک طول مشخصه در مسئله وجود داشته باشد، نظریه تحت بازمقیاس بندی هموردا نیست.

همان‌طور که دیدیم در تطابق AdS/CFT میدانهای $\Phi(x,t)$ به میدانهایی میل می‌کنند که در حد $t\to 0$، $\Phi(x,t)\sim t^{\frac{(d-1)}{2}}\phi_{0\,\mathrm{AdS}}$ خواهد بود. همچنین $\Phi_{\mathrm{AdS}}=t^{\frac{(d-1)}{2}}\phi_E$ نیز حلی از معادلهٔ حرکت برای میدانهای نرده‌ای در فضای اقلیدسی بود که ϕ_E دارای مقدار اولیهٔ ϕ_0 روی مرز $t=0$ است. با مقایسه این دو رابطه می‌توان نتیجه گرفت که $\phi_{0\,\mathrm{AdS}}$ همان ϕ_0های اقلیدسی، یعنی مقدار اولیهٔ میدانها در صفحه $t=0$ هستند. با مطالعه این رهیافت به یک تعبیر برای رابطهٔ AdS/CFT رسیدیم، به‌صورتی که می‌توان آن‌را ارتباطی بین حل معادلهٔ حرکت و شرایط اولیه دانست. این روش برای اسپینورها نیز بررسی شده است[۸]. ما در ادامه به بررسی میدانهای برداری خواهیم پرداخت. همان‌طور که خواهیم دید، برخلاف میدانهای نرده‌ای که در تمام ابعاد، دوگانی دیده شد، این دوگانی محدود به بعد خاصی می‌شود.

۳. میدانهای برداری

ابتدا معادلهٔ پروکا که معادلهٔ حرکت میدانهای برداری است را در فضای AdS_{d+1} می‌نویسیم. رابطهٔ متریک این دو فضا به‌صورت زیر می‌باشد که یک رابطهٔ همدیس است.

$$g_{\mu\nu}=\frac{1}{t^2}\eta_{\mu\nu}, \qquad (۲۳)$$

که $g_{\mu\nu}$ متریک فضای AdS و $\eta_{\mu\nu}$ متریک فضای اقلیدسی است. ما در این بخش اندیسهای فضا—زمانی (چهار برداری) را با حروف یونانی مثل μ، ν و اندیسهای فضایی را با حروف لاتین مثل i،j نشان می‌دهیم. لاگرانژی مولد معادلهٔ حرکت پروکا به‌صورت زیر تعریف می‌گردد،

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}-\frac{1}{2}m^2A^2. \qquad (۲۴)$$

با استفاده از کنش ناوردای $I=\int\mathcal{L}\sqrt{g}d^4x$، پذیرفتن اصل کمترین کنش و معادلات اویلر به معادلهٔ حرکت زیر می‌رسیم

$$\partial_\mu(F^{\mu\nu}\sqrt{g})-m^2A^\nu\sqrt{g}=0. \qquad (۲۵)$$

با اثر دادن ∂_ν روی معادلهٔ بالا خواهیم داشت

$$\partial_\nu\partial_\mu(F^{\mu\nu}\sqrt{g})=m^2\partial A^\nu\sqrt{g}. \qquad (۲۶)$$

که با استفاده از معادلهٔ بالا می‌توان شرط لورنتس در حالت کلی (فضای خمیده) را به‌دست آورد

$$\partial_\nu(A^\nu\sqrt{g})=0. \qquad (۲۷)$$

می‌توان نشان داد که این رابطه همان $D_\nu A^\nu=0$ است که D_ν نماد مشتق هموردا است[۷].

$\sqrt{g}$ در فضای $\mathrm{AdS}_{(d+1)}$ به‌صورت

$$\sqrt{g}=t^{-(d+1)}, \qquad (۲۸)$$

تعریف می‌شود. با جایگذاری رابطهٔ (۲۸) و با استفاده از تعریف $g_{\mu\nu}$، معادلهٔ (۲۵) به صورت

$$\partial_\mu(t^{-d-1}t^4F_{\mu\nu})-m^2t^{-d-1}t^2A_\nu=0\,, \qquad (۲۹)$$

یا به‌شکل واضح‌تر

$$(-d+3)tF_{0\nu}+t^{2}\partial_{\mu}F_{\mu\nu}-m^{2}A_{\nu}=0. \qquad (۳۰)$$

در می‌آید. در این رابطه دیگر اندیسهای μ,ν با متریک تخت $\eta_{\mu\nu}$ بالا و پایین می‌شوند. مثل حالت نرده‌ای ، حلی مانند $A_{\nu}=t^{\alpha}B_{\nu}$ برای معادلهٔ (۳۰) در نظر می‌گیریم. که البته α را می‌توان با حساب کردن «بُعد مقیاسی» میدان در کنش ناوردا به‌دست آورد. در این‌صورت خواهیم داشت

$$\begin{aligned}&t^{\alpha+2}[\partial_{0}^{2}B_{\nu}+\nabla^{2}B_{\nu}-\delta_{\nu0}\partial_{0}^{2}B_{0}-\delta_{\nu0}\partial_{0}\partial_{i}B_{i}-\partial_{\nu}\partial_{0}B_{0}(1-\delta_{\nu0})\\&-\partial_{\nu}\partial_{i}B_{i}(1-\delta_{\nu0})]+t^{\alpha+1}[(-d+3)\partial_{0}B_{\nu}-(-d+3)\delta_{\nu0}\partial_{0}B_{0}\\&-(-d+3)\partial_{\nu}B_{0}(1-\delta_{\nu0})+2\alpha\partial_{0}B_{\nu}-\delta_{\nu0}\alpha\partial_{0}B_{0}-\delta_{\nu0}\alpha\partial_{0}B_{0}\\&\delta_{\nu0}\alpha\partial_{i}B_{i}-\alpha(1-\delta_{\nu0})\partial_{\nu}B_{0}]+t^{\alpha}[(-d+3)\alpha+B_{\nu}-(-d+3)\delta_{\nu0}\\&\alpha B_{0}+\alpha(\alpha-1)B_{\nu}-\delta_{\nu0}\alpha(\alpha-1)B_{0}-m^{2}B_{\nu}]=0. \qquad (۳۱)\end{aligned}$$

یک جواب این معادله آن است که توانهای مختلف t را به صورتی که در زیر می‌آید متحد با صفر قرار دهیم و معادلات به دست آمده را برای حالات $\nu=0$ و $\nu\neq0$ حل کنیم:

$$\begin{aligned}t^{\alpha+2}\quad&[\partial_{0}^{2}B_{\nu}+\nabla^{2}B_{\nu}-\delta_{\nu0}\partial_{0}^{2}B_{0}-\delta_{\nu0}\partial_{0}\partial_{i}B_{i}\\&-\partial_{\nu}\partial_{0}B_{0}(1-\delta_{\nu0})-\partial_{\nu}\partial_{i}B_{i}(1-\delta_{\nu0})]=0, \qquad (۳۲)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t^{\alpha+1}\quad&[(-d+3)\partial_{0}B_{\nu}-(-d+3)\delta_{\nu0}\partial_{0}B_{0}\\&-(-d+3)\partial_{\nu}B_{0}(1-\delta_{\nu0})+2\alpha\partial_{0}B_{\nu}-\delta_{\nu0}\alpha\partial_{0}B_{0}\\&-\delta_{\nu0}\alpha\partial_{0}B_{0}+\delta_{\nu0}\alpha\partial_{i}B_{i}-\alpha(1-\delta_{\nu0})\partial_{\nu}B_{0}]=0, \qquad (۳۳)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t^{\alpha}\quad&[(-d+3)\alpha B_{\nu}-(-d+3)\delta_{\nu0}\alpha B_{0}+\alpha(\alpha-1)B_{\nu}\\&-\delta_{\nu0}\alpha(\alpha-1)B_{0}-m^{2}B_{\nu}]=0. \qquad (۳۴)\end{aligned}$$

برای حالت $\nu\neq0$ معادلات (۳۸)،(۳۹) و (۴۰) را حل می‌کنیم. که به ترتیب نتایج زیر را در بر خواهند داشت

$$\Box B_{i}-\partial_{i}(\partial.B)=0, \qquad (۳۵)$$

$$(-d+3+2\alpha)\partial_{0}B_{i}-(-d+3+\alpha)\partial_{i}B_{0}=0. \qquad (۳۶)$$

$$\Big(\alpha(-d+3+\alpha-1)-m^{2}\Big)B_{i}=0. \qquad (۳۷)$$

اگر بخواهیم یک دوگانی بین دو فضا وجود داشته باشد باید تعداد درجات آزادی در دو نظریه یکسان باشد. در یک نظریهٔ بی‌جرم در فضای $d+1$ بعدی $d-2$ درجه آزادی و برای نظریهٔ جرم‌دار $d-1$ درجه آزادی وجود دارد. از معادلهٔ (۳۵) مشخص است که بردارهای اقلیدسی B_{ν} بی‌جرمند. یعنی نظریهٔ میدان فضای اقلیدسی پیمانه‌ای است. بنابراین باید نظریهٔ دوگان در فضای AdS هم بی‌جرم باشد تا تعداد درجات آزادی در دو نظریه یکی باشد. پس در(۳۷) جرم مساوی صفر است. از محاسبه بُعد مقیاسی میدانها $\alpha=\frac{d-3}{2}$ به‌دست می‌آید. با دو شرط $\alpha=\frac{d-3}{2}$ و $m=0$، دو مقدار برای d خواهیم داشت. $d=1$ و یا $d=3$. یعنی فقط در فضای دو بعدی و چهار بعدی می‌توان دوگانی بین فضای اقلیدسی و AdS یافت.

برای حالت $\nu=0$ از معادلات (۳۲)، (۳۳) و (۳۴) داریم

$$\partial_{i}\partial_{i}B_{0}-\partial_{0}\partial_{i}B_{i}=0, \qquad (۳۸)$$

$$\alpha\partial_{i}B_{i}=0, \qquad (۳۹)$$

$$m^{2}B_{0}=0\,. \qquad (۴۰)$$

از $\nu\neq0$ دو شرط $m=0$ و $\alpha=\frac{d-3}{2}$ را به‌دست آوردیم که باید با معادلات به‌دست آمده از حالت $\nu=0$ سازگار باشند.

معادلهٔ (۳۸) یک معادلهٔ حرکت برای B_{μ}ها است که جملهٔ جرمی در آن نیست که نشان می‌دهد $m=0$ است. معادلهٔ (۴۰) نیز با شرط $m=0$ سازگار است. معادلهٔ (۳۹) با شرط $d=3$ سازگار است، اما نشان می‌دهد که برای اینکه در فضای ۲ بعدی یعنی $d=1$ دوگانی بین فضای اقلیدسی و AdS دوگانی داشته باشیم، باید در پیمانهٔ $\partial_{i}B_{i}=0$ باشیم. که این پیمانه در فضای دو بعدی نشان می‌دهد که میدان B به مکان وابسته نیست و فقط تابعی از زمان است که چنین نظریه‌ای خیلی با معنی

نیست. بنابراین در واقع فقط در $d = ۳$ و فقط برای حالت نظریه میدان بی‌جرم می‌توان دوگانی بین فضای اقلیدسی و فضای AdS داشت.

اکنون کنش مرزی در فضای اقلیدسی را برای حالت ۱+۳ بعدی به‌دست می‌آوریم. میدانهای آزاد برداری بی‌جرم در فضای اقلیدسی ۱ + ۳ بعدی در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = ۰. \qquad (۴۱)$$

که‌در آن $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. معادلهٔ (۴۱) با استفاده از شکل گسترده $F^{\mu\nu}$ به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\Box A^\nu - \partial^\nu(\partial \cdot A) = ۰. \qquad (۴۲)$$

برای حل این معادله پیمانهٔ لورنتس یعنی $\partial \cdot A = ۰$ را فرض می‌کنیم و سپس کنش را محاسبه می‌کنیم. با پیمانهٔ لورنتس معادلهٔ (۴۲) به

$$\Box A^\nu = ۰, \qquad (۴۳)$$

کاهش خواهد یافت. مانند حالت نرده‌ای یک حل برای این معادله در نظر می‌گیریم که در $t \to \infty$ صفر شود.

$$A_\mu(x,t) = \frac{۱}{(۲\pi)^۳}\int d^۳k\widetilde{A}_\mu(k)e^{ik.x}e^{-\omega t}, \qquad (۴۴)$$

$$\widetilde{A}_\mu(k) = \frac{۱}{V}\int d^۳x A_\mu(x,۰)e^{-ik.x}. \qquad (۴۵)$$

که $A_\mu(x,t)$ مقدار میدان میدان روی سطح $t = ۰$ و$\omega = |k|$ است. با قرار دادن (۴۵) در(۴۴)خواهیم داشت

$$A_\mu(x,t) = \int d^۳y \mathcal{G}(x,t,y)A_\mu(x,۰), \qquad (۴۶)$$

$$\mathcal{G}(x,t,y) = \frac{۱}{V(۲\pi)^۳}\int d^۳ke^{-\omega t}e^{ik\cdot(x-y)}. \qquad (۴۷)$$

که $\mathcal{G}(x,t,y)$ حلی از معادلهٔ موج با شرط اولیه $\mathcal{G}(x,۰,y) = \delta^d(x-y)$ است.

کنش برای میدانهای برداری آزاد بی‌جرم، به‌صورت زیر است.

$$\begin{aligned} I[A_\mu] &= \int d^۴x\left(-\frac{۱}{۴}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) \\ &= \frac{-۱}{۲}\int dtd^۳x\left(\dot{A}^۲ + (\nabla.A)^۲\right). \qquad (۴۸) \end{aligned}$$

با قرار دادن (۴٦) و (۴۷) در (۴۸) رابطه‌ای بین k,ω به‌دست می‌آید

$$\omega^۲ = k^۲. \qquad (۴۹)$$

با استفاده از معادلهٔ (۴۹) و (۴٦) کنش روی مرز را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{aligned} I[A_\mu] &= \int_۰^\infty \mathcal{L}dtd^۳x \\ &= \int F(z-y)A_\mu(y,۰)A_\mu(z,۰)d^۳yd^۳z, \qquad (۵۰) \end{aligned}$$

که

$$F(z-y) = -\frac{-۱}{۲V(۲\pi)^۳}\int \omega e^{ik.(z-y)}d^۳k. \qquad (۵۱)$$

با انتگرال‌گیری روی زوایای ϕ و θ ، عبارت $F(z-y)$ به‌صورت زیر در می‌آید

$$F(z-y) = \frac{-۱}{V(۲\pi)^۲|z-y|}\int k^۲\sin(k|z-y|)dk. \qquad (۵۲)$$

و با انتگرال‌گیری روی k به عبارت زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned} F(z-y) &= \frac{-۱}{V(۲\pi)^۲|z-y|} \\ &\times\left(\frac{۲-k^۲|z-y|^۲}{|z-y|^۳}\cos k|z-y| + \frac{۲k\sin k|z-y|}{|z-y|^۲}\right)_{k=۰}^{k=\infty} \\ &= \frac{۲}{V(۲\pi)^۲|z-y|^۴}. \qquad (۵۳) \end{aligned}$$

برای ساده‌تر کردن عبارت کنش می‌توان از پیمانهٔ لورنتس که انتخاب شد، استفاده کرد. برای این پیمانه داریم

$$\partial_\mu A^\mu = ۰. \qquad (۵۴)$$

و با قرار دادن مقدارA_μ

$$\int d^۳y f_۰(y,z)A_۰(y,۰) + \int d^۳y\, f_i(y,z)A_i(y,۰) = ۰, \qquad (۵۵)$$

که

$$f_0(y,z)=\frac{1}{V(2\pi)^3}\int -\omega e^{k.(z-y)}d^3k, \qquad (56)$$

و

$$f_i(y,z)=\frac{1}{V(2\pi)^3}\int ik_ie^{k.(z-y)}d^3k. \qquad (57)$$

اگر در عبارت های $f_i(y,z)$ و $f_0(y,z)$ انتگرال‌گیری روی زوایا را انجام دهیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} f_0(y,z) &= \frac{-2}{V(2\pi)^2}\int \frac{k^2}{|z-y|}\sin(k|z-y|)dk \\ &= 2F(z-y). \end{aligned} \qquad (58)$$

و

$$f_i(y,z)=\frac{-1}{V}\frac{d}{dy_i}\delta(z-y)\ ,$$

$$\int f_iA_i(y,0)d^3y=\partial_iA_i(z,0). \qquad (59)$$

با اعمال پیمانهٔ لورنتس و قرار دادن مقادیر $f_0(y,z)$ و $f_i(y,z)$ مقدار کنش به‌صورت زیر خواهد شد.

$$I[A_\mu]=\int d^3zd^3y\left(\frac{-1}{4V}\nabla^2\mathcal{O}(x-z)+F(z-y)\right)$$

$$\times A_\mu(y,0)A_\mu(z,0), \qquad (60)$$

که

$$\int \mathcal{O}(x-z)F(z-y)d^3z=\delta(x-y), \qquad (61)$$

و

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(x-z) &= \int \frac{2}{(2\pi)^3\omega}e^{ik.(x-z)}d^3k \\ &= \int \frac{4}{(2\pi)^2|x-z|}\sin(k|x-z|)dk \\ &= \frac{4}{(2\pi)^2}\frac{1}{|x-z|^2}. \end{aligned} \qquad (62)$$

با استفاده از معادلات (۵۳) و (۶۲) برای کنش (۶۰) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} I[A_\mu] &= \int A_\mu(z,0)\Big(\frac{-1}{4V}\frac{-8}{(2\pi)^2|x-z|^4} \\ &+\frac{2}{V(2\pi)^2|z-y|^4}\Big)A_\mu(y,0)d^3zd^3y \\ &= \frac{4}{(2\pi)^2}\int\frac{A_\mu(z,0)A_\mu(y,0)}{|z-y|^4}d^3zd^3y. \end{aligned} \qquad (63)$$

انتظار می‌رود کنش (۶۳) را بتوان با رهیافتی مستقیم مثل کنش (۱) برای میدانهای برداری در دوگانی AdS/CFT به‌دست آورد.

یک فرض طبیعی در تطابق AdS_{d+1} با نظریهٔ میدان همدیس روی مرز، جفت شدن میدانهای A_0 با میدانهای همدیس $\mathcal{X}$ می‌باشد. که رابطهٔ جفت‌شدگی به‌صورت $\int_{S^d}A_0\cdot\mathcal{X}$ است. در واقع میدانهای A جریانهایی برای میدانهای $\mathcal{X}$ هستند. ما علاقه‌مند به محاسبه تابع دونقطه‌ای $\mathcal{X}$ها هستیم و می‌خواهیم خصوصیات نظریهٔ میدان همدیس $\mathcal{X}$ها را روی مرز ببینیم. پیمانهٔ $\nabla.A=0$ را برای میدانهای A انتخاب می کنیم. یعنی فرض می‌کنیم نظریهٔ میدان A در داخل فضا، پیمانه‌ای باشد. بنابراین A_i می‌تواند به $A_i+\delta A_i$ که $\delta A_i=\nabla.\epsilon$ و $\nabla^2\epsilon=0$ برود. برای اینکه کنش تحت تبدیلات پیمانه‌ای ناوردا بماند، باید $\nabla\cdot\mathcal{X}=0$ باشد. بنابراین همان قیدی که روی میدانهای A_μ بود، روی $\mathcal{X}$ها هم وجود دارد. یعنی نظریه روی مرز نیز یک نظریهٔ پیمانه‌ای است.

۴. خلاصه

این انتظار وجود دارد که بین نظریه‌های فیزیکی همدیس روی تمامی فضاهایی که با یکدیگر رابطهٔ همدیس دارند، بدون هیچ محدودیتی دوگانی وجود دارد. اما ما در این مقاله نشان دادیم که وجود اسپین می‌تواند محدودیت ایجاد کند. دو فضای AdS_{d+1} و نیم فضای R^{d+1} $(t>0)$ با یک رابطهٔ همدیس در ارتباطند. برای میدانهای نرده‌ای نشان دادیم که یک نظریهٔ میدان بی‌جرم نرده‌ای در فضای اقلیدسی، دوگان یک نظریهٔ میدان نرده‌ای با جرم $\frac{d^2-1}{4}$ در فضای AdS_{d+1} است. این دوگانی در تمامی ابعاد فضا وجود دارد. بررسی اسپینورها نیز نشان داده است که بین یک نظریهٔ میدان بی‌جرم در فضای اقلیدسی و نظریهٔ میدان با هر جرم در فضای AdS دوگانی وجود دارد[۸]. درمورد بردارها به تفصیل نشان دادیم که دوگانی بین نظریه‌های همدیس روی فضای AdS و CFT محدود به فضای چهار بُعدی می‌شود.

با توجه به نگاشت یک‌به‌یکی که بین مرز فضای AdS و صفحهٔ $t = ۰$ فضای اقلیدسی وجود داشت، حدس زدیم که باید بتوان تعبیری از تطابق AdS/CFT برای میدانهای نرده‌ای در فضای اقلیدسی یافت. مقایسهٔ کنش مرزی AdS (۱) با کنش اقلیدسی محاسبه شده بر حسب مقادیر اولیهٔ میدان (۱۶)، حدس ما را تأیید می‌کنند. در واقع این مطلب روشن شد که تطابق AdS/CFT برای میدانهای نرده‌ای می‌تواند معنایی جز حل معادلات حرکت و محاسبهٔ کنش بر حسب مقادیر اولیهٔ میدان نداشته باشد. در بررسی دوگانی نظریهٔ میدانهای برداری در فضای AdS و فضای اقلیدسی ابتدا شکل معادلهٔ پروکا را در فضای AdS نوشتیم و حلی برای این معادله، A_μ، پیشنهاد دادیم. میدانهای A_μ در فضای AdS با میدانهای اقلیدسی B_μ، با رابطهٔ $A_\mu = t^\alpha B_\mu$ در ارتباطند. با در نظر گرفتن بُعدمقیاسی میدان در لاگرانژی ناوردا، $\alpha = \frac{d-۳}{۲}$ به‌دست می‌آید. با قرار دادن $A_\mu = t^\alpha B_\mu$ در معادلهٔ پروکا، معادلاتی برای میدان B_μ به‌دست می‌آید که تعدادی از آنها بی‌جرم بودن میدانهای اقلیدسی B_μ را نشان می‌دهند. با شمارش تعداد درجات آزادی فیزیکی در دو فضا و با توجه به اینکه در فضای اقلیدسی میدانها بی‌جرم به‌دست آمدند، باید میدانهای A_μ نیز بی‌جرم باشند. از معادلاتی که برای B_μ به‌دست آوردیم و دو شرط $m = ۰$ و $\alpha = \frac{d-۳}{۲}$ نتیجه می‌شود که دوگانی فقط در $d = ۳$ یعنی فضای چهار بُعدی وجود دارد. با استفاده از تعبیری که از AdS/CFT برای میدانهای نرده‌ای به‌دست آوردیم، کنش میدانهای برداری در صفحهٔ $t = ۰$ فضای اقلیدسی را به‌دست آوردیم.

مراجع

1. S Hawiking, *The univers in a nutshell*, Bantam books, Nov. (2001).
2. L Susskind, E Witten, *The holographic bound in anti-de sitter space*, hep-th/9805114.
3. D Bigatti, L Susskind, *TASI lectures on the holographic principle*, hep-th/0002044.
4. E Witten, *Anti de sitter space and holography*, hep-th/9802150.
5. F Loran, ϕ^4*-Model and holography in four dimensions*, hep-th/0409267, to appear in Phys Lett B.
6. F Loran, *Phys. Lett. B* 601, (2004) 192, hep-th/0404067.
7. P A Dirac, *Gereral theory of relativity*, John Wiley & Sons, (1975).
8. F Loran *Massive spinores and AdS/CFT correspondence* JHEP 0406, (2004) 054, hep-th/0404135.