مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۵، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۳۸۴

معادله بته سالپیتر در فضای ناجابه‌جایی

منصور حقیقت[۱] و آزاده احمدیان
دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان
۱. پست الکترونیکی: mansour@cc.iut.ac.ir

(دریافت مقاله: ۸۳/۵/۳ ؛ پذیرش: ۸۳/۱۱/۱۲)

چکیده
در این مقاله اثر فضای ناجابه‌جایی بر معادله بته سالپیتر برای حالت مقید دو ذره بررسی شده است. در این بررسی حالات مقید دو ذره‌ای با ذرات اسپین ۰- اسپین ۰، اسپین $\frac{1}{2}$ - اسپین $\frac{1}{2}$ و اسپین $\frac{1}{2}$ - اسپین ۰ در نظر گرفته شده است. در طیف انرژی، پایینترین تصحیح مستقل از اسپین در همهٔ موارد از مرتبهٔ $\theta\alpha^4$ شروع می‌شود. در همین حال تصحیح وابسته به اسپین در فضای ناجابه‌جایی از مرتبهٔ $\theta\alpha^6$ می‌باشد.

واژهای کلیدی: فضای ناجابه‌جایی، معادله بته – سالپیتر، حالت مقید

۱. مقدمه

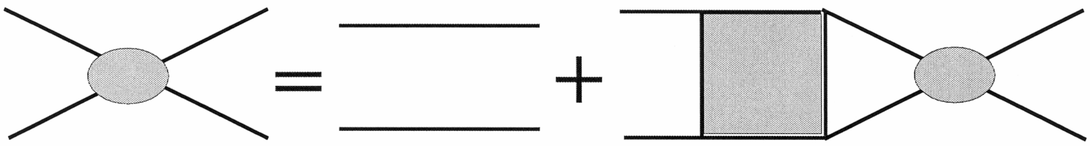
جنبه‌های پدیده‌شناسی فضاهای ناجابه‌جایی اخیراً بسیار مورد توجه قرار گرفته است [۱-۱۱]. در واقع سؤال اصلی چگونگی اندازه‌گیری و آشکار کردن اثر ناجابه‌جایی بر پدیده‌های فیزیکی است. به نظر می‌رسد الکترودینامیک کوانتومی در فضای ناجابه‌جایی (NCQED) راه مستقیم برای محاسبهٔ چنین اثراتی است. اختلاف اساسی NCQED با QED در حضور برهمکنشهای جدید (رأسهای سه و چهار فوتونی) است که خود باعث پیچیدگی محاسبات می‌گردد. برای بررسی این‌گونه اثرات حالات مقید دو ذره‌ای مانند اتم هیدروژن، پوزیترونیوم و ... را می‌توان به عنوان یکی از نمونه‌های مورد توجه نام برد. برای این منظور علاوه بر داده‌های بسیار دقیق آزمایشگاهی، محاسبات نظری نیز باید با دقت کافی انجام گردد. با وجود اینکه قواعد فایمن برای NCQED کاملاً معلوم است [۱-۳] ولی در مورد حالات مقید باید این قواعد را در روشهای خاص، مثل معادله بته سالپیتر و یا الکترودینامیک کوانتومی غیر نسبیتی (NRQED) به کار برد [۱۲].

۲. معادله بته سالپیتر

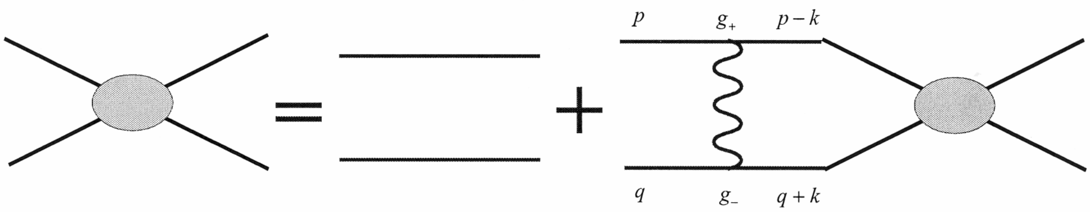
برای توصیف یک دستگاه شامل حالت مقید دو ذره‌ای به صورت هموردا باید ازمعادله بته سالپیتر استفاده کرد. این معادله برای حالت مقید دو ذره‌ای (شکل ۱) به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\Psi(p,q) = S(p)S(q)\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 i} I(k;p,q) \Psi(p+k,q-k), \qquad (1)$$

که در آن $\psi(p,q)$ دامنه برای حالت مقید، $S(p)$ و $S(q)$ انتشارگر میدان ذره و $I(k,p,q)$ هسته برهمکنش است که خود از مجموع همه نمودارهای کاهش‌ناپذیر تشکیل شده است. باید توجه داشت در مورد یک ذره با اسپین $\frac{1}{2}$، S، انتشارگر فرمیونی و برای ذرات بدون اسپین انتشارگر بوزونی است. در QED



شکل ۱. معادله بته سالپیتر.



شکل ۲. معادله بته سالپیتر در تقریب نردبانی.

تقریب نردبانی (شکل ۲) به نظر تقریب معقولی است، بنابراین در پایینترین مرتبه، هسته برهمکنش را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$I\Psi=(I_{obe}+I_a)\Psi, \qquad (۲)$$

که در آن obe به معنی تبادل یک بوزن و a نابودی یک بوزن می‌باشد. البته I_a فقط در مورد حالت مقید یک ذره و پاد همان ذره وجود خواهد داشت. در ادامه در پیمانه فایمن ضمن جداسازی برهمکنشهای لحظه‌ای و تأخیری، برهمکنش تأخیری را به کمک اختلال محاسبه می‌کنیم. برای این منظور به عنوان مثال I_{obe} را برای دو ذره با اسپین $\frac{1}{2}$ می‌توان به صورت زیر نوشت [۱۳]

$$I_{obe}=-\frac{4\pi\alpha\gamma_1^0\gamma_2^0}{\mathbf{k}^2}+4\pi\alpha\left(\frac{\gamma_1^0\gamma_2^0k_0^2}{k^2\mathbf{k}^2}-\frac{\gamma_1\cdot\gamma_2}{k^2}\right), \qquad (۳)$$

که در آن k چار تکانه و $\mathbf{k}$ تکانهٔ بوزن مبادله شده است.

به طور کلی I را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$I=V_c+\delta V, \qquad (۴)$$

که در آن V_c هسته برهمکنش ناشی از پتانسیل کولنی و δV ناشی از مجموع پتانسیلهای اختلالی است.بنابراین معادلهٔ (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Psi(p,q)=S(p)S(q)\left(\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4i}V_c\Psi(p+k,q-k)+\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4i}\delta V\Psi(p+k,q-k)\right). \qquad (۵)$$

با توجه به کوچک بودن جملهٔ دوم ابتدا باید جواب معادلهٔ

$$\Psi(p,q)=S(p)S(q)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4i}V_c\Psi(p+k,q-k), \qquad (۶)$$

را به دست آورد. برای این منظور به راحتی می‌توان دید که

$$\Psi(p)=D^{-1}_{\pm\pm}\frac{\Lambda_1^{\pm}\Lambda_2^{\pm}}{2i\pi}v\phi(\mathbf{p}), \qquad (۷)$$

که در آن داریم:

$$v\phi(\mathbf{p})=\frac{\alpha}{2\pi^2}\int\frac{d^3p'}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}\phi(\mathbf{p}'), \qquad (۸)$$

$$\phi(\mathbf{p})=\int dp^0\,\Psi(p^0,\mathbf{p}), \qquad (۹)$$

و

$$D^{-1}_{\pm\pm}=\frac{1}{\left[\frac{E}{2}+p_0\mp(\omega-i\epsilon)\right]\left[\frac{E}{2}-p_0\mp(\omega-i\epsilon)\right]}. \qquad (۱۰)$$

با انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۷) بر روی p^0 می‌توان تابع موج ϕ (p) را به‌صورت زیر به‌دست آورد

$$\phi(\mathbf{p})=\int dp^0\,D^{-1}_{\pm\pm}\frac{\Lambda_1^{\pm}\Lambda_2^{\pm}}{2i\pi}v\phi(\mathbf{p}). \qquad (۱۱)$$

اکنون با توجه به تعیین تابع موج کولنی می‌توان اثر اختلال δV بر روی انرژی به‌صورت جابجایی در انرژی را به‌صورت زیر محاسبه کرد[۱۳]

$$\Delta E=-\frac{1}{(2\pi)^6}\int d^4p\,\tilde{\Psi}(p)(\delta V\Psi)(p), \qquad (۱۲)$$

که در آن داریم:

$$(\delta V\Psi)(p)=\int d^4p'\,\delta V(p,p')\Psi(p'). \qquad (۱۳)$$

اگر اختلال به p. و p' بستگی نداشته باشد یا $\delta V(p,p')=\delta V(\mathbf{p},\mathbf{p}')$، در آن صورت جابجایی انرژی به صورت زیر ساده می‌شود

$$\Delta E=-\frac{1}{(2\pi)^6}\int d^3p\,\tilde{\phi}(\mathbf{p})(\delta V\phi)(\mathbf{p}'). \qquad (۱۴)$$

۳. معادله بته سالپیتر در فضای ناجابه‌جایی

معادله (۱) یک معادلـه کـاملاً کلـی اسـت و شـکل آن بـه نـوع برهمکنش بستگی ندارد. بنابراین برای نوشتن معادله بته سالپیتر در NCQED کافی است، با توجه به قواعد فایمن داده شـده در NCQED، تنها هسته برهمکنش درست نوشـته شـود. اخـتلاف QED و NCQED علاوه بر حضور برهمکنشهای جدید (سـه و چهار فوتونی) در وجود عاملهای فاز وابسته بـه تکانـه‌ای اسـت کـه در هـر رأس QED ضـرب مـی‌گـردد. بـرای نمونـه هـسته برهمکنش در مورد دو ذره با بارمخالف در سطح نمودار درختی و در دستگاه مرکز جرم به صورت زیر می‌باشد:

$$I^l_\theta(k;p,-p)=e^{\frac{i}{2}\mathbf{p}.(\theta_++\theta_-).\mathbf{k}}I^l(k), \qquad (۱۵)$$

که در آن l نشان دهنده تقریب نردبانی است، $I^l(k)$ هستهٔ برهمکنش در فضای جابه‌جایی است که به عنوان مثـال عبـارت ریاضی آن بـرای دو ذره بـا اسـپین $\frac{1}{2}$ در رابطـهٔ (۳) داده شـده است و پارامتر ناجابه‌جایی θ یک تانسور پاد متقارن است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\theta^{\mu\nu}=-i\,[x^\mu,x^\nu]\,. \qquad (۱۶)$$

در ادامـه $\theta^{\cdot i}$را صـفر فـرض خـواهیم کـرد زیـرا $\theta^{\cdot i}\neq 0$ مشکلاتی دربارهٔ یکانی بودن نظریه‌های میدانی و مفهـوم علیـت به وجود مـی‌آورد[۱۴و۱۵]. انتخـاب $\theta_\pm$ در معادلـهٔ (۱۵) ایـن امکان را می‌دهد که بتوان پارامترهای ناجابه‌جایی متفاوت بـرای ذرت با بار مخالف در نظر گرفت.

به طور کلـی هـسته بـرهمکنش در فـضای ناجابـه‌جـایی را می‌توان با مقایسه با رابطهٔ (۲) به صورت زیر نوشت:

$$I^{NC}\Psi=(I^{NC}_{obe}+I^{NC}_a)\Psi, \qquad (۱۷)$$

که در آن

$$I^{NC}_a=I_a, \qquad (۱۸)$$

و

$$I^{NC}_{obe}=I_{obe}+I'(\theta), \qquad (۱۹)$$

باید توجه داشت که جمله I_a فقط وقتی که ذره و پادذرهٔ همان ذره حالت مقید تـشکیل دهنـد وجـود دارد در ایـن حالـت بـه راحتی می‌توان نشان داد که عامـل فـازی کـه در هـر راس ایـن نمودار ضرب می‌شود برابر با یک اسـت. همچنـین $I'(\theta)$ داده شده در معادلهٔ (۱۹) نشان دهندهٔ برهمکنشهای ناشـی از فـضای ناجابه‌جایی است.

۳. ۱. معادله بته سالپیتر در فضای ناجابه‌جایی بـرای دو ذره بـا اسپین صفر

در این حالت دو ذرهٔ با اسپین صفر و بار مخالف تشکیل حالت مقید می‌دهند. بنابراین S در معادله (۱) انتشارگر بوزونی است و δV را می‌توان به کمک $I'(\theta)$در دستگاه مرکز جرم به صورت زیر به دست آورد

$$I'(\theta)=\frac{4\pi\alpha}{\mathbf{k}^2}(1-e^{2ip\wedge p'})-\frac{4\pi\alpha k_0^2}{k^2\mathbf{k}^2}(1-e^{2ip\wedge p'}), \qquad (۲۰)$$

که در آن $p'=p-k$، باید توجه داشت که پایینترین تغییـر در انرژی توسط پتانسیل داده شـده در معادلـه (۲۰) مربـوط بـه جملهٔ اول و از مرتبهٔ $\theta\alpha^4$ می‌باشد. در واقع هر عامل تکانـه در پتانسیل منجر به اضافه شدن یک α به انرژی می‌گـردد. اکنـون می‌توان تغییر در انرژی را با استفاده از رابطهٔ (۱۲) در پـایینترین مرتبه به صورت زیر محاسبه کرد

$$\Delta E=-\frac{1}{(2\pi)^6}\int d^3p\int d^3p'\phi^*(\mathbf{p}) \qquad (۲۱)$$
$$(\frac{4\pi\alpha}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}(1-e^{2ip\wedge p'}))\phi(\mathbf{p}').$$

با استفاده از تبدیل فوریهٔ توابع موج می‌توان عبـارت بـالا را با کمی عملیات جبری به صورت زیر تبدیل کرد

$$\Delta E=-4\pi\alpha\int d^3r\phi^*(\mathbf{r})\left(\frac{1}{4\pi r}\phi(\mathbf{r})-\phi(\mathbf{r}+i\theta\cdot\nabla)\frac{1}{4\pi r}\right), \qquad (۲۲)$$

و یا تا مرتبهٔ اول از θخواهیم داشت

$$\Delta E=\alpha\int d^3r\phi^*(\mathbf{r})(-\frac{\mathbf{r}\cdot\theta\cdot i\nabla}{r^3}\phi(\mathbf{r})), \qquad (۲۳)$$

همچنین برای دو بردار اختیاری A و B داریم [۵]

$$\mathbf{A}\cdot\theta\cdot\mathbf{B}=\Theta\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}), \qquad (۲۴)$$

که در آن

$$\Theta=(\theta^{23},\theta^{31},\theta^{12}). \qquad (۲۵)$$

بنابراین تغییر در انرژی تا پایینترین مرتبه از θ بـه صـورت زیر خواهد شد

$$\Delta E=\alpha\int d^3r\phi^*(\mathbf{r})(\frac{\Theta\cdot L}{r^3})\phi(\mathbf{r}). \qquad (۲۶)$$

با انتخاب Θدر راستای z می‌توان به راحتی نتـایج گـزارش

شده در مراجع [٤]، [٥] و [٩] که با روشهای متفاوت به دست آمده است را به صورت زیر به دست آورد

$$\Delta E = \alpha^{4}\Theta\frac{P_{n,l}}{l(l+\frac{1}{2})(l+1)}, \tag{۲۷}$$

که در آن $P_{n,l}$ یک چندجمله‌ای از اعداد کوانتومی n و l است.

۳. ۲. معادله بته سالپیتر در فضای ناجابه‌جایی برای دو ذره با اسپین $\frac{1}{2}$

در این قسمت حالت مقید دو ذره با اسپین $\frac{1}{2}$، برای مثال پوزیترونیوم، را بررسی می‌کنیم. بنابراین S در معادله (۱) انتشارگر فرمیونی است و δV را در این حالت می‌توان با تعیین $I'(\theta)$ به کمک معادلهٔ (۳) به صورت زیر به دست آورد

$$I'(\theta) = \frac{4\pi\alpha\gamma_1^0\gamma_2^0}{\mathbf{k}^2}(1-e^{2ip\wedge p'}) - 4\pi\alpha\left(\frac{\gamma_1^0\gamma_2^0k_0^2}{k^2\mathbf{k}^2} - \frac{\gamma_1\cdot\gamma_2}{k^2}\right)(1-e^{2ip\wedge p'}). \tag{۲۸}$$

در اینجا نیز همانند حالت بررسی شده در بخش قبل جملهٔ اول از مرتبهٔ $\theta\alpha^4$ می‌باشد و به راحتی همانند آنچه قبلاً انجام شد قابل محاسبه است. تفاوت مجموعهٔ حاضر با حالت بدون اسپین در جملات وابسته به اسپین موجود در هستهٔ برهمکنش می‌باشد (جملهٔ سوم). این جملات در پایینترین مرتبه از مرتبهٔ $\theta\alpha^6$ می‌باشند. برای محاسبهٔ تغییر در انرژی باید از رابطهٔ (۱۲) استفاده کنیم

$$\Delta E = -\frac{1}{(2\pi)^6}\int d^4p\int d^4p'\psi^*(p)\left(-4\pi\alpha\left(\frac{\gamma_1^0\gamma_2^0k_0^2}{k^2\mathbf{k}^2} - \frac{\gamma_1\cdot\gamma_2}{k^2}\right)(1-e^{2ip\wedge p'})\right)\psi(p'). \tag{۲۹}$$

با نگاهی به معادلهٔ بالا می‌توان دید محاسبه مربوط به تعیین تغییر در انرژی به علت وابستگی هستهٔ برهمکنش به p_0 و p'_0 بسیار پیچیده‌تر می‌باشد. با توجه به اینکه در این مقاله به دنبال محاسبهٔ پایینترین تغییر در انرژی هستیم برای راحتی محاسبات را در پیمانه کولن انجام می‌دهیم. در این پیمانه انتشارگر فوتونی به صورت زیر می‌باشد

$$D_{\mu\nu} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2} \to D_{00} = \frac{-i}{\mathbf{k}^2}\quad , \qquad D_{ij} = \frac{-i}{k^2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{\mathbf{k}^2}\right)\quad ,\quad D_{i0} = D_{0j} = 0. \tag{۳۰}$$

جملهٔ دوم معادلهٔ (۳۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$D_{ij} = \frac{i}{\mathbf{k}^2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{\mathbf{k}^2}\right) + \frac{-ik_0^2}{k^2\mathbf{k}^2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{\mathbf{k}^2}\right), \tag{۳۱}$$

که در آن جملهٔ اول مربوط به انتشارگر فوتونهای نرم و جملهٔ دوم که مرتبهٔ بزرگی آن کوچکتر از اولی است انتشاگر فوتونهای فوق نرم را توصیف می‌کند. بنابراین تغییر در انرژی در پایینترین مرتبه از θ از رابطهٔ زیر قابل محاسبه است

$$\Delta E = -\frac{4\pi\alpha}{(2\pi)^6}\int d^4p'\int d^4p\tilde{\Psi}(p')\left(\frac{-\gamma_1^0\gamma_2^0}{\mathbf{k}^2} + \frac{\gamma_1^i\gamma_2^j}{\mathbf{k}^2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{\mathbf{k}^2}\right)\right)(1-e^{2ip\wedge p'})\Psi(p). \tag{۳۲}$$

با توجه به رابطهٔ زیر

$$\Lambda_1^+\Lambda_2^+\begin{pmatrix}\chi_1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\chi_2\\0\end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix}\chi_1\\ \frac{\sigma_1\cdot p}{E+m_1}\chi_1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}\chi_2\\ \frac{\sigma_2\cdot p}{E+m_2}\chi_2\end{pmatrix} = u_1(p)\otimes u_2(p), \tag{۳۳}$$

می‌توان ΔE را به صورت زیر نوشت

$$\Delta E = \frac{-4\pi\alpha}{(2\pi)^6}\int d^3p'd^3p\psi^*(\mathbf{p}')\bar{u}_1(\mathbf{p}')\bar{u}_2(\mathbf{p}')\left(\frac{-\gamma_1^0\gamma_2^0}{\mathbf{k}^2} + \frac{\gamma_1^i\gamma_2^j}{\mathbf{k}^2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{\mathbf{k}^2}\right)\right)(1-e^{2ip\wedge p'})u_1(\mathbf{p})u_2(\mathbf{p})\psi(\mathbf{p}), \tag{۳٤}$$

که در آن

$$\psi(\mathbf{p}) = \int dp^0 D_{++}^{-1}\frac{1}{2i\pi}v\phi(\mathbf{p}). \tag{۳۵}$$

در به دست آوردن رابطهٔ (۳٤) از این واقعیت که $\Lambda_1^+\Lambda_2^- = \Lambda_1^-\Lambda_2^+ = 0$ و $\Lambda_1^+\Lambda_2^+$ بسیار بزرگتر از $\Lambda_1^-\Lambda_2^-$ است استفاده شده است. اکنون با استفاده از روابط زیر می‌توان تغییر در انرژی را محاسبه کرد

$$\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma_iu(\mathbf{p}) = -\chi'^{\dagger}\frac{\mathbf{p}+\mathbf{p}'}{2m}\chi + i\chi'^{\dagger}\frac{(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\times\sigma}{2m}\chi + \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\right), \tag{۳٦}$$

و همچنین

$$\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma_0u(\mathbf{p}) = \chi'^{\dagger}\chi + i\chi'^{\dagger}\frac{(\mathbf{p}'\times\mathbf{p})\cdot\sigma}{4m^2}\chi - \chi'^{\dagger}\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}{8m^2}\chi + \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{p}^3}{m^3}\right), \tag{۳۷}$$

که در آن اسپینور دو مؤلفه‌ای χ به یک بهنجار می‌باشد. بنابراین اکنون برای ΔE داریم

$$\Delta E = 4\pi\alpha\int\frac{d^3p'd^3p}{(2\pi)^6}\psi^*(\mathbf{p}')\sum_i\Gamma_i(\mathbf{p},\mathbf{p}')(1-e^{2ip\wedge p'})\psi(\mathbf{p}), \tag{۳۸}$$

و

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\mathbf{k}^2}, \tag{۳۹}$$

$$\Gamma_2 = i\frac{(\mathbf{p}' \times \mathbf{p})\cdot\sigma_1}{4m_1^2}\frac{1}{\mathbf{k}^2}, \tag{۴۰}$$

$$\Gamma_3 = \Gamma_2(1 \to 2), \tag{۴۱}$$

$$\Gamma_4 = -\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}{8m_1^2}\frac{1}{\mathbf{k}^2}, \tag{۴۲}$$

$$\Gamma_5 = \Gamma_4(1 \to 2), \tag{۴۳}$$

$$\Gamma_6 = \frac{(\mathbf{p}+\mathbf{p}')_i}{2m_1}\left(\frac{-1}{\mathbf{k}^2}(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{\mathbf{k}^2})\right)\frac{(\mathbf{p}+\mathbf{p}')_j}{2m_2}, \tag{۴۴}$$

$$\Gamma_7 = \frac{(\mathbf{p}+\mathbf{p}')_i}{2m_1}\left(\frac{1}{\mathbf{k}^2}(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{\mathbf{k}^2})\right)[\frac{i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\times\sigma_1}{2m_2}]_j, \tag{۴۵}$$

$$\Gamma_8 = [\frac{i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\times\sigma_2}{2m_2}]_i\left(\frac{1}{\mathbf{k}^2}(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{\mathbf{k}^2})\right)\frac{(\mathbf{p}+\mathbf{p}')_j}{2m_1}, \tag{۴۶}$$

$$\Gamma_9 = [\frac{i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\times\sigma_2}{2m_2}]_i\left(\frac{-1}{\mathbf{k}^2}(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{\mathbf{k}^2})\right)[\frac{i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\times\sigma_1}{2m_1}]_j. \tag{۴۷}$$

در معادله (۳۸) جملهٔ Γ_1 از مرتبهٔ $\theta\alpha^4$ شروع می‌شود و مقدار آن در معادلات (۲۶) و (۲۷) محاسبه شده است. مرتبهٔ بقیهٔ جملات ($\Gamma_2 - \Gamma_9$) همگی از $\theta\alpha^6$ شروع می‌شوند. بنابراین برای تعیین بزرگترین تغییر در انرژی تنها کافی است جمله اول را در نظر بگیریم اما برای تعیین اثر ناجابه‌جایی بر بعضی پدیده‌های مهم فیزیکی که با دقت بسیار بالا در آزمایشگاه اندازه‌گیری می‌شوند مثل شکافت فوق ریز در اتم پوزیترونیوم $E(2^3S_1) - E(2^3p_2)$ [۱۶-۲۰] جملهٔ اول هیچ نقشی ندارد در این مورد جملات وابسته به اسپین یعنی Γ_2، Γ_3، Γ_7، Γ_8، Γ_9 مقدار شکافت فوق ریز را نسبت به فضای معمولی تغییر می‌دهند. بنابراین با محاسبهٔ تغییر در انرژی برای جملات ذکر شده می‌توان شکافت فوق ریز پوزیترونیم ($m_1=m_2=m_e$) را در فضای ناجابه‌جایی براحتی محاسبه کرد:

$$\Delta E_2 = -\frac{i\pi}{m_e^2}\int\frac{d^3p'd^3p}{(2\pi)^6}\psi^*(\mathbf{p}')\frac{\mathbf{p}\times\mathbf{p}'\cdot\sigma_1}{\mathbf{k}^2}(1 - e^{2ip\wedge p'})\psi(\mathbf{p}), \tag{۴۸}$$

که با انجام کمی عملیات جبری خواهیم داشت:

$$\Delta E_2 = -\frac{\alpha}{4m_e^2}\int d^3r[\psi^*(\mathbf{r}) - \psi^*(\mathbf{r}+i\theta\cdot\nabla)\frac{\mathbf{r}\times\mathbf{p}\cdot\sigma_1}{r^3}]\psi(\mathbf{r}), \tag{۴۹}$$

و یا

$$\Delta E_2 = -\frac{3\alpha}{2m_e^2}\int d^3r[\Theta\cdot\mathbf{L}\psi^*(\mathbf{r})]\frac{\mathbf{S_1}\cdot\mathbf{L}}{r^5}\psi(\mathbf{r}). \tag{۵۰}$$

برای بقیه جملات می‌توان نشان داد که

$$\Delta E_3 = \Delta E_2(S_1 \to S_2), \tag{۵۱}$$

و

$$\Delta E_2 + \Delta E_3 = \frac{1}{2}(\Delta E_7 + \Delta E_8) = -\frac{3\alpha}{2m_e^2}\int d^3r[\Theta\cdot\mathbf{L}\psi^*(\mathbf{r})]\frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{L}}{r^5}\psi(\mathbf{r}), \tag{۵۲}$$

که در آن $S=S_1+S_2$ است. بنابراین معادلهٔ (۵۲) فقط در حالت $S=1$ مقداری غیر صفر دارد. جمله ΔE_9 که عبارت ریاضی معادل با جملهٔ ΔE_e در مرجع [۹] دارد در هر دو حالت اسپینی کل صفر می‌باشد. اکنون به کمک انرژیهای محاسبه شده شکافت فوق ریز اتم پوزیترونیوم در فضای ناجابه‌جایی به صورت زیر منجر می‌شود

$$\Delta E(S=1) - \Delta E(S=0) = -\frac{9\alpha}{2m_e^2}\int d^3r[\frac{\Theta\cdot\mathbf{L}}{r^5}\psi^*(\mathbf{r})]l\psi(\mathbf{r}). \tag{۵۳}$$

که دقیقاً برابر با مقدار به دست آمده در مرجع [۹] به کمک روش NRQED می‌باشد.

۳. ۳. معادله بته سالپیتر در فضای ناجابه‌جایی برای دو ذره با اسپین – صفر و اسپین – $\frac{1}{2}$

در این قسمت به بررسی حالت مقید دو ذره با اسپینهای صفر و $\frac{1}{2}$ می‌پردازیم. بنابراین در این حالت یکی از انتشارگرها فرمیونی و دیگری بوزونی است. با توجه به اینکه در این حالت در یک رأس γ_μ و در رأس دیگر یک عامل تکانه داریم تغییر در انرژی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\Delta E = -\frac{4\pi\alpha}{(2\pi)^6}\int d^4p'\int d^4p\bar{\Psi}(p')\left(\frac{-\gamma_1^0 p_2^0}{\mathbf{k}^2} + \frac{\gamma_1^i p_2^j}{\mathbf{k}^2}(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{\mathbf{k}^2})\right)(1 - e^{2ip\wedge p'})\Psi(p), \tag{۵۴}$$

که در آن

$$p_2 = (p_0 + p'_0, \mathbf{p}+\mathbf{p}') . \qquad (۵۵)$$

برای به دست آوردن بهنجارش صحیح در حد غیر نسبیتی چارتکانهٔ موجود در رأس اسکالر را بر $\sqrt{2E}\sqrt{2E'}$ بخش می‌کنیم. بنابراین بسط $\frac{1}{m}$ رأس اسکالر به صورت زیر خواهد شد[۲۱]

$$\frac{p_0+p'_0}{\sqrt{2E}\sqrt{2E'}} = 1 + \mathcal{O}(\frac{p^4}{m^4}), \qquad (۵۶)$$

$$\frac{\mathbf{p}+\mathbf{p}'}{\sqrt{2E}\sqrt{2E'}} = \frac{\mathbf{p}+\mathbf{p}'}{2m} + \mathcal{O}(\frac{p^3}{m^3}). \qquad (۵۷)$$

بنابراین ΔE برای دو ذره با اسپین صفر و $\frac{1}{2}$ همانند رابطه (۳۸) به صورت زیرنوشته می‌شود

$$\Delta E = 4\pi\alpha \int \frac{d^3p' d^3p}{(2\pi)^6}\psi^*(\mathbf{p}')\sum_i \Gamma_i(\mathbf{p},\mathbf{p}')(1-e^{2ip\wedge p'})\psi(\mathbf{p}), \qquad (۵۸)$$

که در آن Γ_iها به صورت زیر تعریف شده‌اند

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\mathbf{k}^2}, \qquad (۵۹)$$

$$\Gamma_2 = i\frac{(\mathbf{p}'\times\mathbf{p})\cdot\sigma_{\mathbf{1}}}{4m_1^2}\frac{1}{\mathbf{k}^2}, \qquad (۶۰)$$

$$\Gamma_3 = -\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}{8m_1^2}\frac{1}{\mathbf{k}^2}, \qquad (۶۱)$$

$$\Gamma_4 = \frac{(\mathbf{p}+\mathbf{p}')_i}{2m_1}\left(\frac{1}{\mathbf{k}^2}(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{\mathbf{k}^2})\right)\frac{(\mathbf{p}+\mathbf{p}')_j}{2m_2}, \qquad (۶۲)$$

$$\Gamma_5 = [\frac{i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\times\sigma_{\mathbf{1}}}{2m_1}]_i\left(\frac{-1}{\mathbf{k}^2}(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{\mathbf{k}^2})\right)\frac{(\mathbf{p}+\mathbf{p}')_j}{2m_2}. \qquad (۶۳)$$

در اینجا نیز جملهٔ اول یعنی Γ_1، که مقدار آن در رابطه (۲۶) تعیین شده است، از مرتبهٔ $\theta\alpha^4$ شروع می‌شود و بزرگترین جمله در تعیین مقدار ΔE است. بقیه جملات همگی از مرتبهٔ $\theta\alpha^6$ شروع شده و بسیار کوچکتر از جملهٔ اول می‌باشند. پس تنها کافی است جملات وابسته به اسپین یعنی Γ_2 و Γ_5 را محاسبه کرد:

$$\Delta E_2 = -\frac{3\alpha}{2m_1}\int d^3r[\Theta\cdot\mathbf{L}\psi^*(\mathbf{r})]\frac{\mathbf{S_1}\cdot\mathbf{L}}{r^5}\psi(\mathbf{r}), \qquad (۶۴)$$

و

$$\Delta E_5 = -\frac{3\alpha}{m_1m_2}\int d^3r[\Theta\cdot\mathbf{L}\psi^*(\mathbf{r})]\frac{\mathbf{S_1}\cdot\mathbf{L}}{r^5}\psi(\mathbf{r}). \qquad (۶۵)$$

۴. نتیجه

در این مقاله حالت مقید دو ذره با اسپین صفر و $\frac{1}{2}$ به کمک معادله بته سالپیتر بررسی شد. حالت اسپین صفر- اسپین صفر و حالت اسپین $\frac{1}{2}$- اسپین $\frac{1}{2}$ قبلاً با روشهایی غیر از روش به کار گرفته شده در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته‌اند [۴]، [۵] و [۹]، که نتایج حاصل از این مقاله، داده شده در روابط (۵۳) و (۲۶) در توافق کامل با روشهای قبلی است. با توجه به اینکه تاکنون هم ارزی روش NRQED و معادلهٔ بته سالپیتر نشان داده نشده است توافق کامل جوابها برای مسئله حل شده در این مقاله خود به تنهایی می‌تواند دارای اهمیت باشد. در این مقاله همچنین برای اولین بار حالت اسپین صفر- اسپین $\frac{1}{2}$ نیز به کمک معادلهٔ بته سالپیتر بررسی شد که نتایج آن در روابط (۶۴) و (۶۵) داده شده است. به‌طور کلی اهمیت روش بته سالپیتر در این است که حالات مقید دو ذره‌ای در فضای ناجابه‌جایی را در حالت کلی (جرمها و اسپینهای متفاوت) به‌طور سیستماتیک می‌توان بررسی کرد.

قدردانی

قسمتی از هزینه‌های طرح پژوهشی فوق توسط دانشگاه صنعتی اصفهان پرداخت شده است.

مراجع

1. M Hayakawa, *hep-th*/9912167.
2. I F Riad and M M Sheikh-Jabbari, *JHEP* **0008** (2000) 045.
3. H Arfaei and M H Yavartanoo, *hep-th*/0010244.
4. M Chaichian, M M Sheikh-Jabbari and A Tureanu, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 2716.

5. M Haghighat and F Loran, *Mod. Phys. Lett*. A **16** (2001) 1435.

6. Y Liao, *JHEP* **11** (2001) 067.

7. J Gamboa, M Loewe and J C Rojas, *Phys. Rev*. D **64** (2001) 067901.

8. P M Ho and H C Kao, *Phys. Rev. Lett*. **88** (2002) 151602.

9. M Haghighat, S M Zebarjad and F Loran, *Phys. Rev*. D **66** (2002) 016005.

10. M Haghighat and F Loran, *Phys. Rev*. D **67** (2003) 096003.

11. M Haghighat and M M Ettefaghi, *to appear in Phys. Rev*. D, hep-ph/0405270.

12. W E Caswell and G P Lapage, *Phys. Lett*. B **167** (1986) 437.

13. C Itzykson and Zuber, *Quantun Field Theory* (McGraw-Hill, 1980).

14. N Seiberg, L Susskind and N Toumbas, *JHEP* **0006** (2000) 044.

15. J Gomis and T Mehen, *Nucl.Phys*. B **591** (2000) 265.

16. K Pachucki and S G Karshenboim, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 2101.

17. E W Hagena, et al., *Phys. Rev. Lett*. **72** (1993) 2887.

18. S Hatamian, R S Conti and A Rich, *Phys. Rev. Lett*. **58** (1987) 1833.

19. R Ley, etal., *Hyperfine Interactions* **89** (1984) 327.

20. A P Mills, S Berko and K F Canter, *Phys. Rev. Lett*. **34** (1975) 1541.

21. S M Zebarjad, McGill Univesity Ph.D. Thesis (1997).