مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۹، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۸۸
مقاله‌نامهٔ اولین کنفرانس ملی پیشرفتهای ابررسانایی، خرداد ۱۳۸۷

حالت زمینهٔ ابرشارهٔ گاز فرمی نزدیک تشدید فشباخ موج-d

مرتضی خادمی پور صمدی و محمدعلی شاهزمانیان

دانشکدهٔ فیزیک، دانشگاه اصفهان، خیابان هزار جریب، اصفهان

چکیده

ما جفت شدگی موج d را نزدیک تشدید فشباخ بررسی خواهیم کرد. با استفاده از پتانسیل نوزیرز و اشمیت ـ رینک که دامنهٔ پراکندگی انرژی‌ـ پایین دو جسمی را ایجاد می‌کند با کمینه سازی انرژی به پاسخ تحلیلی معادلهٔ گاف و حالت زمینه در دمای $T = 0$ خواهیم رسید.

واژه‌های کلیدی: جفت شدگی موج d، ابرشاره، معادله گاف، حالت پایه

۱. مقدمه

در حال حاضر شواهد قابل ملاحظه‌ای برای شکل‌گیری جفت فرمیونی نزدیک تشدید فشباخ وجود دارد[۱]. تشدید فشباخ ناحیه‌ای است که این جفتهای فرمیونی دارای برهم‌کنش قویند. معمولاً برهم کنش در گازهای اتمی با یک پارامتر به نام طول پراکندگی موج s یعنی a_0 توصیف می‌شود. این کمیت را می‌توان نزدیک تشدید فشباخ تنظیم نمود. علامت و اندازهٔ a_0 را می‌توان با استفاده از یک میدان مغناطیسی خارجی تعیین کرد[۲]. با توجه به طول پراکندگی a_0، برهم‌کنش‌های اتمی در تشدید فشباخ به دو بخش تقسیم می‌شوند. بخش $a_0 < 0$ دارای برهم‌کنش جفتهای کوپر (BCS) و بخش $a_0 > 0$ دارای برهم‌کنش مولکولی جفتهای فرمیونی یعنی چگالش بوز ـ اینشتین (BEC) می‌باشد[۳]. در این مقاله با توجه به ابر شارگی گاز فرمی در دمای $T = 0$، با به کارگیری مدل پتانسیلی که دامنه پراکندگی دو جسمی را فراهم می‌آورد به پاسخ تحلیلی مسئلهٔ BCS به ازای جفت شدگی موج d خواهیم رسید.

۲. دامنهٔ پراکندگی دو جسمی بر حسب ماتریس پراکندگی

دامنهٔ پراکندگی پارهٔ موج ℓام ($f_\ell(k)$) از طریق ماتریس پراکندگی $T_\ell(k,k';E)$ با پتانسیل $V(r)$ به این صورت در ارتباط است[۴]:

$$f_\ell(k) = -\frac{m}{4\pi\hbar^2} T_\ell(k,k;2\epsilon_k + i0^+) \qquad (۱)$$

که در آن $T_\ell(k,k';E_+)$ معادله انتگرالی (۲) را برآورده می‌کند:

$$\begin{aligned} &T_\ell(k,k';E_+) \\ &= V_\ell(k,k') + \int \frac{dk''}{2\pi^2} \times \frac{k''^2 V_\ell(k,k'') T_\ell(k'',k';E_+)}{E_+ - \frac{\hbar^2 k''^2}{m}} \end{aligned} \qquad (۲)$$

به منظور یافتن ماتریس پراکندگی از بسط $V_{k-k'}$ بدین شکل استفاده کرده‌ایم[۵]:

$$V_{k-k'} = 4\pi \sum_\ell V_\ell(k,k') \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\hat{k}) Y^*_{\ell m}(\hat{k}') \qquad (۳)$$

۳. پتانسیل نوزیرز و اشمیت ـ رینک

برای جلوگیری از پیچیدگیهای فنی از مدل پتانسیل نوزیرز و اشمیت ـ رینک بهره می‌بریم[۶]:

$$V_{\mathbf{l}}(k,k') = l_{\mathbf{l}}\, w_{\mathbf{l}}(k)\, w_{\mathbf{l}}(k') \quad ;$$

$$w_{\mathbf{l}}(k) = \frac{\left(\dfrac{k}{k_0}\right)^{\mathbf{l}}}{\left[1+\left(\dfrac{k}{k_0}\right)^2\right]^{\mathbf{l}+1}} \tag{۴}$$

که در آن k_0 بردار موجی قطع است.

برای به دست آوردن دامنهٔ پراکندگی، تابع $t_{\mathbf{l}}(E_+)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\frac{1}{t_{\mathbf{l}}(E_+)} = \frac{1}{l_{\mathbf{l}}} - \frac{1}{\Omega}\sum_k \frac{w_{\mathbf{l}}^2(k)}{E_+ - 2e_k} \tag{۵}$$

که در آن Ω حجم است. حال اگر قرار دهیم:

$$T_{\mathbf{l}}(k,k';E_+) = w_{\mathbf{l}}(k)\, w_{\mathbf{l}}(k')\, t_{\mathbf{l}}(E_+) \tag{۶}$$

به رابطهٔ (۲) دست خواهیم یافت. اکنون معادلهٔ (۵) را به ازای $\mathbf{l}=2$ حل نموده، از این روش $T_2(k,k',2e_k + i0^+)$ را به دست می‌آوریم. پاسخ معادلهٔ (۵) با استفاده از حساب مانده‌ها این گونه است:

$$\frac{1}{t_{\mathbf{l}}(E_+)} = \frac{1}{l_{\mathbf{l}}} + \frac{mk_0^2}{4p^2\mathbf{h}^2}(2pi)\left\{ a_{-1}\Big|_{z=ik_0} + a_{-1}\Big|_{z=\sqrt{\frac{mE_+}{\mathbf{h}^2}}} \right\} \tag{۷}$$

سرانجام با استفاده از رابطه‌های (۱)، (۵) و (۶) دامنهٔ $f_{\mathbf{l}}(k)$ برابر خواهد بود با:

$$f_{\mathbf{l}}(k) = -\frac{m}{4p\mathbf{h}^2} w_{\mathbf{l}}(k)\, w_{\mathbf{l}}(k') \times \frac{1}{\dfrac{1}{l_{\mathbf{l}}} + \dfrac{mk_0^2}{4p^2\mathbf{h}^2}(2pi)\left\{ a_{-1}\Big|_{z=ik_0} + a_{-1}\Big|_{z=\sqrt{\frac{mE_+}{\mathbf{h}^2}}} \right\}} \tag{۸}$$

بنابراین، دامنهٔ پراکندگی به ازای $\mathbf{l}=2$ در انرژیهای پایین این گونه به دست می‌آید:

$$f_2(k) = \frac{k^4}{-\left(\dfrac{4p\,\mathbf{h}^2k_0^4}{m\,l_2} + \dfrac{3}{8}k_0^5\right) - \left(\dfrac{12p\,\mathbf{h}^2k_0^2}{m\,l_2} + \dfrac{5}{4}k_0^3\right)k^2 - ik^5} \tag{۹}$$

۴. برد مؤثر و طول پراکندگی به ازای $\mathbf{l}=2$

دامنهٔ پراکندگی دو جسمی پاره موج $\mathbf{l}$ام در انرژیهای پایین چنین خواهد بود [۷]:

$$f_{\mathbf{l}}(k) = \frac{(kb)^{2\mathbf{l}}}{-a_{\mathbf{l}}^{-1} + \dfrac{r_{\mathbf{l}}k^2}{2} - i(kb)^{2\mathbf{l}}k} \tag{۱۰}$$

که در آن $a_{\mathbf{l}}$، $r_{\mathbf{l}}$ و b به ترتیب دامنه پراکندگی، برد موثر و برد پتانسیل می‌باشند. انرژی حالت مقید وقتی k ادامه تحلیلی محور موهومی محض باشد به عنوان یک قطب در تابع $f_{\mathbf{l}}(k)$ ظاهر می‌شود[۸]. به ازای $\mathbf{l}\geq 1$ برد مؤثر در معادلهٔ (۱۰) بر بخش موهومی غالب می‌شود. آنگاه انرژی حالت مقید برابر است با [۹]:

$$E_b = \frac{2\mathbf{h}^2}{ma_{\mathbf{l}}r_{\mathbf{l}}} \qquad \mathbf{l}\geq 1 \tag{۱۱}$$

با قرار دادن $\mathbf{l}=2$ در رابطهٔ (۱۰) و مقایسهٔ آن با رابطهٔ (۹) خواهیم داشت:

$$-\frac{a_2^{-1}}{b^4} = -\left(\frac{4p\,\mathbf{h}^2k_0^4}{m\,l_2} + \frac{3}{8}k_0^5\right) \tag{۱۲}$$

$$\frac{r_2}{2b^4} = -\left(\frac{12p\,\mathbf{h}^2k_0^2}{m\,l_2} + \frac{5}{4}k_0^3\right) \tag{۱۳}$$

با حذف l_2 در دو معادلهٔ بالا، r_2 این گونه به دست می‌آید:

$$\frac{r_2}{2b^4} = -\left[\frac{3}{a_2b^4k_0^2} + \frac{1}{8}k_0^3\right] \tag{۱۴}$$

از سوی دیگر در تشدید فشباخ a_2 به سمت بی نهایت میل می‌کند[۱۰] آنگاه:

$$r_2 = -\frac{1}{4}k_0^3b^4 \tag{۱۵}$$

۵. انرژی سیستم و گاف انرژی در زیر دمای گذار

با استفاده از نظریهٔ BCS، انرژی میانگین و گاف انرژی را می‌توان نوشت[۱۱]:

$$\langle H - mN\rangle = 2\sum_k (e_k - m)|v_k|^2 - \Omega^{-1}\sum_{k,k'} V_{k-k'} u_{k'} v^*_{k'} u_k \tag{۱۶}$$

$$D_k = -\sum_{k'} v_{k-k'} u_{k'} v_{k'} = -\sum_{k'} \frac{v_{k-k'} D_{k'}}{2E_{k'}} \tag{۱۷}$$

که در آن

$$x_k = e_k - m \quad ، \quad v_k = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{x_k}{E_k}\right)}{2}} \quad ، \quad u_k = \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{x_k}{\Delta_k}\right)}{2}}$$

$E_k = \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta_k|^2}$ ، Ω حجم و μ پتانسیل شیمیایی است. با استفاده از پارامترهای ذکر شده و جایگذاری آنها در روابط (۱۶) و (۱۷)، انرژی سیستم و گاف انرژی را به این شکل بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\langle H\rangle}{\Omega} = \frac{1}{\Omega}\sum_k \left\{\varepsilon_k - E_k + \frac{|\Delta_k|^2}{2E_k}\right\} + n\mu \tag{۱۸}$$

که n، تعداد ذرات در واحد حجم، برابر است با:

$$n = \frac{N}{\Omega} = \frac{1}{\Omega}\sum_k \left(1 - \frac{\varepsilon_k - \mu}{E_k}\right) \tag{۱۹}$$

و

$$\Delta_k = w_{\mathbf{l}}(k)\sum_m C_m Y_{\mathbf{l}m}(\hat{k}) \tag{۲۰}$$

که در آن ضرایب $\{C_m\}$، معادلات (۲۱) را برآورده می‌کنند:

$$-\frac{C_m}{\lambda_{\mathbf{l}}} = 4\pi\Omega^{-1}\sum_{k,m'} w_{\mathbf{l}}(k) Y^*_{\mathbf{l}m}(\hat{k}) Y_{\mathbf{l}m'}(\hat{k}) \frac{C_{m'}}{E_k} \tag{۲۱}$$

با استفاده از روابط (۲۰) و (۲۱) خواهیم داشت:

$$-\frac{C_{\mathbf{l}}^2}{4\pi\lambda_{\mathbf{l}}} = \sum_k \frac{|\Delta_k|^2}{2E_k} \tag{۲۲}$$

در زیر دمای گذار (T_c)، $\mu << \varepsilon_k$[۱۲] بوده، با توجه به اینکه گاف نیز کوچک است $\frac{C_{\mathbf{l}}^2}{4p\,l_{\mathbf{l}}}$، انرژی سیستم و n به این صورت نوشته می‌شوند:

$$n\mu = n\mu_0 - \frac{1}{\Omega}\sum_k \frac{|\Delta_k|^2}{2\varepsilon_k} - \frac{C_{\mathbf{l}}^2}{4\pi\lambda_{\mathbf{l}}} \quad ;$$

$$n\mu_0 = \frac{1}{\Omega}\sum_k \frac{|\Delta_k|^4}{4\varepsilon_k^3} \tag{۲۳}$$

$$\frac{\langle H\rangle}{\Omega} = n\mu - \frac{1}{\Omega}\sum_k \frac{|\Delta_k|^2}{8\varepsilon_k^3} \tag{۲۴}$$

$$n = \frac{1}{\Omega}\sum_k \frac{|\Delta_k|^2}{2\varepsilon_k^2} \tag{۲۵}$$

از سوی دیگر، تعداد الکترونها در زیر سطح فرمی برابر است با:

$$n = \frac{1}{3\pi^2} k_F^3 \tag{۲۶}$$

با استفاده از روابط (۲۰) و (۲۵)، n را به ازای $\mathbf{l} = 2$ به شکل دیگر می‌توان نوشت:

$$n = \frac{m^2 C_2^2}{64\pi^2 \mathbf{h}^4 k_0} \quad \Rightarrow \quad k_0 = \frac{m^2 C_2^2}{64\pi^2 \mathbf{h}^4 n} \tag{۲۷}$$

حال رابطهٔ (۲۷) را در رابطهٔ (۱۵) قرار داده، به کمک رابطهٔ (۲۶)، و با اندکی محاسبه می‌رسیم به

$$C_2 = \frac{8}{\sqrt{3}} \frac{(k_0 b)^2}{\sqrt{k_F}} \frac{1}{\sqrt{|r_2|}} E_F \tag{۲۸}$$

با استفاده از روابط (۱۱)، (۱۲) و (۲۸)، $\frac{C_2^2}{4\pi\lambda_2}$ به این صورت در می‌آید:

$$\frac{C_2^2}{4\pi\lambda_2} = \left[-\frac{E_{2b}}{2} - \frac{3}{2}\frac{\mathbf{h}^2 k_0^2}{m}\right] n \tag{۲۹}$$

با جایگذاری رابطهٔ (۲۹) در روابط (۲۳) و (۲۴) خواهیم داشت:

$$\mu = \mu_0 + \frac{E_{2b}}{2} = \frac{19\gamma \mathbf{h}^2 k_F^3}{3mk_0} + \frac{E_{2b}}{2} \tag{۳۰}$$

$$\frac{\langle H\rangle}{\Omega} = \frac{n}{2}\left(\mu_0 + E_{2b}\right) = \frac{n}{2}\left(\frac{19\gamma \mathbf{h}^2 k_F^3}{3mk_0} + E_{2b}\right) \tag{۳۱}$$

که در آن $\gamma = \int d\hat{k} \left|\tilde{\Delta}_k\right|^4$ است و گاف انرژی را بدین شکل تغییر دادیم:

$$\Delta_k = w_{\mathbf{l}}(k) C\tilde{\Delta}(\hat{k}) \quad ; \quad \tilde{\Delta}(\hat{k}) = \sum_m \alpha_m Y_{\mathbf{l}m}(\hat{k}) \tag{۳۲}$$

که در آن $\alpha_m = \frac{C_m}{C_{\mathbf{l}}}$.

۶. بحث و نتیجه‌گیری

برای یافتن حالت زمینه باید انرژی سیستم را کمینه کرد. اگر به انرژیهای به دست آمده توجه کنیم، تنها m_0 یا g متغیر است؛

بنابراین، برای یافتن حالت زمینه باید g را کمینه کرد. برای این کار، از نمایش دکارتی هماهنگهای کروی بهره می‌گیریم و $\sum_m \alpha_m Y_{\mathbf{l}m}(\hat{k})$ را به این صورت می‌نویسیم:

$$\tilde{\Delta}(\hat{k}) = \sum_m \alpha_m Y_{2m}(\hat{k}) = \sum_{[i]} A_{i_1,i_2,\ldots i_{\mathbf{l}}} \hat{k}_{i_1}\hat{k}_{i_2}\ldots\hat{k}_{i_{\mathbf{l}}}$$

به ازای $\mathbf{l}=2$ داریم:

$$\sum_m \alpha_m Y_{\mathbf{l}m}(\hat{k}) = \sum_{a,b=x,y} A_{a,b}\hat{k}_a\hat{k}_b$$

با محاسبات در بسط گاف انرژی به ازای $\mathbf{l}=3$ یک رابطه کلی برای $C_{\mathbf{l}}$ $\left(C_{\mathbf{l}}^2 = \sum_m |C_m|^2\right)$ نیز می‌توان به دست آورد:

$$C_3 = \frac{8}{\sqrt{3}} \frac{(k_0 b)^3}{\sqrt{k_F}} \frac{1}{\sqrt{|r_3|}} E_F$$

که می‌توان رابطهٔ کلیتری از سه مقدار $\mathbf{l}$ ($\mathbf{l}$=۱،۲و۳) بدین شکل نوشت:

$$C_{\mathbf{l}} = \frac{8}{\sqrt{3}} \frac{(k_0 b)^{\mathbf{l}}}{\sqrt{k_F}} \frac{1}{\sqrt{|r_{\mathbf{l}}|}} E_F$$

همچنین انرژی سیستم و m نیز به ازای $\mathbf{l}$های مختلف به این صورت حاصل شد:

$$\frac{\langle H \rangle}{\Omega} = \frac{n}{2}\left(\mu_0 + E_{\mathbf{l}b}\right)$$

و

$$\mu = \mu_0 + \frac{E_{\mathbf{l}b}}{2}$$

که در آن m_0 نیز به ازای $\mathbf{l}$های مختلف متفاوت خواهد بود. کمینه‌سازی انرژی سیستم و حالت زمینه ابرشارهٔ گاز فرمی به ازای $\mathbf{l}=3$ در جای دیگر ارائه خواهد شد.

از آنجا که $\mathrm{TrA}=0$ و A یک ماتریس متقارن است، $\gamma_{\mathbf{l}=2} \propto 2\left(TrA^{\dagger}A\right)^2 + \left|TrA^2\right|^2$ [۱۳]. بنابراین حالت زمینه دارای یک تبهگنی کاتوره‌ای است؛ یعنی دو حالت $\Delta(\hat{k}) \propto (\hat{k}_x + i\hat{k}_y)^2$ و $\tilde{\Delta}(\hat{k}) \propto \left(\hat{k}_x^2 + e^{\frac{2\pi}{3}i}\hat{k}_y^2 + e^{\frac{4\pi}{3}i}\hat{k}_z^2\right)$، $g_{\mathbf{l}=2}$ را کمینه می‌کنند.

نتایج ذکر شده با روشی که در این مقاله بدان پرداخته شد با نتایج مقالهٔ مرجع [۹] مشابه است.

مراجع

1. M W Zwierlein, C A Stan, C H Schunk, S M F Raupach, S Gupta, Z Hadzibibic and W K Kettle; *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 250401.
2. T Bourdel, J Cubizolles, L Khaykovich, K M F Magalhaes, S J J M F Kokkelmans, G V Shlyapnikov, and C Salomon; *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 020402.
3. C A Regal, M Griener, and D S Jin; *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 040403.
4. C J Pethic, H smith; “*Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*”; Cambridge University Press (2002).
5. V P Mineev, K V Samokhin; “*Introduction to Unconventional Superconductivity*”; Gordon and Breach (1998).
6. P Nozieres and S Schmitt–Rink; *J. Low Temp. Phys.* **59** (1985) 195.
7. L D Landau and E M Lifshitz; “*Quantum Mechanics*”; Pergamon, Oxford (1994).
8. J J Sakurai; “*Modern Quantum Mechanics*”; Addison Wesley, Inc (1994).
9. T L Ho and R B Diener; *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 090402.
10. M E Gehm, S L Hammer, S R Granade, K M O’hara and J E Thomas, *Phys. Rev. A* **68** (2003) 011401.
11. P G De Gennes; “*Superconductivity of Metals and Alloys*” Faculte Des Sciences, Orsay, France, P. A. Pincus University of California (1966).
12. L Pitaevski and S Stringari; “*Bose-Einstein Condensation*”; Clarendon, Oxford (2003).
13. N D Mermin; *Phys. Rev. A* **9** (1974) 868.