یادداشت پژوهشی

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۹، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۳۸۸

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران

# اثرات بر هم‌کنش فوق ریز بر جرم باریونهای $N$ و $\Delta$

**حسن حسن آبادی، صابر زرین کمر و علی اکبر رجبی**

دانشکدهٔ فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

پست الکترونیکی: h.hasanabadi@shahroodut.ac.ir

(دریافت مقاله: ۸۶/۱۲/۷ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۸۷/۱۲/۱)

## چکیده

ارائه مدلی کامل برای بررسی نظری جرم باریونها، چه در محدوده نسبیتی و چه در محدوده غیر نسبیتی همواره از اهمیت خاصی برخوردار بوده است و پتانسیلهای مختلفی برای مدل سازی نظری موضوع پیشنهاد شده‌اند. از طرفی در نظر گرفتن برهم‌کنشهای فوق ریز به نتایج جالبی منجر می‌شوند. در این کار، در ابتدا، برهم‌کنش فوق ریز و پتانسیل کوارکی وابسته به ایزو اسپین را معرفی نموده‌ایم، سپس ویژه توابع و ویژه مقادیر را در حالت غیر نسبیتی به‌دست آورده‌ایم. نتایج به‌دست آمده در توصیف طیف باریونها با نتایج تجربی همخوانی خوبی دارند.

**واژه‌های کلیدی:** باریون، اسپین، ایزواسپین، معادلهٔ شرودینگر، برهم‌کنش فوق ریز

## ۱. مقدمه

از آنجا که هنوز شواهد تجربی قانع کننده‌ای مبنی بر وجود کوارکهای آزاد مشاهده نشده، ارائهٔ مدلی برای بررسی نظری جرم کوارکها از جذابیت بالایی برخوردار است.اولین و ساده‌ترین مدلی که برای مدل سازی نظری جرم باریونها ارائه شده، مدلی است که در آن باریون متشکل از سه ذره ساکن در نظر گرفته می‌شود و فقط برهم‌کنش اسپینی منظور می‌گردد[۱]. اگر تقارن کامل باشد، تمامی باریونهای هشت گانه دارای جرم یکسان خواهند بود. اما همان طور که می‌دانیم، تقارن کامل نیست. علت آن است که کوارک $s$ سنگینتر از کوارکهای $u$ و $d$ است. از طرفی می‌دانیم که گونه‌های $\Sigma$ و $\Delta$ جرم تقریباً مشابه دارند و جرم باریونهای $\Delta$ به جرم پروتون نزدیکتر است.

برهم‌کنش اسپین – اسپین ( ساختار فوق ریز) در محاسبهٔ جرم باریونها از اهمیت بالایی برخوردار است که سهم آن در محاسبهٔ جرم باریونها مطابق زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\mathrm{M}(baryon) = m_۱ + m_۲ + m_۳ + A'\left[\frac{\vec{s}_۱.\vec{s}_۲}{m_۱ m_۲} + \frac{\vec{s}_۱.\vec{s}_۳}{m_۱ m_۳} + \frac{\vec{s}_۲.\vec{s}_۳}{m_۲ m_۳}\right], \qquad (۱)$$

که با استفاده از یک پردازش مناسب، $A' = ۵۰\,\frac{\mathrm{MeV}}{c^۲}$ به‌دست آمده است.

در مدل دیگری که توسط دالیتز در سال ۱۹۶۷ و با اندکی تغییر و تکامل توسط فاینمن در سال ۱۹۶۸ ارائه شده، سه ذره متحرک، و با برهم‌کنش نوسانی در نظر گرفته می‌شوند. در نتیجه هامیلتونی متناظر عبارت است از[۲ و ۳]

$$H = \sum_{i=۱}^{۳}\left(m_i + \frac{\vec{p}_i^{\,۲}}{۲m_i}\right) + \frac{۱}{۲}\sum_{i,j} V\left(\vec{r}_{ij}\right) \qquad (۲)$$

که در آن $V\left(\vec{r}_{ij}\right) = \frac{k}{۲} r_{ij}^۲$ و $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ فاصلهٔ نسبی ذرات

است. با معرفی مختصات ژاکوبی[۴ و ۵ و ۶] و در نظر نگرفتن جرم سکون ذرات، هامیلتونی به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$H_0^{\text{int}} = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{3k}{2}\rho^2 + \frac{p_\lambda^2}{2m} + \frac{3k}{2}\lambda^2. \qquad (۳)$$

که معرف دو نوسانگر جداگانه با بسامد نوسان $\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ است وانرژی کل سیستم نیز از رابطهٔ $E_N = E_0 + N\omega_0$ به‌دست می‌آید که $E_0$ انرژی حالت پایه، $N = N_\rho + N_\lambda$ و $N_{\rho,\lambda} = 0,1,2,...$ است. [۲ و ۳]. اندازهٔ حرکت زاویه‌ای کل نیز $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ است که $\vec{S} = \sum \vec{s}_i$ و $\vec{L} = \vec{L}_\rho + \vec{L}_\lambda$. در این حالت پاریته نیز از رابطهٔ $P = (-1)^{l_\rho + l_\lambda}$ به‌دست می‌آید. فرکانس $\omega_0$ از اختلاف جرمهای تجربی $N^*$ به حالت پایینترین پاریتهٔ منفی و مقایسهٔ آن با جرم متوسط نوکلئون و $\Delta = (1232)$ به دست می‌آید. پوستهٔ $P$ ، چندین حالت $N^*$ با متوسط جرم $\bar{M}^* = 1/6\,\text{GeV}$ را نشان می‌دهد که دارای اسپینهای $\frac{1}{2}^-$، $\frac{3}{2}^-$، $\frac{5}{2}^-$ هستند. برای نوکلئون و $\Delta$ داریم $\bar{M} = \frac{1}{2}(M_N + M_\Delta) = 1/1\,\text{GeV}$، $\omega_0 = \bar{M}^* - \bar{M} = 0/5\,\text{MeV}$ و تابع موج سیستم نیز به صورت $\Psi_0 = \left(\frac{m\omega_0}{\pi}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m\omega_0}{2}\left(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2\right)\right]$ است[۷]. پس از آن مدلی توسط گروه $RGG$ در سال ۱۹۷۵ ارائه شد[۸] که بر فرضیات زیر بنا شده بود: اول آنکه بررسی در حالت غیر نسبیتی است و تقارن طعم – اسپینی $SU(6)$ وجود دارد. دوم آن که همانند طعم، انشعاب فقط از طریق جرم کوارکها اتفاق بیفتد. سوم آنکه وجود نیروهای نگهدارنده با برد زیاد مستقل از طعم واسپین باشد و در نهایت فرض شده بود برهم‌کنشهای وابسته به طعم و اسپین با برد کم تنها باشی از مبادله یک گلوئون بین کوارکها می‌باشند. برهم‌کنش فوق ریز به صورت زیر به صورت زیر در نظر گرفته شده بود[۸]

$$V_{ij} = -\frac{2\alpha_s}{3r} + \frac{\alpha_s}{3m_i m_j}\left[\frac{\vec{P}_i.\vec{P}_j}{r} + \frac{\left(\vec{r}.\vec{P}_i\right)\left(\vec{r}.\vec{P}_j\right)}{r^3}\right]$$
$$+\frac{\pi\alpha_s}{3}\delta^3(\vec{r})\left(\frac{1}{m_i^2} + \frac{1}{m_j^2}\right)$$
$$+\frac{\alpha_s}{3m_i m_j}\left[\frac{8\pi}{3}\delta^3(\vec{r})\vec{s}_i.\vec{s}_j + \frac{3\left(\vec{s}_i.\hat{r}\right)\left(\vec{s}_j.\hat{r}\right) - \vec{s}_i.\vec{s}_j}{r^3}\right]$$
$$+\frac{\alpha_s}{r^3}\left[\frac{\vec{r}\times\vec{P}_i.\vec{s}_i}{m_i^2} - \frac{\vec{r}\times\vec{P}_j.\vec{s}_j}{m_j^2} + \frac{2}{m_i m_j}\left(\vec{r}\times\vec{P}_i.\vec{s}_j - \vec{r}\times\vec{P}_j.\vec{s}_i\right)\right]. \qquad (۴)$$

در چنین حالتی برای جرم باریونها داریم

$$M_B = M_0 + \frac{16\pi}{9m^2}\alpha_s \left\langle \Psi_B \left| \sum_{i<j} \delta^3\left(\vec{r}_{ij}\right)\vec{s}_i.\vec{s}_j \right| \Psi_B \right\rangle, \qquad (۵)$$

و در چنین وضعیتی تفاضل جرم نوکلئون و ذرهٔ دلتا عبارت است از

$$M_\Delta - M_N = \frac{4}{3}\alpha_s\omega_0\left(\frac{\omega_0}{2\pi m}\right)^{1/2} \qquad (۶)$$

اکنون مدل ارائه شده توسط اسکور- کارل را در نظر می‌گیریم[۹]. در این مدل هامیلتونی سیستم به صورت زیر معرفی می‌شود

$$H = \sum_{i=1}^{3}\left(m_i + \frac{\vec{P}_i^2}{2m_i}\right) + \frac{k}{2}\sum_{i<j}\vec{r}_{ij}^2 + \sum_{i<j}\left(U\left(\vec{r}_{ij}\right) + V_{ij}^{hyp}\right), \qquad (۷)$$

که در آن

$$V_{ij}^{hyp} = \frac{2\alpha_s}{3m_i m_j}\left[\frac{8\pi}{3}\delta^3(\vec{r})\vec{s}_i.\vec{s}_j + \frac{3\left(\vec{s}_i.\hat{r}\right)\left(\vec{s}_j.\hat{r}\right) - \vec{s}_i.\vec{s}_j}{r^3}\right], \qquad (۸)$$

رمز موفقیت پدیدار شناسی مدل اسکور- کارل در این است که برهم‌کنش اسپین – مدار حذف و تنها جملات اسپین –اسپین باقی می‌مانند. هنگامی که اندازه حرکت زاویه ای صفر است تنها برهم‌کنش اسپین – اسپین در زوج کوارکها باقی می‌ماند و جملهٔ تانسوری موقعی عمل می‌کند که اندازه حرکت زاویه‌ای زوج کوارک غیر صفر باشد. در این حالت به ازای $N = 2$ در ساختار $su(3)$ واگنی پنج گانه وجود دارد. حذف جملهٔ برهم‌کنش اسپین –مدار، در واقع، باعث می‌شود که طیف تشدید باریونها تاحد معینی به نتایج تجربی نزدیکتر شود. با وجود آن که مدل اسکور–کارل به نحو مطلوبی طیف باریونها را به صورت نظاممند توصیف می‌کند، استثنائات قابل توجهی نیز وجود دارند. از طرفی نباید فراموش کنیم که قسمت پدیدار شناختی مربوط به مدل اسکور–کارل مربوط به باریونهای فاقد کوارک $s$ می‌باشد و این نتایج از نتایج پراکندگی پایون –

نوکلئون به همراه نتایج حاصل از بررسی ویژگیهای ذرات تولید شده در این پراکندگی به‌دست می‌آید. مدل اسکور-کارل حالتهای بیشتری را نسبت به آن چه که واقعاً مشاهده می‌شوند، پیش بینی می‌کند.

## ۲. حل دقیق معادلهٔ شرودینگر شعاعی برای تعیین جرم باریونها

با استفاده از مختصات فوق کروی ، عملگر انرژی جنبشی برای یک مجموعه سه جسمی به صورت زیر نوشته می‌شود ($\hbar = c = 1$) [۱۳].

$$-\frac{1}{2m}\left(\Delta_\rho+\Delta_\lambda\right) = -\frac{1}{2m}\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{5}{x}\frac{d}{dx}-\frac{L^2\left(\Omega_\rho,\Omega_\lambda,\xi\right)}{x^2}\right). \qquad (۹)$$

ویژه توابع $L^2$ همان هماهنگهای فوق کروی، و به صورت زیر می‌باشند

$$L^2\left(\Omega_\rho,\Omega_\lambda,\xi\right)Y_{[\gamma],l_\rho,l_\lambda}\left(\Omega_\rho,\Omega_\lambda,\xi\right) = \gamma\left(\gamma+4\right)Y_{[\gamma],l_\rho,l_\lambda}\left(\Omega_\rho,\Omega_\lambda,\xi\right). \qquad (۱۰)$$

ویژه مقدار اندازه حرکت زاویه‌ای بزرگ $\gamma$ نیز به صورت $\gamma = 2n+l_\rho+l_\lambda$ می‌باشد که $n=0,1,\ldots$. ضمن آنکه $l_\rho$و $l_\lambda$ اندازهٔ حرکت متناظر با کمیتهای $\vec{\rho}$و $\vec{\lambda}$ می‌باشند. از طرفی هر حالت سه جسمی می‌تواند برحسب هماهنگهای فوق کروی بسط داده شود

$$\Psi\left(\vec{\rho},\vec{\lambda}\right)=\sum_{\gamma,l_\rho,l_\lambda} N_\gamma\psi_{\upsilon,\gamma}\left(x\right)Y_{[\gamma],l_\rho,l_\lambda}\left(\Omega_\rho,\Omega_\lambda,\xi\right). \qquad (۱۱)$$

تابع موج فوق شعاعی $\psi_{\upsilon,\gamma}\left(x\right)$ جوابی از معادلهٔ شعاعی شرودینگر زیر است

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{5}{x}\frac{d}{dx}-\frac{\gamma\left(\gamma+4\right)}{x^2}\right)\psi_{\upsilon,\gamma}\left(x\right) = -2m\left[E-v\left(x\right)\right]\psi_{\upsilon,\gamma}\left(x\right). \qquad (۱۲)$$

اکنون در صدد آن هستیم که معادله شرودینگر فوق شعاعی را برای پتانسیل برهم‌کنش سه جسمی حل کنیم. به این منظور، تبدیل زیر را در نظر می‌گیریم

$$\psi_{\upsilon\gamma}(x)=x^{\frac{-5}{2}}\varphi_{\upsilon\gamma}(x), \qquad (۱۳)$$

پس از محاسبات طولانی به ازای $v=0$ ویژه مقادیر و ویژه توابع مطابق زیر به دست می‌آیند[۱۰]

$$E_{0\gamma}=(2\gamma+6)\frac{\omega}{2}-\frac{2mc^2}{(2\gamma+5)^2}, \qquad (۱۴)$$

$$\psi_{0\gamma} = N_\gamma x^{-\frac{(5)}{2}}\varphi_{0\gamma} = N_\gamma x^\gamma\exp\left(-\frac{m\omega}{2}x^2-\frac{2mc}{(2\gamma+5)}x\right), \qquad (۱۵)$$

و ویژه مقادیر و ویژه توابع به ازا ی ($\upsilon=1$)به صورت زیر خواهند شد[۱۰].

$$E_{1\gamma}=(2\gamma+8)\frac{\omega}{2}-\frac{b^2}{2m\omega}, \qquad (۱۶)$$

$$\psi_{1\gamma}(x)=N_\gamma(x-\alpha_1^1)x^\gamma\times\exp\left[-\frac{m\omega}{2}x^2-\frac{b}{\omega}x\right]. \qquad (۱۷)$$

بنابراین انرژی هر باریون با رابطه به دست آمده برای $E_{\upsilon,\gamma}$ داده می‌شود که تابعی از $a,b,m_q$ است. در این مرحله پتانسیل متناظر با برهم‌کنشهای فوق ریز $\langle H_{in}\rangle$ را به عنوان اختلال در نظر می‌گیریم[۱۲]. تابع موج مختل شده $\psi_\gamma(x)$ برای کلیه حالتها، می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\psi_{\upsilon,\gamma}=\psi'_{\upsilon,\gamma}+\sum_{\gamma'\neq\gamma}\frac{\left\langle\psi^0_{\upsilon,\gamma'}\left|H_{\mathrm{in}}\right|\psi^0_{\upsilon,\gamma'}\right\rangle\psi'^0_{\upsilon,\gamma'}}{E^0_{\upsilon,\gamma}-E^0_{\upsilon,\gamma'}}, \qquad (۱۸)$$

و سهم پتانسیل برهم‌کنشهای فوق ریز نیز با استفاده از رابطهٔ

$$\left\langle H_{in}\right\rangle=\frac{\int\psi_{\upsilon,\gamma}H_{in}\psi_{\upsilon,\gamma}x^5dxd\Omega_\rho d\Omega_\lambda}{\int\psi_{\upsilon,\gamma}\psi_{\upsilon,\gamma}x^5dxd\Omega_\rho d\Omega_\lambda},$$

به‌دست می‌آید. البته به کمک همین روش می‌توان برای مراتب بالاتر نیز این سهم انرژی را محاسبه نمود. اکنون جرم باریون را به صورت زیر می‌نویسیم[۱۱]

$$M_{baryon}=m_{q_1}+m_{q_2}+m_{q_3}+E_{\upsilon,\gamma}+<H_{in}>. \qquad (۱۹)$$

این وابستگی برای مدل کوارکهای تشکیل دهنده به جرم کوارک $m_q$ و ضرایب پتانسیل $a$ و $b$ وابسته است. $\gamma$ اندازهٔ حرکت زاویه‌ای و $\upsilon$ شماره‌گر تابع موج شعاعی $\psi_{\upsilon,\gamma}(x)$ است. جرمهای در نظر گرفته شده برای کوارکها عبارتند از: $m_d=360(\mathrm{MeV})$، $m_u=257(\mathrm{MeV})$ و $m_s=501/5(\mathrm{MeV})$.

**جدول ۱.** جرمهای تجربی و نظری خانواده $N$.

| $Theory$(MeV) | $\langle H_{\text{int}} \rangle$ (MeV) | $E_{\upsilon\gamma}$(MeV) | $\upsilon$ $\gamma$ | $I\left(j^{p}\right)$ | $Baryon$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۹۳۵/۷۹ | −۸۰/۰۹ | ۱۲۸/۸۸ | ۰ ۰ | $\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}^{+}\right)$ | $N(۹۳۸)$ |
| ۱۴۳۶/۶۷ | ۷۹/۶۷ | ۳۷۴ | ۰ ۱ | $\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}^{+}\right)$ | $N\left(۱۴۴۰^{+۳۰}_{-۱۰}\right)$ |
| ۱۵۲۸/۱۱ | ۱۵۹/۶۷ | ۳۷۴ | ۰ ۱ | $\frac{۱}{۲}\left(\frac{۳}{۲}^{-}\right)$ | $N\left(۱۵۲۰^{+۱۰}_{-۵}\right)$ |
| ۱۵۲۸/۱۱ | ۱۷۱/۱۱ | ۳۷۴ | ۰ ۱ | $\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}^{-}\right)$ | $N\left(۱۵۳۵^{+۲۰}_{-۱۵}\right)$ |

**جدول۲.** جرمهای تجربی و نظری خانواده $\Delta$.

| $Theory$(MeV) | $\langle H_{\text{int}} \rangle$ (MeV) | $E_{\upsilon\gamma}$(MeV) | $\upsilon$ $\gamma$ | $I\left(j^{p}\right)$ | $Baryon$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱۲۰۰/۱۴ | +۱۳۳/۲۹ | ۲۹۵/۸۵ | ۰ ۰ | $\frac{۳}{۲}\left(\frac{۳}{۲}^{+}\right)$ | $\Delta\left(۱۲۳۲^{+۲}_{-۲}\right)$ |
| ۱۵۰۷/۳۱ | ۱۹۸/۳۹ | ۳۲۵/۹۲ | ۰ ۰ | $\frac{۳}{۲}\left(\frac{۳}{۲}^{+}\right)$ | $\Delta(۱۶۰۰\pm۵۰)$ |
| ۱۵۴۸/۸ | ۱۷۱/۸ | ۳۹۴ | ۰ ۱ | $\frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۲}^{-}\right)$ | $\Delta\left(۱۶۲۰^{+۵۵}_{-۵}\right)$ |

برای آنکه ضرایب پتانسیل را بهدست آوریم، از اطلاعات مربوط به باریونهای $\Lambda$ و $\Delta$ استفاده کردهایم که هم بردهای کوتاه و هم بردهای بلند را شامل میشوند. برای این منظور $\Lambda(۱۲۳۲)$ و $\Delta(۱۶۷۲)$ به عنوان ورودی برای تعیین ضرایب پتانسیل $a$ ، $b$ و $c$ به کار برده شدهاند. در این حالت $\omega = ۰/۵۳۲, c = ۲/۴۶$ و $a = \frac{۱}{۲} m_q \omega^{۲} = ۰/۱۴ m_q$ و $b = \frac{۲ m_q c\omega}{(۲\gamma + ۵)} = \frac{۲/۶۲ m_q}{(۲\gamma + ۵)}$ میباشند. مقادیر نظری و تجربی جرم باریونها بر اساس این مدل و با منظور کردن اثرات فوق ریز در جداول ۱ و ۲ ذکر شدهاند.

## ۳. بحث و نتیجهگیری

تلاشهای نظری بسیاری برای محاسبه جرم باریونها در حضور یک پتانسیل نگهدارنده صورت گرفته است و اغلب طیف باریونی توسط مدلهای کوارکی سازنده مختلف $(CQM)$ توصیف میشود. با این وجود، درستی مدل کوارکی سازنده $(CQM)$ در توصیف جرمهای هادرونها بحث برانگیز است، اگرچه در محدودهای که این مدل معتبر است استفاده از آن به نتایج قابل قبولی منجر میشود. ویژگی برجستهٔ مدل ارائه شده در این مقاله این است که پتانسیل نگهدارنده، نه تنها از یک جمله نگهدارنده با برد بلند، بلکه از جملهٔ کوتاه برد دیگری، که یک پتانسیل کولنی است و به بارنگ بستگی دارد، تشکیل میشود. از طرفی، پتانسیلهای بین کوارکی به طعم بستگی دارند و شامل جملات وابسته به اسپین $H_S(x)$، ایزواسپین $H_I(x)$ و اسپین-ایزواسپین $H_{SI}(x)$ میباشند که از اهمیت بالایی برخوردار هستند. در این مقاله اثرات این جملات در چارچوب مدل ارائه شده محاسبه شدهاند.

## مراجع


1. A B Volkov, *NUCL. Phys*. **74**(1965) 33.
2. R P Feynman, *Phys. Rev. Lett*. **23**(1969) 1415.
3. R P Feyman, Photon-Hadron Interactions, Benjamin, Reading (1972).
4. A J Dragt, *J. Math. Phys*. **6**(1965) 533.
5. J L Ballot, J S Levinger, and M Fabre De La Ripelle, *Phys. Rev*. C(1982) 2301.
6. T K Schnider, *Phy. Lett.* B **40**(1972)439.
7. A W Thomas, W Weise, The Structure of the Nucleon, WILEY-VCH (2003).
8. A deRujula, H Georgi and S L Glashow, *Phys. Rev*. D **12**(1975)147.
9. N Isgur and G Karl, *Phys. Rev*. D **18** (1978) 4187.
10. H Hassanabadi, A A Rajabi, *Few Body Systems*, **41** (2007) 1.
11. H Hassanabadi, A A Rajabi, Proceeding of the 13th International Conference, Foundations and Advances in Nonlinear Science, Minsk, September 25-28 (2006).
12. M M Giannini, E Santopinto and A Vassalo, *Progress in Particle and Nuclear Physics* **50** (2003) 263-270.
13. M Fabre, Fabre De la Ripelle *Nuclear Physics* A **497** (1989) 595c-602c.