یادداشت پژوهشی

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۹، شمارهٔ ۴، زمستان ۱۳۸۸

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران

جوابهاي وابسته به زمان معادلات فوكر- پلانك غير خطي مربوط به توابع دلخواه از آنتروپي تساليس

فردوس رضائي حسين آبادي و بهروز ميرزا

دانشكدهٔ فيزيك، دانشگاه صنعتي اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۸۶/۱۲/۲۷ ؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۸۸/۶/۱۰)

چكيده

معادلات فوكر- پلانك غير خطي ميتوانند به آنتروپيهاي تعميم يافته مربوط شوند. حل ماناي معادلات فوكر- پلانك وابسته به آنتروپيهايي كه به شكل تابع كلي از آنتروپي تساليس هستند را به دست ميآوريم. حل وابسته به زمان اين معادلات نيز براي نيروي رانشي خطي تعيين شده است.

واژههاي كليدي: معادلات فوكر - پلانك غير خطي، آنتروپيهاي تعميم يافته، مكانيك آماري غير فزونور

۱. مقدمه

مکانیک آماری بولتزمن-گیبس به عنوان یک نظریهٔ موفق فیزیکی، فیزیکدانان را قادر به طرح مدلهای نظری میکروسکوپی برای توصیف سیستمهای ترمودینامیکی نمود. آنتروپی بولتزمن-گیبس به صورت زیر تعریف میشود.

$$S_{BG}(p) = -k\sum_{i} p_i \ln p_i \ , \qquad (۱)$$

که در آن p_i احتمال اشغال میکروحالت i توسط سیستم است و k ثابت بولتزمن میباشد. اما این آنتروپی تنها برای سیستمهایی با برهمکنشهای کوتاه برد، فرآیندهای مارکوین و در واقع سیستمهایی که فضای فاز آنها ارگودیک باشد، مناسب است. آنتروپی بولتزمن- گیبس برای توصیف سیستمهای فیزیکی در حالت تعادل مناسب است، ولی برای حالتهای خارج از تعادل حرفی نمیتوان زد. یکی از مهمترین معادلات پدیده شناختی مکانیک آماری در حالتهای غیر تعادلی معادلهٔ خطی فوکر- پلانک است. چنانچه این معادله را در ارتباط با آنتروپی بولتزمن- گیبس قرار دهیم تحول زمانی آن وابستگی زمانی تابع توزیع احتمال را برای سیستم داده شده در حضور پتانسیل خارجی نشان میدهد. در سالهای اخیر سیستمهایی نیز شناخته شدند که از آمار BG پیروی نمیکنند، که از آن جمله میتوان به سیستمهای بلند برد، غیر خطی و دارای حافظه بلند مدت اشاره نمود. در این شرایط آنتروپی تسالیس $S_T^q(p)$ پیشنهاد شد. آنتروپی تسالیس در حد $q \to ۱$ به آنتروپی بولتزمن- گیبس تبدیل میشود[۱]

$$S_T^q(p) = k\,\frac{۱-\sum_{i} {p_i}^q}{q-۱}\ . \qquad (۲)$$

متناظر با تعمیم مکانیک آماری استاندارد و آنتروپی بولتزمن- گیبس معادلات فوکر- پلانک غیر خطی را به عنوان تعمیم سادهای از معادلات فوکر- پلانک خطی در نظر میگیریم.

معادلات فوکر- پلانک غیرخطی برای هر سیستم به گونهای نوشته میشوند که جواب مانای آنها همان توزیع احتمال

آنتروپی مربوط به آن سیستم باشد [۲،۳،۴]. برای توصیف سیستم‌های خارج ازحالت تعادل به حل وابسته به زمان این معادلات غیر خطی نیاز داریم.

پلاستینو در ۱۹۹۵[۵] و فرانک و دافرت شافر در۱۹۹۹[۴] حل وابسته به زمان معادلات فوکر- پلانک غیر خطی مربوط به تعدادی آنتروپی را در یک آنسامبل کانونیک و در حضور پتانسیل خارجی به دست آوردند. در این مقاله نشان می‌دهیم این روش برای دستهٔ نسبتاً بزرگی از آنتروپی‌ها که تابع آنتروپی تسالیس هستند کارآمد خواهد بود. رفتار سیستم‌هایی که توسط این آنتروپی‌ها توصیف می‌شوند، در حالت‌های تعادلی و غیر تعادلی به کمک جواب‌های مانا و گذرای معادلات فوکر- پلانک غیر خطی روشن می‌شود.

در بخش دوم معادلهٔ فوکر- پلانک وابسته به یک آنتروپی در شکل کلی را به روشی که در[۶] آورده شده به دست می‌آوریم. در بخش سوم روش فرانک را برای آنتروپی‌هایی که تابعی از آنتروپی تسالیس باشند تعمیم می‌دهیم. معادلهٔ فوکر- پلانک مربوط به آنتروپی $S=f\left(S_T^q\right)$ را به دست می‌آوریم و پاسخ مانای آن را محاسبه می‌کنیم. سپس با این رویکرد دو آنتروپی خاص را مورد بررسی قرار می‌دهیم . در بخش چهارم معادلهٔ فوکر- پلانک را در حالت وابسته به زمان مورد بررسی قرار خواهیم داد و نهایتاً در قسمت آخر نتیجه گیری خواهیم کرد.

۲. آنتروپی‌های تعمیم یافته و معادلات فوکر-پلانك وابسته

به منظور ساده سازی خود را به یک بعد محدود می‌کنیم. تعمیم به N بعد نیز امکانپذیر خواهد بود.

آنتروپی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$S[p]=\Lambda\left(Q[p]\right), \tag{۳}$$

به طوری که Λ تابعی خوش تعریف و دلخواه بوده و $Q(p)$ نیز با معادلهٔ زیر مشخص می‌شود.

$$Q[p]=\int_{-\infty}^{\infty}dx\ g\left[p(x,t)\right] \tag{۴}$$

و $g(p)$ تابعی خوش تعریف از p است که حداقل دو بار مشتق پذیر باشد.

حالت‌های با احتمال صفر نباید در آنتروپی تأثیر داشته باشند، همچنین سیستم‌های طبیعی شامل تعداد زیادی حالت‌های میکروسکوپی هستند، بنابراین حالتی با احتمال یک نیز نمی‌تواند در آنتروپی مؤثر باشد، بنابراین:

$$g(0)=g(1)=0, \tag{۵}$$

مقعر بودن یکی از شرایط عمومی آنتروپی‌ها است. به همین منظور آنتروپی باید شرط زیر را داشته باشد[۳].

$$\frac{d^2g}{dp^2}\le 0\ . \tag{۶}$$

معادلهٔ فوکر- پلانک غیر خطی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(F\psi(p)\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\Omega\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}\right), \tag{۷}$$

که در آن $F(x)=-\frac{d\Phi}{dx}$ نیروی خارجی وارد بر سیستم ناشی از پتانسیل Φ است. Ψ و Ω توابعی از p هستند. معادلهٔ (۹) توسط رابطهٔ زیر به آنتروپی مرتبط می‌شود. در واقع نسبت $\frac{\Omega}{\Psi}$ را به گونه‌ای بر می‌گزینیم که حل مانای معادلهٔ (۷) همان تابع توزیع آنتروپی باشد.

$$-\frac{1}{\beta}\frac{\partial\Lambda[Q]}{\partial[Q]}\frac{d^2g}{dp^2}=\frac{\Omega[p]}{\Psi[p]}, \tag{۸}$$

β معرف عکس دما است. برای نیروی خطی $F(x)=-\gamma x$ و با انتخاب $\Psi[p]=p$ معادلهٔ فوکر -پلانک (۷) به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=\gamma\frac{\partial}{\partial x}(xp)-\frac{1}{\beta}\frac{\partial\Lambda[Q]}{\partial[Q]}\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{d^2g}{dp^2}\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{۹}$$

در منابع مختلف به روش‌های متفاوت به معادلهٔ فوکر -پلانک وابسته به آنتروپی‌ها پرداخته شده است. توضیح جامع و کاملی را در ارتباط با مباحث بالا می‌توان در [۳] یافت.

در این قسمت چگونگی به دست آوردن تابع توزیع آنتروپی معادلهٔ (۳) بیان می‌شود.[۷] تابع توزیع احتمال p با بیشینه کردن آنتروپی در یک آنسامبل کانونیک به دست می‌آید. بنابراین در یک آنسامبل کانونیک با قید ثابت بودن تعداد ذرات و انرژی کل داریم:

$$\frac{dS[p]}{dp}=\beta\left(\Phi-\mu\right), \tag{۱۰}$$

Φ پتانسیل خارجی، μ پتانسیل شیمیایی سیستم و β ضریب

لاگرانژ وابسته است.

با توجه به شکل آنتروپی در معادلهٔ (۳) داریم:

$$\frac{d\Lambda}{dQ}\Big|_{Q_{st}}\frac{dg}{dp}\Big|_{p_{st}}=\beta\left(\Phi-\mu\right), \qquad (۱۱)$$

p_{st} و Q_{st} نشان دهندهٔ مقادیر این کمیت‌ها در حالت تعادل و بیشینهٔ آنتروپی هستند. تابع $h\left(p_{st}\right)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h\left(p_{st}\right)=\frac{dg}{dp}\Big|_{p_{st}}, \qquad (۱۲)$$

بنابراین

$$h\left(p_{st}\right)=\frac{\beta\left(\Phi-\mu\right)}{\frac{d\Lambda}{dQ}\Big|_{Q_{st}}}, \qquad (۱۳)$$

به کمک وارون تابع h، یعنی h^{-1} می‌توان کمیت p_{st} را به دست آورد.

$$p_{st}=h^{-1}\left(\frac{\beta\left(\Phi-\mu\right)}{\frac{d\Lambda}{dQ}\Big|_{Q_{st}}}\right), \qquad (۱۴)$$

p_{st} نشان دهندهٔ تابع توزیع آنتروپی تعمیم یافته است.

۳. حل مانای معادلات فوکر-پلانک غیر خطی

در این قسمت به مطالعهٔ معادلات فوکر- پلانک غیر خطی وابسته به گروهی از آنتروپی‌های تعمیم یافته می‌پردازیم. پاسخ مانای این معادلات برای آنتروپی تسالیس، رنی و شارما میتال قبلاً بررسی شده است.[۴] در این جا روش فرانک را برای دستهٔ بزرگی از آنتروپی‌ها به کار می‌بریم. نشان می‌دهیم تمامی آنتروپی‌هایی که تابعی از آنتروپی تسالیس باشند می‌توانند توسط چنین پاسخ‌هایی توصیف شوند. به این منظور لازم است ابتدا روش فرانک را در مورد آنتروپی تسالیس مرور کنیم. شکل انتگرالی آنتروپی تسالیس به صورت زیر است.

$$S_T^q\left(p\right)=\int\frac{\left(p-p^q\right)}{q-1}\,dx \qquad (۱۵)$$

با توجه به معادلات (۳) تا (۶) روابط زیر به دست می‌آید.

$$\Lambda\left(Q[p]\right)=Q[p] \quad , \quad \frac{d\Lambda}{dQ}=1 \qquad (۱۶)$$

$$g\left(p\right)=\frac{p-p^q}{q-1} \quad , \quad \frac{d^2g}{dp^2}=-qp^{q-2}<0 \qquad (۱۷)$$

با در نظر گرفتن نیروی رانشی خطی و جایگزینی مقادیر فوق در معادلهٔ (۹) داریم:

$$\frac{\partial p\left(x,t\right)}{\partial t}=\gamma\frac{\partial}{\partial x}\left(xp\right)+\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left(qp^{q-1}\frac{\partial p}{\partial x}\right), \qquad (۱۸)$$

جواب مانای معادلهٔ (۱۸) تابع توزیع تسالیس است. به جای حل مستقیم معادله از روابط (۱۳) و (۱۴) برای به دست آوردن تابع توزیع استفاده می‌کنیم. در این جا h به کمک معادلهٔ (۱۲) با رابطهٔ زیر مشخص می‌شود.

$$h\left(p_{st}\right)=\frac{1-q\left(p_{st}\right)^{q-1}}{q-1}, \qquad (۱۹)$$

$$h^{-1}\left(p_{st}\right)=\left[\frac{1+\left(1-q\right)p}{q}\right]^{\frac{1}{q-1}}. \qquad (۲۰)$$

بنابراین با استفاده از معادلهٔ (۱۴) داریم:

$$p_{st}=\left[\left\{\frac{1+\beta\left(1-q\right)\left(\Phi-\mu\right)}{q}\right\}_+\right]^{\frac{1}{q-1}}. \qquad (۲۱)$$

منظور از $\{...\}_+$ این است که پاسخ تنها در مواردی که کمیت داخل { } مثبت باشد، معتبر خواهد بود. برای نیروی خطی $F\left(x\right)=-\gamma x$ پتانسیل Φ به شکل زیر است.

$$\Phi=\frac{\gamma}{2}x^2. \qquad (۲۲)$$

معادلهٔ فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$p_{st}=D_{st}\left[\left\{1-\frac{b\left(q-1\right)}{D_{st}^{\,q-1}}x^2\right\}_+\right]^{\frac{1}{q-1}}, \qquad (۲۳)$$

که در آن b و ضریب بهنجارش D_{st} در حالت مانا به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$b=\frac{\beta\gamma}{2q}, \qquad D_{st}=\left[\left(1-\beta(1-q)\mu\right)\Big/q\right]^{\frac{1}{1-q}}. \qquad (۲۴)$$

اکنون به مطالعهٔ حالت عمومی‌تری می‌پردازیم که در آن شکل آنتروپی به صورت تابعی از آنتروپی تسالیس باشد.

آنتروپی را به صورت $S=f\left(S_T^q\right)$ تعریف می‌کنیم که در آن f تابعی دلخواه و مشتق پذیر است. تابع توزیع را به کمک رابطهٔ (۱۰) به دست می‌آوریم.

جدول ۱. تعاریف z_q و z_{qq} .

$$z_q = \frac{1}{\sqrt{|1-q|}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\{1+\mathrm{sgn}(1-q)\, y^2\}_+\right)^{\frac{1}{q-1}} dy \quad q \rangle 0, \quad q \neq 1$$

$$z_{qq} = \frac{1}{\sqrt{|1-q|}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\{1+\mathrm{sgn}(1-q)\, y^2\}_+\right)^{\frac{q}{q-1}} dy \quad q \rangle \frac{1}{3}, \quad q \neq 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=S_T^q} \frac{\partial\ S_T^q}{\partial p}\Big|_{p_{st}} = \beta(\Phi-\mu)\,. \qquad (۲۵)$$

تابعی به نام U را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$U = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=S_T^q}}\,, \qquad (۲۶)$$

بنابراین معادلهٔ (۲۵) را می‌توان به صورت زیر باز نویسی کرد.

$$\frac{\partial\ S_T^q}{\partial p}\Big|_{p_{st}} = \beta U(\Phi-\mu)\,. \qquad (۲۷)$$

با مقایسهٔ روابط (۱۰) و (۲۷) و به کمک معادلهٔ (۲۴) در می‌یابیم با تغییر b به bU در معادلهٔ (۲۳) می‌توان تابع توزیع این آنتروپی کلی را به دست آورد. بنابراین تابع توزیع این شکل کلی آنتروپی به صورت زیر خواهد بود.

$$p_{st} = \left(\{1-\frac{bU_{st}}{{D_{st}}^{q-1}}(q-1)x^2\}_+\right)^{\frac{1}{q-1}} D_{st}\,. \qquad (۲۸)$$

توابع b ، U_{st} و D_{st} مثبت هستند. باید توجه داشت که برای مقادیر $q \rangle 1$، تابع توزیع در $x = \left(\frac{{D_{st}}^{q-1}}{bU_{st}(q-1)}\right)^{\frac{1}{2}}$ بریدگی خواهد داشت. برای کامل شدن حل کافی است تابع U_{st} و ضریب بهنجارش D_{st} در ارتباط با هر تابع خاص $f(x)$ در رابطهٔ $S=f\left(S_T^q\right)$ تعیین شوند.

اگر در معادلهٔ (۱۸)، β با βU جایگزین شود، حل آن در حالت تعادل همان تابع توزیع آنتروپی فوق می‌باشد. معادلهٔ فوکر- پلانک متناظر به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial x}(xp) + \frac{q}{\beta U}\frac{\partial}{\partial x}\left(p^{q-1}\frac{\partial p}{\partial x}\right) \qquad (۲۹)$$

برای نمونه دو آنتروپی را که توابعی از آنتروپی تسالیس هستند، بررسی می‌کنیم و حل مانای معادلهٔ فوکر- پلانک آنها را با محاسبهٔ U_{st} و D_{st} کامل می‌کنیم.

الف) ابتدا به آنتروپی رنی که توسط رابطهٔ زیر تعریف می‌شود، می‌پردازیم.

$$S_R^q(p) = \frac{1}{1-q}\ln\int dx\ \ p^q\ \ , \qquad (۳۰)$$

$$S_R^q(p) = f\left(S_T^q\right) = \frac{1}{1-q}\ln\left(1+(1-q)S_T^q\right). \qquad (۳۱)$$

بنابراین مطابق تعریف U در معادلهٔ (۲۶) داریم.

$$U = 1+(1-q)S_T^q = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \ p^q \qquad (۳۲)$$

شرط بهنجارش برای تابع توزیع معادلهٔ (۲۸) به کمک معادلهٔ زیر کاملاً شبیه تعریف تابع z_q در جدول ۱ می‌شود.

$$\frac{\mathrm{sgn}(1-q)\ \ |1-q|\ \ \beta U x^2}{D^{q-1}} = \mathrm{sgn}(1-q)\, y^2\,, \qquad (۳۳)$$

بنابراین داریم:

$$U_{st} = \frac{{D_{st}}^{q+1}}{b} z_q^2\,, \qquad (۳۴)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \ p(x) = 1\,.$$

تقریباً مشابه بالا ولی به کمک تعریف تابع z_{qq} از جدول ۱ معادلهٔ زیر را به دست می‌آوریم.

$$U_{st} = {D_{st}}^q \sqrt{\frac{{D_{st}}^{q-1}}{bU_{st}}}\, z_{qq}\ \ , \qquad (۳۵)$$

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \ p^q\,.$$

رابطهٔ (۳۴) را در طرفین رابطهٔ (۳۵) جایگزین می‌کنیم و به دست می‌آوریم:

$$D_{st} = \left(\frac{bz_{qq}}{{z_q}^3}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۳۶)$$

بدین ترتیب کمیت‌های U_{st} و D_{st} توسط روابط (۳۴) و (۳۶) تعیین شدند و تابع توزیع (۲۸) به طور کامل معلوم شد.

تابع z_q و z_{qq} را می‌توان بر حسب توابع بتا و گاما بیان نمود[۶].

ب) در این قسمت آنتروپی را بررسی می‌کنیم که توسط رابطهٔ زیر تعریف می‌شود.[۶] و تابعی از آنتروپی تسالیس است.

$$S_{\tilde{q}}\left(p\right)=\frac{1-\left(\int_{-\infty}^{\infty}dx\ p^{\tilde{q}}\right)^{-\frac{1}{\tilde{q}}}}{\frac{1}{\tilde{q}}-1}, \qquad (۳۷)$$

$$q=\tilde{q}\,. \qquad (۳۸)$$

به راحتی می‌توان ارتباط بین آنتروپی تسالیس و آنتروپی فوق را به کمک تابع f بیان نمود.

$$S_q=f\left(S_T^q\right)=q\frac{1-\left(1+\left(1-q\right)S_T^q\right)^{\frac{-1}{q}}}{1-q}, \qquad (۳۹)$$

بنابراین مطابق تعریف U در معادلهٔ (۲۶) داریم:

$$U=\left(1+\left(1-q\right)S_T^q\right)^{\frac{1+q}{q}}=\left(\int_{-\infty}^{\infty}dx\ p^q\right)^{\frac{q+1}{q}}. \qquad (۴۰)$$

مشابه روش قسمت الف به نتایج زیر می‌رسیم.

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\ p\left(x\right)=1, \qquad (۴۱)$$

$$U_{st}=\frac{{D_{st}}^{q+1}}{b}z_q^2,$$

$$U=\left(\int_{-\infty}^{\infty}dx\ p^q\right)^{\frac{q+1}{q}}, \qquad (۴۲)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$U_{st}=\left({D_{st}}^q\sqrt{\frac{{D_{st}}^{q-1}}{bU_{st}}}z_{qq}\right)^{\frac{q+1}{q}}$$

رابطهٔ (۴۱) را در طرفین رابطهٔ (۴۲) جایگزین می‌کنیم و به دست می‌آوریم:

$$D_{st}=\left(\frac{b}{z_q^2}\left(\frac{z_{qq}}{z_q}\right)^{\frac{1+q}{q}}\right)^{\frac{1}{-q^2+q+2}}. \qquad (۴۳)$$

با مقایسهٔ رابطهٔ (۳۲) و (۴۰) تابع U_{st} را در این قسمت به کمک رابطهٔ (۳۴) تعیین می‌کنیم.

$$U_{st}=\left(\frac{D^{q+1}}{b}z_q^2\right)^{\frac{1+q}{q}}. \qquad (۴۴)$$

بدین ترتیب مقادیر تابع U و ضریب بهنجارش D_{st} تعیین شده و توصیف ما را از جواب‌های مانای معادلات فوکر-پلانک غیر خطی کامل می‌کنند.

اکنون در مورد حدی که در تعریف z_{qq} روی q اعمال شده است بحث می‌کنیم. انتگرالده در تعریف z_{qq} برای xهای بزرگ در $q=\frac{1}{3}$ متناسب با $\frac{1}{|x|}$ می‌باشد و بنابر این انتگرال واگراست. در xهای بزرگ برای $0\langle q\langle\frac{1}{3}$ نیز انتگرال واگرا خواهد شد. زیرا انتگرالده متناسب با $\frac{1}{|x|^m}$، $m\in(0,1)$، می‌باشد. بنابر این در مورد آنتروپی‌هایی که z_{qq} در توابع توزیع آنها وارد می‌شود، حد $q\rangle\frac{1}{3}$ اعمال می‌گردد.

این نکته حائز اهمیت است که روش به کار گرفته شده در این مقاله تنها در مورد آنتروپی‌های به شکل $S=f\left(S_T^q\right)$ کارآمد خواهد بود. البته این مسئله از اهمیت این روش نمی‌کاهد، زیرا گروه بزرگی از آنتروپی‌ها را می‌توان به صورت تابعی از آنتروپی تسالیس بیان نمود. در مراجع مختلف می‌توان آنها را یافت [۶، ۷، ۸].

۴. جواب‌هاي وابسته به زمان معادلات فوكر- پلانك غير خطي

پاسخ گذرای معادلهٔ فوکر پلانک (۱۸) وابسته به آنتروپی تسالیس توسط پلاستینو به دست آمده است.[۵] ما نیز مشابه روش پلاستینو پاسخ گذرای معادلهٔ فوکر پلانک (۲۹) را به صورت زیر فرض می‌کنیم. معادلهٔ (۲۹) مربوط به آنتروپی $f\left(S_T^q\right)$ می‌باشد. تابع U نقطه تفاوت معادلهٔ (۱۸) و (۲۹) است.

$$p_{tr}\left(x,t\right)=D\left(t\right)\left(\left\{1-C\left(t\right)\frac{\left(q-1\right)}{2}\left(x-x_0\left(t\right)\right)^2\right\}_+\right)^{\frac{1}{q-1}}. \qquad (۴۵)$$

توابع $C\left(t\right)$ و $D\left(t\right)$ توابعی مثبت هستند.

جدول۲. نمونه‌هایی از معادلهٔ دیفرانسیل مربوط به $D(t)$ و پاسخ آن .

$S_T^q(p)=\int\frac{\left(p-p^q\right)}{q-۱}dx$ $\dot{D}(t)=\gamma D(t)-\frac{۲q}{\beta}z_q{}^{۲}(D(t))^{q+۲}$ $D(t)=\left(\frac{b_q}{z_q{}^{۲}}\frac{۱}{۱-\exp(-(q+۱)\gamma t)}\right)^{\frac{۱}{۱+q}}$
$S_R^q(p)=\frac{۱}{۱-q}\ln\int dx\;\; p^q$ $\dot{D}(t)=\gamma D(t)-\frac{۲q}{\beta}\frac{z_q{}^{۳}}{z_{qq}}(D(t))^{۳}$ $D(t)=\left(b_q\frac{z_{qq}}{z_q{}^{۳}}\frac{۱}{۱-\exp(-۲\gamma t)}\right)^{\frac{۱}{۲}}$
$S_{\tilde{q}}(p)=\frac{۱-\left(\int_{-\infty}^{\infty}dx\;\; p^{\tilde{q}}\right)^{-\frac{۱}{\tilde{q}}}}{\frac{۱}{\tilde{q}}-۱}$ $\dot{D}(t)=\gamma D(t)-\frac{۲\tilde{q}}{\beta}\frac{(z_{\tilde{q}})^{\frac{۳\tilde{q}+۱}{\tilde{q}}}}{(z_{\tilde{q}\tilde{q}})^{\frac{۱+\tilde{q}}{\tilde{q}}}}(D(t))^{\frac{۲\tilde{q}+۱}{\tilde{q}}}$ $D(t)=\frac{b_{\tilde{q}}{}^{\frac{\tilde{q}}{\tilde{q}+۱}}}{z_{\tilde{q}}{}^{\frac{۳\tilde{q}+۱}{\tilde{q}+۱}}}z_{\tilde{q}\tilde{q}}\left(۱+c'\exp(-\frac{\tilde{q}+۱}{\tilde{q}}\gamma t)\right)^{-\frac{\tilde{q}}{\tilde{q}+۱}}$

بـه کمـک شـرط بهنجـارش $\int_{-\infty}^{\infty}dx\;\; p(x)=۱$ و تعـاریف جدول ۱، ارتباط بین $C(t)$ و $D(t)$ تعیین می‌شود.

$$C(t)=۲\left(z_q D(t)\right)^{۲}. \qquad (۴۶)$$

با استفاده از رابطهٔ (۴۵) به همراه رابطهٔ (۴۶) و جـایگزینی آنهـا در معادلـهٔ (۲۹) و سـپس جداسـازی تـوان‌هـای مختلـف $(x-x_۰(t))$ به معادلات دیفرانـسیل مرتبـهٔ اول بـرای $D(t)$ و $x_۰(t)$ دست می‌یابیم.

$$\dot{x}_۰(t)=-\gamma\; x_۰(t), \qquad (۴۷)$$

$$\dot{D}(t)=\gamma D(t)-\frac{۲q}{\beta U}z_q^{۲}(D(t))^{۲+q}. \qquad (۴۸)$$

برای معادلهٔ (۴۷) پاسخ به سادگی به دست می‌آید.

$$x_۰(t)=x_۰'\exp(-\gamma t), \qquad (۴۹)$$

$$x_۰'=x_۰(t=۰). \qquad (۵۰)$$

معادلهٔ (۴۵) را در تعـاریف مربـوط بـه تـابع U بـرای آنتروپـی‌هـای مختلف جایگزین می‌کنیم و $U(t)$ را بـر حـسب $D(t)$ بـه دسـت می‌آوریم. بنابراین می‌توان معادلهٔ دیفرانسیل (۴۸) را بـه تفکیـک بـرای آنتروپی‌های مختلف، بدون حضور تابع $U(t)$ نوشـته وآنهـا را حـل کنیم. نتایج برای سه آنتروپی به عنوان نمونه در جدول ۲ آمده است.

۵. نتیجه‌گیری

در مقالات زیادی معادلات فوکر- پلانک تعمیم یافته وابسته به آنتروپی تسالیس و برخی آنتروپی‌های خاص دیگر نوشته و حل شده است [۲، ۳، ۸]. آنتروپی تسالیس و توابع آن به دلیل تطابق مطلوبی که با سیستم‌های فیزیکی با حافظهٔ طولانی و یا برهم کنش‌های بلند برد و... دارد بسیار مورد توجه واقع شده است. در مورد اهمیت به دست آوردن پاسخ‌های معادلات فوکر- پلانک می‌توان به مطالب زیر اشاره نمود.

به طورکلی هر توصیفی از سیستم خارج از تعادل نیازمند تابع توزیع وابسته به زمان است. به عنوان مثال پدیدهٔ پخش که از نظر تئوری و تجربی بسیار مورد توجه می‌باشد. میانگین مربعی تغییرات متغیر حالت (واریانس) معیاری برای تقسیم‌بندی پخش می‌باشد. اگر واریانس را به صورت η^t بیان کنیم که در آن t نماینده زمان باشد، $\eta < ۱$ را زیر پخش، $\eta = ۱$ را پخش نرمال و $\eta > ۱$ را ابر پخش می‌نامند. از هر سه دسته نمونه‌های زیادی در طبیعت دیده می‌شوند. به عنوان مثال سیستم‌های شبه پلیمری، جریان چرخشی دو بعدی، هدایت گرمایی در پلاسما و پراکندگی جمعیت در سیستم‌های بیولوژیکی و.... . ارجاعات مفیدی را در این مورد می‌توان در [۴] یافت.

معادلات فوکر- پلانک غیر خطی می‌توانند توصیف ریاضی مناسبی برای فرآیندهایی باشند که به پخش بی نظم مربوط می‌شوند. برای دانستن این مطلب که هر سیستم پخش در کدام دسته قرار می‌گیرد، لازم است واریانس($<x^۲> - <x>^۲$) به صورت تابعی از زمان محاسبه گردد، که نیازمند دانستن وابستگی زمانی توابع توزیع سیستم‌ها است. لذا در این مقاله تابع توزیع برای سیستم‌هایی که با آنتروپی تسالیس و توابع آن تطابق دارند، به دست آمده است.

مراجع

1. C Tsallis, *J. Stat. Phys*. **52** (1988) 479.
2. P H Chavanis, arxiv:cond-mat/0709.1828v1.
3. V Schwammle, F D Nobre, E M F Curado, *Phys. Rev*. E **76** (2007) 041123.
4. T D Frank, A Daffertshofer, Physica A **285** (2000) 351-366.
5. A R Plastino, A Plastino, Physica A **222** (1995) 347-354.
6. T D Frank, *Nonlinear Fokker-Plank Equations*, Springer (2004).
7. A M Mathai, H J Haubold, *Physica* A **385** (2007) 493-500.
8. T D Frank, A R Plastino, *Eur. Phys. J*. B **29** (2002) 543-549.