مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۱، شمارهٔ ۳، پاییز ۱۳۹۰

بررسي همگام سازي در مدل كوراموتو بر روي شبكة منظم

ريحانه كوهي اصفهاني، فرهاد شهبازي و كيوان آقابابايي ساماني

دانشكدة فيزيك، دانشگاه صنعتي اصفهان، اصفهان

پست الكترونيكي: r.koohiesfahani@ph.iut.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۸۹/۸/۳ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۰/۸/۱۷)

چكيده

جواب‌هاي پايدار همگام، در مدل كوراموتو روي شبكة منظم مورد بررسي قرار گرفته است. نشان داده شد كه دو حالت پايدار وجود دارد، ناهمگام كامل با پارامتر نظم صفر و همگام كامل با پارامتر نظم يك. همچنين شرايطي كه در آن فقط پارامتر نظم برابر يك صادق است به دست آمده است. علاوه بر اين نشان داده شد اختلاف فاز بيشتر از $\pi/2$ بين رئوس همسايه در شرايط نهايي عامل ناپايداري شبكه است. در نهايت نشان داديم كه اگر تعداد رئوس كمتر از دو برابر درجة هر رأس باشد، فقط حالت پارامتر نظم برابر يك حالت پايدار است.

واژه‌هاي كليدي: همگام‌سازي، مدل كوراموتو، پارامتر نظم، شبكة منظم، ماتريس پايداري

۱. مقدمه

نظم، خصوصیت پایه‌ای و مهم طبیعت و مفهومی اساسی در علم است. الگوهای نظم را می‌توان به راحتی در سیستم‌های فیزیکی، زیستی، اجتماعی و غیره مشخص کرد. اصولاً نظم به حالت پایا (استاتیک) یک ساختار تعلق می‌گیرد. مانند ساختار منظم کریستال که اتم‌ها کاملاً یک ساختار دوره‌ای را تولید می‌کنند. با این وجود می‌تواند یک خصوصیت مهم در دینامیک جمعی[۱] نیز باشد. رفتار بیولوژی موجودات زنده تماماً بر پایهٔ نظم دینامیکی قرار دارد؛ همانند شبکهٔ عصبی در مغز. اولین قدم برای درک رفتار دسته جمعی سیستم‌ها، مدل سازی آنها با شبکه است که در آن هر رأس بیانگر یک واحد دینامیکی و وجود یال بین آنها نمایان‌گر برهم‌کنش و تبادل اطلاعات بین آنها است. با پیدایش نظریهٔ گراف در سال ۱۷۶۳، مطالعهٔ شبکه‌ها به عنوان یک ابزار مهم در برخی زمینه‌ها مانند علوم اجتماعی گسترش یافته تا جایی‌که دهٔ گذشته شاهد به وجود آمدن یک شاخه جدید تحقیقاتی به نام "شبکه‌های پیچیده"[۲] بود. این شبکه‌ها ساختاری بی‌نظم، پیچیده و وابسته به زمان دارند و تعداد رئوس آنها گاهی به میلیون‌ها رأس می‌رسد. بسیاری از سامانه‌های موجود در طبیعت و صنعت از چنین ساختارهایی تشکیل شده‌اند. به عنوان مثال می‌توان، شبکه‌های عصبی، شبکه‌های حمل و نقل عمومی، شبکه‌های اینترنت، شبکه‌های تلفن و ... اشاره کرد [۱ تا ۳]. در چند دهٔ اخیر یک سوال اساسی در مورد دینامیک غیرخطی شبکه‌ها مطرح بوده است. اینکه یک شبکه چگونه به حالت همگامی می‌رسد و هر شبکه چه

۱. Collective dynamics

۲. Complex networks

حالت‌های همگامی را به خود اختصاص می‌دهد. چنین تلاش‌هایی بر روی شبکه‌های بی‌مقیاس[۱]، تصادفی[۲] و جهان‌کوچک[۳] انجام گرفته است [۴ - ۶]. در این مقاله شبکه منظم[۴] که توسط زنجیره‌ای از رئوس ساخته شده و در آن هر رأس به چند همسایه اول خود متصل است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. هر رأس به نوسانگر فازی تشبیه شده و برهم‌کنش بین نوسانگرها و همگام سازی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. همگام سازی به عنوان سازگاری آهنگ نوسانگرها از طریق برهم‌کنش ضعیف بین آنها شناخته می‌شود و در بسیاری از پدیده‌های طبیعی مشاهده شده و کاربردهای فراوانی دارد. به عنوان مثال می‌توان همگام شدن در کرم‌های شب‌تاب، مولدهای جریان متناوب و سیستم‌های آکوستیکی را نام برد. مدل‌های مختلفی برای توصیف این پدیده ارائه شده که یکی از آنها مدل کوراموتو[۵] است[۷]. قابل حل بودن این مدل از یک سو و توصیف قابل قبول پدیدهٔ همگام‌سازی توسط آن از سوی دیگر باعث شد تا مدل کوراموتو یکی از موفقیت‌آمیزترین مدل‌ها معرفی شود. تحول زمانی هر نوسانگر در این مدل به این‌گونه است:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1,2,...,N \ , \qquad (1)$$

که در آن K ضریب جفت‌شدگی نوسانگرها و N تعداد رئوس شبکه است که حضور آن تضمین کنندهٔ رفتار صحیح تابع در حد Nهای بزرگ (حد ترمودینامیکی) می‌باشد. اگر دو رأس i و j به هم متصل باشند a_{ij} برابر ۱ و در غیر این صورت صفر است. ω_i فرکانس ذاتی هر نوسانگر است. در حالت کلی هر نوسانگر می‌تواند فرکانس ذاتی متفاوتی داشته باشد. به عبارت دیگر فرکانس هر نوسانگر را می‌توان از یک توزیع فرکانسی به دست آورد. ولی در این مقاله فقط حالت‌هایی بررسی می‌شود که در آنها فرکانس ذاتی تمام رئوس یکسان است. خواهیم دید حتی در همین حالت خاص نیز رفتار سیستم بسیار پیچیده است و جواب‌های متعددی برای آن به دست می‌آید. با تبدیل $\theta_i \to \theta_i - \omega$ و تقسیم رابطهٔ (۱) بر K/N و بازتعریف زمان خواهیم داشت [۶]:

$$\frac{d\theta_i}{d\tau} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\sin(\theta_j - \theta_i)\ , \ i = 1,2,..,N \ , \qquad (2)$$

که در آن $\tau = \frac{t}{K/N}$ است. برای مشخص کردن میزان همگامی در شبکه‌ها از پارامتر نظم (r) استفاده می‌شود که در هر زمان معیاری از رفتار دسته جمعی نوسانگرها در شبکه است.

$$re^{i\psi} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e^{i\theta_i} \ . \qquad (3)$$

فاز ψ، میانگین فاز نوسانگرها است. در این مقاله فرآیند همگام‌سازی بر روی شبکهٔ منظم را مورد بررسی قرار می‌دهیم. نتایج تحلیلی توسط نتایج مدل سازی مورد تأیید قرار می‌گیرد. برای حل عددی معادله‌های (۲) از روش اویلر استفاده شده است. محاسبات عددی ما نشان داد که برای این مدل استفاده از روش دقیق‌تر رانگ-کوتا منجر به نتایج دقیق‌تر نمی‌شود و تنها زمان انجام محاسبات را افزایش می‌دهد. بنابراین همهٔ محاسبات با استفاده از روش اویلر انجام شد.

۲. روش اویلر[۶]

ساده‌ترین روش حل عددی معادلات دیفرانسیل، روش اویلر است. در این روش با دانستن شرایط اولیهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول، شرایط بعدی در هر زمان به دست می‌آید. اگر معادله به صورت $y'(t) = f(t, y(t))$ و شرایط اولیه $y(t_0) = y_0$ را داشته باشیم، با در نظر گرفتن قدم‌های زمانی به صورت $t_n = t_{n-1} + h$ و با استفاده از بسط تیلور خواهیم داشت:

$$\frac{y(t_n + h) - y(t_n)}{h} = f(t_n, y(t_n)) + o(h^2)$$

تا مرتبه اول h:

$$y(t_n + h) = y(t_{n+1}) = f(t_n, y(t_n))h + y(t_n)$$

بنابراین با داشتن شرایط اولیه می‌توان مقدار تابع را در زمان‌های بعدی به دست آورد.

۱. Scale-Free
۲. Random
۳. Small-World
۴. Regular
۵. Kuramoto model
۶. Euler method

۳. بررسي تحليلي شبكة منظم

در شبکهٔ منظم هر رأس به چند همسایه‌های نزدیک خود متصل است. بنابراین از رابطهٔ (۲) داریم:

$$\frac{d\theta_i}{d\tau}=\sum_{j=i-Nc}^{i+Nc}\sin(\theta_j-\theta_i)\ ,i=1,2,...,N \qquad (۴)$$

که در آن Nc برابر نصف تعداد همسایگان هر رأس است. شرایط دوره‌ای در این معادلات بر قرار است: $i+N\equiv i$. از معادلهٔ (۳) و (۴) خواهیم داشت:

$$r\sin\psi\sum_{j=1}^{N}\cos\theta_j = r\cos\psi\sum_{j=1}^{N}\sin\theta_j\ , \qquad (۵)$$

دنبال جواب‌های پایدار هستیم، بنابراین $d\theta_i/d\tau=0$ است. تابع $\sin(\theta_j-\theta_i)$ تابعی فرد است، پس $\sum_{i,j}\sin(\theta_j-\theta_i)=0$ می‌باشد. با باز کردن این معادله و استفاده از روابط (۴) و (۵) خواهیم داشت:

$$r\sum_{i=1}^{N}\cos\theta_i\sum_{j=i-Nc}^{i+Nc}\sin(\theta_j-\psi)=0\ , \qquad (۶)$$

$$r\sum_{i=1}^{N}\sin\theta_i\sum_{j=i-Nc}^{i+Nc}\sin(\theta_j-\psi)=0\ . \qquad (۷)$$

با توجه به اینکه در شبکهٔ منظم، رئوس ارجحیتی بر یکدیگر ندارند، انتظار داریم جواب $\sum_{j=i-Nc}^{i+Nc}\sin(\theta_j-\psi)$ مستقل از شمارهٔ رأس i باشد، بنابراین داریم: $f(\theta)=\sum_{j=i-Nc}^{i+Nc}\sin(\theta_j-\psi)$.

عبارات (۶) و (۷) باید هم‌زمان با هم برقرار باشند. پس با فرض $r\neq 0$ دو حالت با جواب‌های ایستا وجود دارد.

$$\sum_{i=1}^{N}\cos\theta_i=0,\ \sum_{i=1}^{N}\sin\theta_i=0\ , \qquad (۱)$$

$$\sum_{j=i-Nc}^{i+Nc}\sin(\theta_j-\psi)=0\ . \qquad (۲)$$

از آن‌جا که دنبال جواب‌های پایدار هستیم، قبل از بررسی این دو حالت به بررسی روش‌های تعیین پایداری جواب‌های پایا می‌پردازیم.

۴. بررسي پايداري جواب‌ها

۴. ۱. ماتريس پايداري

فرض کنیم رابطهٔ (۱) جوابی به ازای مجموعهٔ $\{\theta_1^*,\theta_2^*,...,\theta_N^*\}$ داشته باشد. برای بررسی پایداری این جواب، هر نوسانگر را از فاز پایای خود به مقدار کوچکی منحرف می‌کنیم: $\theta_i(t)=\theta_i^*+\delta_i(t)$. اکنون با جایگذاری در معادلهٔ ۱ و صرف‌نظر کردن از مراتب بالاتر δ_i ها، به رابطهٔ $\dot{\delta}=\Lambda\delta$ می‌رسیم که در این رابطه $\Lambda=M-D$ ، $D_i=\sum_{j=1}^{N}M_{ij}$ ، $M_{ij}=\frac{K}{N}A_{ij}\cos(\theta_j^*-\theta_i^*)$ و $D=diag(D_1,D_2,...,D_N)$ است. اگر تمامی ویژه مقادیر ماتریس Λ منفی باشند، جواب مورد نظر پایدار خواهد بود[۸].

۴. ۲. اختلاف فاز

در ماتریس پایداری تمام زوایا را از حالت تعادل خارج می‌کردیم. در این روش فقط یک رأس را از حالت تعادل خارج می‌کنیم و پایداری آن رأس را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس این کار را با تمامی رئوس دیگر نیز انجام می‌دهیم.

در ابتدا فرض می‌کنیم شبکهٔ منظمی داریم که تنها به همسایهٔ اول خود متصل است ($Nc=1$). اگر یکی از جواب‌های مدل کوراموتو برای آن به صورت $\{\theta_1^*,\theta_2^*,...,\theta_N^*\}$ باشد، معادلهٔ کوراموتو برای رأسی مانند ۲ تبدیل خواهد شد به:

$$\dot{\theta}_2=\sin(\theta_1^*-\theta_2^*)+\sin(\theta_3^*-\theta_2^*)=0\ . \qquad (۸)$$

با تبدیل $\theta_2^*\to\theta_2^*+\delta_2(t)$ خواهیم داشت:

$$\delta_2(t)=\exp\{-[\cos(\theta_1^*-\theta_2^*)+\cos(\theta_3^*-\theta_2^*)]t\}\ , \qquad (۹)$$

بنابراین برای داشتن پایداری باید عبارت $[\cos(\theta_1^*-\theta_2^*)+\cos(\theta_3^*-\theta_2^*)]$ بزرگتر از صفر باشد. از طرفی طبق معادلهٔ کوراموتو داریم $\sin(\theta_1^*-\theta_2^*)=-\sin(\theta_3^*-\theta_2^*)$ و یا به عبارتی با تعریف $\theta_1^*-\theta_2^*=x$ ، $\theta_3^*-\theta_2^*=y$ داریم:

$$\sin(x)=-\sin(y)\ , \qquad (۱۰)$$

پس داریم:

$$a)\ x=\pi+y\to\cos(x)+\cos(y)=0\ ,$$
$$b)\ x=2\pi-y\to\cos(x)+\cos(y)=2\cos(y)\ ,$$

بنابراین تنها حالت b قابل قبول بوده با این شرط که تفاوت

جدول ۱. ویژه مقادیر برای حالت میانگین درجهٔ ۲ و پخش حول فضای فاز. در اینجا $N_{circle} = N\ ,\ \Delta\theta = \frac{2\pi}{N}$ است. اعداد درون پرانتز بیانگر تعداد دفعات تکرار آن ویژه مقدار هستند.

ویژه مقدار	N
۰(۴*) (ناپایدار)	۴
۰,−۱/۱۱۸(۲*), −۰/۴۲۷۱(۲*) (پایدار)	۵
۰,−۰/۵(۲*), −۱/۵(۲*),−۲	۶
۰,−۰/۴۶۹۵(۲*), −۱/۵۲۴۵(۲*), −۲/۳۷۰۵(۲*)	۷
۰,−۰/۴۱۴۲(۲*), −۱/۴۱۴۲(۲*), −۲/۴۱۴۲(۲*), −۲/۸۲۸۴	۸

زوایا از $\pi/2$ کمتر و از $-\pi/2$ بیشتر باشد. اکنون اگر فرض کنیم که در شبکهٔ منظم هر رأس به دو همسایهٔ اول خود متصل است، معادلهٔ کوراموتو برای رأس فرضی شمارهٔ ۲ چنین می‌شود:

$$\begin{aligned}&\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1^* - \theta_2^* - \delta_2) + \sin(\theta_N^* - \theta_2^* - \delta_2) + \sin(\theta_3^* - \theta_2^* - \delta_2)\\ &+\sin(\theta_4^* - \theta_2^* - \delta_2) =\\ &-\delta_2 \cos(\theta_1^* - \theta_2^*) - \delta_2 \cos(\theta_N^* - \theta_2^*) - \delta_2 \cos(\theta_3^* - \theta_2^*)\\ &-\delta_2 \cos(\theta_4^* - \theta_2^*) = g(\delta_2, \{\theta^*\})\end{aligned} \qquad (11)$$

در اینجا از تقریب خطی مرتبهٔ اول استفاده کردیم.

اکنون فرض می‌کنیم شبکهٔ منظمی داریم که هر رأس فقط به همسایه‌های اول خود متصل است و یک شبکهٔ دیگر که هر رأس فقط به همسایه‌های دوم خود متصل است. معادلات حاکم بر آنها چنین می‌شود:

$$\begin{aligned}\overset{*}{\theta}_2 &= \sin(\theta_1^* - \theta_2^* - \delta_2) + \sin(\theta_3^* - \theta_2^* - \delta_2)\\ &= -\delta_2 \cos(\theta_1^* - \theta_2^*) - \delta_2 \cos(\theta_3^* - \theta_2^*) = f_1(\delta_2, \{\theta^*\}),\end{aligned} \qquad (12)$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_2 &= \sin(\theta_N^* - \theta_2^* - \delta_2) + \sin(\theta_4^* - \theta_2^* - \delta_2)\\ &= -\delta_2 \cos(\theta_N^* - \theta_2^*) - \delta_2 \cos(\theta_4^* - \theta_2^*) = f_2(\delta_2, \{\theta^*\}).\end{aligned} \qquad (13)$$

با توجه به اینکه $g(\delta_2, \{\theta^*\}) = f_1(\delta_2, \{\theta^*\}) + f_2(\delta_2, \{\theta^*\})$ بنابراین جواب‌های معادلهٔ g ترکیبی خطی از جواب‌های معادلات f_2 و f_1 است.

به طور خلاصه اگر شبکه‌ای با Nc همسایهٔ اول داشته باشیم برای داشتن جوابی پایدار باید این دو شرط همزمان برقرار باشند:

۱) اختلاف زوایا کمتر از $\pi/2$ و اگر بیش از یک همسایهٔ اول دارند باید تمامی اختلاف زوایا با همسایگانش کمتر و یا مساوی با $\pi/2$ باشد. زیرا داشتن یک همسایه با اختلاف فاز کمتر از $\pi/2$ باعث وجود یک ویژه مقدار منفی می‌شود و بنابراین اگر همسایه‌ای با اختلاف فاز $\pi/2$ داشته باشیم، (ویژه مقدار صفر) مشکلی پیش نمی‌آید. اما اگر تنها یک همسایه با اختلاف $\pi/2$ داشته باشیم، ویژه مقدار صفر است و طبق معادلهٔ (۹) رأس ۲ به جای اول خود برنخواهد گشت.

۲) طبق معادلهٔ (۱۰) باید تقارن در توزیع زوایا داشته باشیم. یعنی یا همگی نوسانگرها هم‌فاز باشند و یا به طور مرتب حول دایرهٔ فضای فاز توزیع شده باشند.

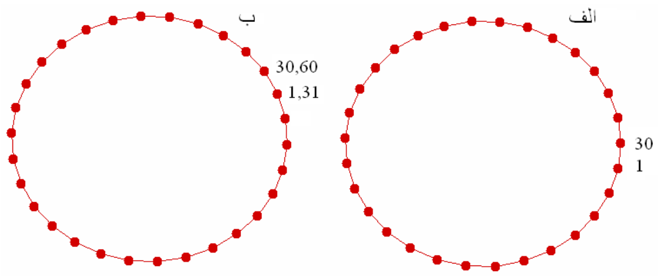
۵. حل تحليلي

۵. ۱. بررسي پايداري حالت اول ($\sum_{i=1}^{N}\sin\theta_i = 0$ ، $\sum_{i=1}^{N}\cos\theta_i = 0$)

زمانی که فاز نوسانگرها حول دایرهٔ فضای فاز به طور منظم پخش شده باشند شرایط $\sum_{i=1}^{N}\sin\theta_i = 0$ و $\sum_{i=1}^{N}\cos\theta_i = 0$ ارضاء می‌شود. در این حالت پارامتر نظم برابر با صفر است. در اینجا تعداد رئوسی که حول دایرهٔ فضای فاز قرار می‌گیرند را با N_{circle} نشان می‌دهیم.

۵. ۱. ۱. ۲ همسایه (Nc =۱)

اختلاف زوایا در این حالت برابر با $2\pi/N$ است، بنابراین سیستم به ازای ۵ رأس به بالا در حالت پایدار قرار می‌گیرد (جدول ۱). در حالت N=۴ که هر چهار ویژه مقدار برابر با صفر هستند، ناپایداری آن از طریق اجرای برنامه تأیید شد.



شکل ۱. الف)پیکربندی فاز شبکه ۳۰ تایی با $\Delta\theta=\frac{2\pi}{30}$ و $N_{circle}=30$؛ ب)فضای فاز شبکه ۶۰ تایی با $\Delta\theta=\frac{2\pi}{30}$ و $N_{circle}=60$ (پارامتر نظم صفر)

جدول ۲. ویژه مقادیر برای حالت میانگین درجهٔ ۲ و پخش حول فضای فاز. در اینجا $\Delta\theta=2*\frac{2\pi}{N}$ و $N_{circle}=N$ است. اعداد درون پرانتز بیانگر تعداد دفعات تکرار آن ویژه مقدار هستند.

ویژه مقدار	N
۰,۰,۰,۲/۵,۲/۵	۵
−۲,۰(*۳),۱(*۲)	۶
−۰/۶۷۸۴(*۲),−۲/۲۰۲۹(*۲),۰/۰۷۴۶(*۲),۰	۷
−۲/۸۲۸۴,−۲/۴۱۴۲(*۲) ,−۱/۴۱۴۲(*۲),−۰/۴۱۴۲(*۲),۰	۸

بنابراین برای حالتی همانند ۱۰ رأس، دو پیکربندی فضای فاز متفاوت وجود دارد. در حالت اول همگی روی دایرهٔ فضای فاز به طور مرتب پخش می‌شوند ($N_{circle}=10$, $\Delta\theta=2\pi/10$)، و در حالت دوم از رأس شمارهٔ ۱ تا ۵ پخش می‌شوند و از ۶ تا ۱۰ روی آنها به ترتیب قرار می‌گیرند ($N_{circle}=5$, $\Delta\theta=2\pi/10$). شکل ۱، همین موضوع را برای یک شبکه با N=۳۰ که $N_{circle}=30$ ، و یک شبکه با N=۶۰ که به صورت $N_{circle}=30$ چیده شده است، نمایش می‌دهد.

۵. ۱. ۲. ۴ همسایه ($Nc=2$)

در این حالت بیشترین اختلاف فاز بین دو همسایه برابر $\Delta\theta=2*(2\pi/N)$ است. بنابراین انتظار داریم سیستم به ازای ۸ رأس به بالا پایدار باشد (جدول ۲).

بنابراین با محاسبهٔ اختلاف فاز همسایه‌های هر رأس، می‌توان به پایداری و یا عدم پایداری شبکه پی برد. اگر اختلاف زاویهٔ هر رأس با اولین همسایه‌اش برابر با α باشد، اختلاف زاویهٔ هر رأس با دورترین همسایه‌اش برابر $Nc\times\alpha$ است که $\alpha\geq 2\pi/N$ می‌باشد ($\alpha=2\pi/N_{circle}$). بنابراین در حالت پایداری باید $Nc\times\alpha\leq\frac{\pi}{2}$ باشد (در حالت تک همسایه به $Nc\times\alpha<\pi/2$ کاهش می‌یابد)، و یا به عبارتی داریم $\frac{\pi}{2Nc}\leq\alpha\leq\frac{2\pi}{N}$ که خواهیم داشت $4Nc\leq N$ (در حالت تک همسایه به $4Nc<N$ کاهش می‌یابد).

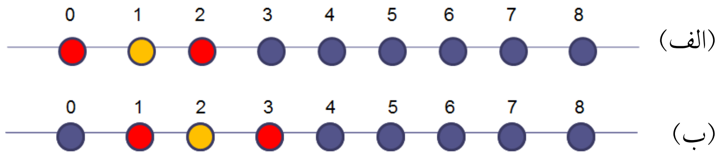
۵. ۲. ۱. بررسی حالت دوم ($\sum_{j=i-Nc}^{i+Nc}\sin(\theta_j-\psi)=0$)

برای سادگی به دستگاه مختصاتی می‌رویم که ψ=۰ باشد. اگر Nc=۱ باشد و معادله را حول رأس ۱ مطابق شکل (۲–الف) بنویسیم خواهیم داشت $\sin\theta_0+\sin\theta_1+\sin\theta_2=0$. اکنون اگر حول رأس ۲ بنویسیم (شکل (۲– ب)) خواهیم داشت $\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3=0$. با مقایسهٔ این دو داریم $\sin\theta_0=\sin\theta_3$. بنابراین در حالت کلی خواهیم داشت:

$$\sin\theta_i=\sin\theta_{n(2Nc+1)+i},\quad n=0,1,2,\dots$$

۵. ۲. ۲. تعداد کل رئوس برابر با $N=n(2Nc+1)$

در این حالت به راحتی می‌توان اثبات کرد که $2Nc$+۱ دسته



شکل ۲. (الف) بررسی حالت $\sum_{j=i-Nc}^{i+Nc}\sin(\theta_j-\psi)=۰$ برای رأس شماره ۱؛ (ب) بررسی حالت $\sum_{j=i-Nc}^{i+Nc}\sin(\theta_j-\psi)=۰$ برای رأس شماره ۲. بررسی این حالت بستگی به تعداد رئوس دارد.

جدول ۳. ویژه مقادیر مربوط به حالت $N=۳n$.

N	ویژه مقدار
۳	۰,۱/۵,۱/۵
۶	۰,۰/۵,۰/۵,۱/۵,۱/۵,۲
۹	۰,۰/۲۳۴(*۲),۱/۵(*۲),۱/۹۳۹۷(*۲),۰/۸۲۶۴
۱۲	۰,۰/۵(*۲),۱/۵(*۲),۲,۰/۱۳۴۰(*۲),۱(*۲),۱/۸۶۶(*۲)
۱۵	۰,۱/۵(*۲),۰/۸۶۴۵۵(*۲),۰/۳۳۰۸۷(*۲),۰/۶۹۰۹۸(*۲),۱/۱۰۴۵(*۲),۱/۸۰۹(*۲),۱/۹۷۸۱(*۲)

معادله به شکل زیر داریم.

۱ $\sin\theta_۰=\sin\theta_{۲Nc+۱}=...=\sin\theta_{n(۲Nc+۱)},n=۰,۱,۲,...$

۲ $\sin\theta_۱=\sin\theta_{(۲Nc+۱)+۱}=...=\sin\theta_{n(۲Nc+۱)+۱},n=۰,۱,۲,...$

و به همین ترتیب

$\sin\theta_{۲Nc}=\sin\theta_{(۲Nc+۱)+۲Nc}=...=\sin\theta_{n(۲Nc+۱)+۲Nc},n=۰,۱,۲,...$

$۲Nc+۱$

سینوس تمامی زوایا با هم برابر هستند. بنابراین $۲Nc+۱$ مجهول و یک معادله خواهیم داشت. سه نوع جواب وجود دارد:

۱) تمامی رئوس دارای فاز یکسان هستند، کـه بـه حالـت $r=۱$ منجر می‌شود و پایدار است.

۲) برخی رئوس داری فاز x و برخـی دارای فـاز $x+\pi$ هـستند. بنابراین اختلاف زاویه بـین دو رأس مجـاور امکـان دارد از $\pi/۲$ بیشتر باشد. پس ناپایدار نیست.

۳) زوایا به گونه‌ای چیده شده‌اند که جمع سـینوس آنهـا صـفر خواهد بود که در این حالت $r=۰$ دارد.

۵.۲.۳. بررسي پايداري حالات $r=۰$ براي حالت (۳)

در این‌جا نیز با بررسی حالات گوناگون به قانونی کلـی دسـت خواهیم یافت.

الف) ۲ همسایه

در اینجا $N=۳n$ و یا به عبارتی $N_{circle}=۳$ است. ویـژه مقـادیر مطابق جدول ۳ می‌باشد.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، ویژه مقدار هر N، برابر است با ویژه مقدارهای مضرب‌های N، بـه‌عـلاوهٔ چنـد ویـژه مقـدار دیگر. از آن‌جا که همگی این اعداد باید ضریب ۳ باشند و ویژه مقدارهای ۳ نیز مثبت است، بنابراین بـرای تمـامی ایـن اعـداد، حالت $r=۰$ که $N_{circle}=۳$، حالت ناپایدار است.

ب) ۴ همسایه

ویژه مقادیر مطابق جدول ۴ به دست آمد. همـان‌گونـه کـه مـشاهده می‌شود سه عدد صفر داریم. ناپایداری آنها با اجرای برنامه تأیید شد. بنابراین بـه ازای $N=۵$ بـه هـیچ عنـوان حالـت $r=۰$ پایـدار نیست.

ج) ۶ همسایه

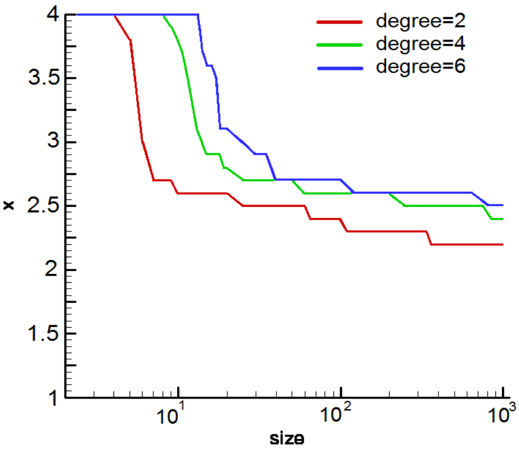
حالتی است که بتوان $r=۰$ را با شرایط $N=۷n$، بـه گونـه‌ای کـه $N_{circle}=۷$ باشد، ایجاد کرد. ویژه مقادیر مطابق جـدول ۵ بـه دست آمد:

جدول ۴. ویژه مقادیر مربوط به حالت N=۵n.

ویژه مقدار	N
۰,۰,۰,۲/۵,۲/۵	۵
۰(*۳),۲/۵(*۲),−۱/۲۳۶۱,۱(*۲),۲/۱۱۸۰(*۲)	۱۰

جدول ۵. ویژه مقادیر مربوط به حالت N=۷n.

ویژه مقدار	N
۳/۵,۳/۵,۰(*۵)	۷
۳/۵,۳/۵,۰(*۵)	۱۴



شکل ۳. وابستگی حالت پایدار r=۱ به بازهٔ فاز اولیه

د)حالت کلی

همان‌طور که مشاهده می‌شود، ویژه مقدارهای هـر $N = 2Nc+1$ برابر است با $(N-2)^*$ ۰ ، $(*2)$ $N/2$ و از طرفی ویـژه مقـادیر Nهای ضرایب دیگر، این ویژه مقادیر را دارنـد (کـه دو تـای آن مثبت است) و بنابراین در حالت کلی این حالت ناپایدار است.

۵. ۳. تعداد رئوس، برابر با $N = n(2Nc+1)+m$

در اینجا دو حالت داریم.

الف) اگر $2Nc+1$ مضربی از m نباشد، تمـام معـادلات بـا هـم برابر می‌شوند. به این معنا که تماما سینوس‌ها با هم برابرند، و از طرفی شرط $\sum_{j=i-Nc}^{i+Nc} \sin\theta_j = 0$ حکم می‌کند که تمام زوایا برابر صفر باشند که r=۱ را نتیجه می‌دهد.

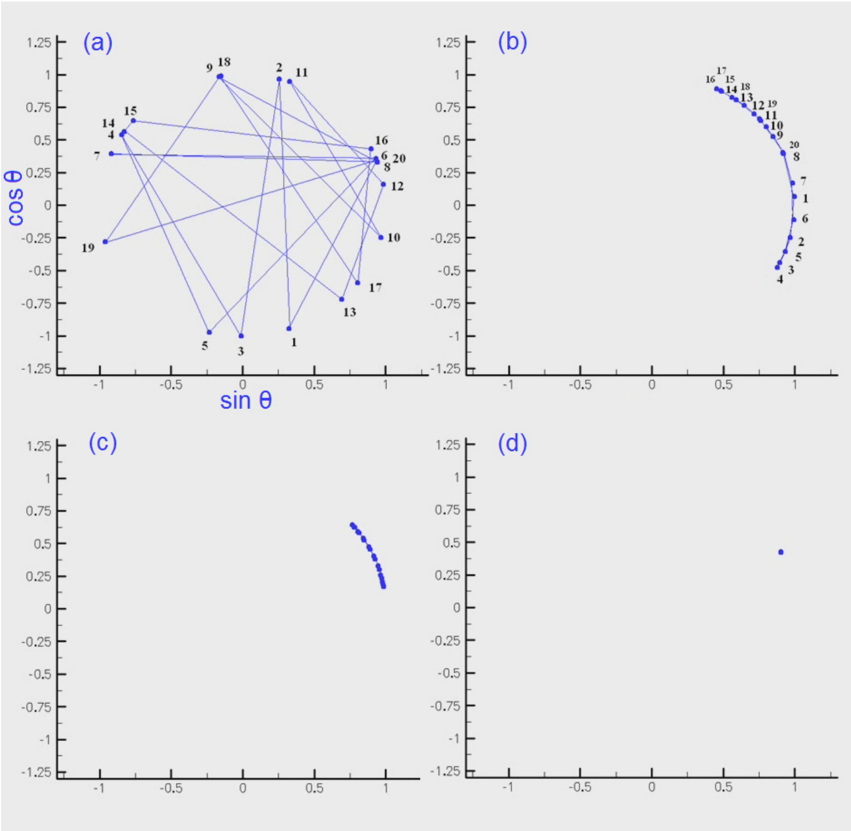
ب) اگر $2Nc+1$ و m نسبت به هـم اول نباشـند و کـوچکترین مضرب مشترک آنها برابر با q باشـد، q دسـته معادلـه خـواهیم داشت. بنابراین:

$$\sum_{i=1}^{2Nc+1} \sin\theta_i = 0 \Rightarrow \frac{2Nc+1}{q}\sum_{i=1}^{q} \sin\theta_i = 0$$

که به دو جواب r=۱ (حالتی که تمامی زوایا برابـر صـفرند) و r=۰ (حـالتی کـه دور دایره قرار گرفته‌اند) می‌رسیم. حـل ایـن قـسمت کـاملا مـشابه قسمت ۵. ۲. ۳ است کـه نـشان داده شـد r=۰ ناپایـدار اسـت. بنـابراین حالـت دوم ($\sum_{j=i-Nc}^{i+Nc} \sin(\theta_j-\psi) = 0$) هـیچ جـواب پایداری به جز r=۱ نمی‌تواند داشته باشد.

۶ . چگونگي وابستگي پارامتر نظم به شرايط اوليه

همان‌گونه که مشاهده شد، به ازای یک شـبکه بـا سـاختار ثابـت، امکان بـروز دو جـواب r=۱ و r=۰ بـا توجـه بـه شـرایط اولیـهٔ فازهای رئوس وجود دارد. بـا کـم کـردن بـازهٔ فازهـای اولیـه از [-π,π) به (-x,x] کـه x<π اسـت، فقـط جـواب r=۱ بـه دسـت می‌آید. میزان x بحرانی به تعداد یال و رئوس شبکه وابسته اسـت که از آن حد به پایین فقط r=۱ داریم. در شکل ۳، x بحرانـی بـه ازای هر تعداد یال و تعداد رأس مختلـف بـه دسـت آورده شـده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود هرچه تعداد یال درون شبکه بیـشتر باشـد، احتمـال بـه‌دسـت آوردن r=۱ بیـشتر اسـت، زیرا به ازای تعداد رئوس ثابت، با افـزایش تعـداد یـال x بحرانـی افزایش مـی‌یابـد. یعنـی بـه ازای بـازهٔ بیـشتری از گـسترهٔ فازهـا



شکل ۴: نحوه رسیدن به فاز همگام کامل (r=۱) برای شبکهٔ منظم با Nc=۱ , N= ۲۰ خطوط، نشان دهندهٔ یال‌های بین رئوس هستند. شکل اول فاز هر نوسانگر را در t=۰ نشان می‌دهد. شکل‌ها به ترتیب نشان دهنده وضعیت رئوس به ازای هر ۵ قدم زمانی هستند.

می‌توان به r=۱ دست یافت. بررسی تحلیلی شرایط اولیه‌ای که موجب بروز فقط r=۱ در بازهٔ [-π و π] می‌شود.

ابتدا شرایط وجود r=۰ را بررسی می‌کنیم. باید اختلاف زاویه هر رأس با همسایه‌هایش کمتر از π/۲ باشد. اگر رئوس به صورت منظم حول دایره‌ای نشسته باشند و اختلاف زاویه هر رأس با رأس کناری برابر با α باشد، بیشترین اختلاف زاویه بین هر رأس با همسایه‌اش برابر با $Nc*\alpha$ است. بنابراین داریم:

$$Nc*\alpha \le \frac{\pi}{2} \to \alpha \le \frac{\pi}{2Nc} \qquad (۴)$$

از طرفی، با توجه به اینکه رئوس به صورت منظم حول دایره هستند، α برابر با $2\pi/N$ است، و اگر رئوس مانند شکل ۱ روی هم قرار گرفته باشند، α بزرگتر از $2\pi/N$ است.

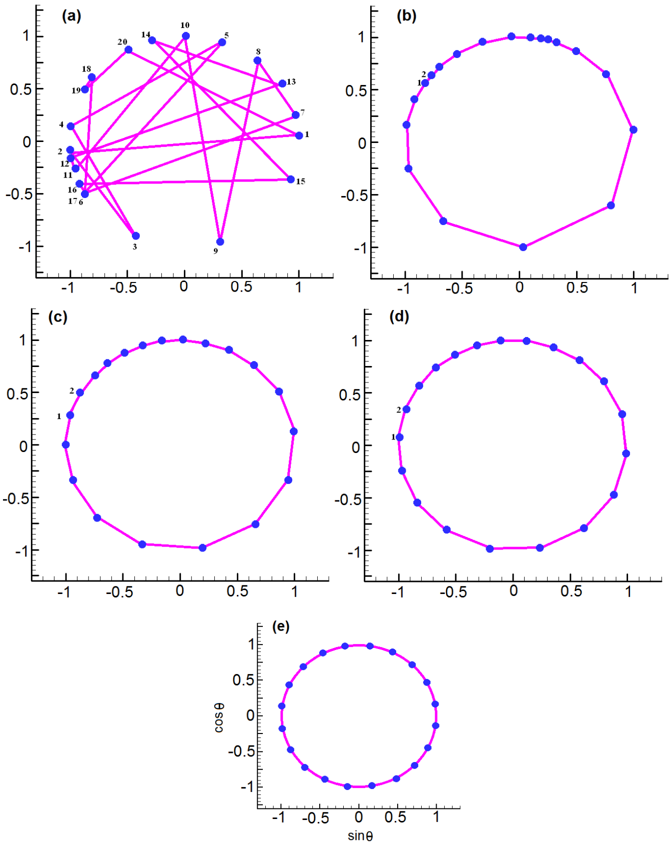
$$\alpha \ge 2\pi / N \, . \qquad (۵)$$

از (۴) و (۵) خواهیم داشت $N \ge 4Nc$، بنابراین به ازای $N < 4Nc$ حتما r=۱ خواهیم داشت. البته به ازای Nc=۱ که باید شرط $\Delta\theta < \pi/2$ برقرار باشد، شرط وجود r=۰ به $N > 4Nc$ کاهش می‌یابد و شرط وجود فقط r=۱ به $N \le 4Nc$ تبدیل می‌شود. از این معادله مشخص است که برای شبکهٔ کامل (نوعی شبکهٔ منظم که هر رأس به تمامی رئوس دیگر متصل است)، شرط $N \le 4Nc$ هیچ‌گاه برآورده نمی‌شود، بنابراین حالت r=۰ حالت پایدار این شبکه نمی‌تواند باشد و فقط می‌تواند حالت r=۱ را داشته باشد.

۷. نتیجه‌گیری

حل معادلهٔ کوراموتو روی شبکهٔ منظم دو دسته جواب پایدار با r=۰ و r=۱ دارند. نحوه رسیدن به حالت r=۱ که در آن تمامی فازهای رئوس یکسان هستند در شکل ۵ نشان داده شده است.

حالت r=۰ زمانی اتفاق می‌افتد که تفاوت فاز هر رأس با همسایه‌های آن هیچ‌گاه بیشتر از π/۲ نباشد و دست کم یک



شکل ۵. نحوه رسیدن به فاز ناهمگام (r=۰) برای شبکه منظم با Nc=۱ و N=۲۰. خطوط نشان دهندهٔ یال‌های بین رئوس هستند. شکل اول فاز هر نوسانگر را در t=۰ نشان می‌دهد. شکل‌ها به ترتیب نشان دهنده وضعیت رئوس به ازای هر ۵ قدم زمانی هستند.

همسایه داشته باشد که تفاوت زاویهٔ کمتر از $\pi/۲$ باشد (به این معنا که اگر یک همسایه دارد بایستی اختلاف فاز کمتر از $\pi/۲$ و اگر بیشتر از یک همسایه دارد بیشترین اختلاف فاز کمتر یا مساوی با $\pi/۲$ باشد.) و همچنین رئوس به صورت منظم حول دایرهٔ فضای فاز قرار گرفته باشند. نحوهٔ رسیدن به حالت r=۰ در شکل ۵ نشان داده شده است.

با محدود کردن بازهٔ فاز اولیه نوسانگرها می‌توان به جواب پایدار تنها r=۱ رسید.

در بازه فازهای اولیه [π و π-] به ازای $N \leq ۴Nc$ فقط r=۱ وجود دارد و به ازای Nهای بیشتر هر دو حالت r=۱ , r=۰ را داریم. (اگر رئوس فقط یک همسایه اول داشته باشند شرط به $N < ۴Nc$ کاهش می‌یابد.)

مراجع

1. S H Strogatz, “*Sync: The emergence science of spontaneous order*”, Hyprion, New York (2003).
2. J D Murry, “*Mathematical Biology*”, Springer, New York (1980).
3. A T Winfree; "*The Geometry of Biological Time*"; Springer, New York (1980).
4. H Khoshbakht, F Shahbazi and K Aghababaei Samani *J. Stat. Mech.* (2008) 10020.
5. S Bocaletti, V Latora and M Chavez; *Physics Reports,* **424** (2006) 175.
6. R Kouhi Esfahani, F Shahbazi and K Aghababaei Samani, “*Noise-induced Synchronization in Small World Network of Phase Oscillators*”, Submitted to *EPL* (2011).
7. Y Kuramoto, “C*hemical Osillators, Waves, and Turbulence*”, Springer, Berilin (1984).
8. K Aghababaei Samani, S Ghanbarian, *Phys. Rev.* E **77** (2008) 036209.