



## رفتار بحرانی خمش‌های ترمودینامیکی برای سیاه‌چاله‌های اینشتین

### گوس بونت سازگار $D \rightarrow 4$

سید علی حسینی منصوری\* و مرتضی رفیعی

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

پست الکترونیکی: shosseini@shahroodut.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۳/۱۶؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۰/۵/۷)

#### چکیده

در این مقاله، در ابتدا با استفاده از رهیافت تجزیه ADM، حل سیاه‌چاله بدون باری را برای گرانش گوس بونت سازگار با  $4 \rightarrow D$  به دست می‌آوریم. سپس خصوصیات ترمودینامیکی چنین حلی را در نزدیکی نقطه بحرانی با بهره‌مندی از هندسه ترمودینامیکی NTG بررسی خواهیم کرد. به بیانی دقیق‌تر، نمایه‌های بحرانی تغییر چگالی عددی  $\Delta n$ ، پذیر رفتاری دمایی  $K_T$ ، خمش ذاتی بهنجار شده  $R_N$  و خمش خارجی بهنجار شده  $K_N$  را در نزدیکی نقطه گذار برای فاز سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ محاسبه می‌کنیم. نتایج ما نشان می‌دهد که دامنه‌های مربوط به خمش‌های ترمودینامیکی بهنجار شده در نزدیکی نقطه بحرانی مستقل از مقادیر ثابت جفت شدگی گوس بونت هستند که نشان دهنده خاصیت جهان‌شول بودن آنها است.

واژه‌های کلیدی: سیاه‌چاله گوس بونت، تجزیه ADM، خمش ذاتی و خمش خارجی

#### ۱. مقدمه

برخی از جنبه‌های ترمودینامیکی مانند گذارهای فاز و رفتارهای بحرانی را مطالعه کنیم. برای مثال، واینهولد یک متریک ریمانی<sup>۱</sup> در فضای تعادل ترمودینامیکی ارائه کرده است که با یک ماتریس هسیان از انرژی داخلی تعریف می‌شود [۱]. با به کارگیری نظریه افت و خیز<sup>۲</sup> در حالت‌های تعادل، راپنیر نیز یک ساختار متریک متفاوت را که با مشتق مرتبه دوم تابع آنتروپی

مطالعه گذار فاز به یکی از زمینه‌های فعال و رو به رشد در فیزیک سیاه‌چاله تبدیل شده است. این مطالعه رویکردی جالب توجه برای تحقیق در مورد ریزساختارهای سیاه‌چاله‌ها برای ما فراهم می‌سازد و انتظار می‌رود که بتوان برهم‌کنش‌های میکروسکوپی را نیز براساس فیزیک آماری کشف کرد. بدین منظور هندسه ریمانی ابزاری سودمند برای ما فراهم می‌سازد تا

۱. Riemannian metric

۲. Fluctuation theory

نمای ۲ و نیز دامنه  $1/8$  - را دارد. بعداً ما در مرجع [۱۵] با در نظر گرفتن هندسه ترمودینامیکی (NTG) در فضای  $T-V$  (دما-حجم ویژه) به طور تحلیلی ثابت کردیم که چنین دامنه‌ای برای سیاه‌چاله‌های باردار پاددوسپته یک مقدار جهان شمول است که مستقل از ویژگی‌های فیزیکی سیستم نظیر بعد فضا زمان است. اخیراً در مرجع [۱۶] با استفاده از تراکم پذیری بی‌دررو، متریک هندسی جدیدی در فضای ترمودینامیکی  $P-V$  (فشار-حجم) معرفی شده است که خمش ذاتی مربوط به آن نیز در نزدیکی نقطه بحرانی به بی‌نهایت منفی ( $-\infty$ ) میل می‌کند و رفتار بحرانی با نمای ۲ و نیز دامنه  $9/2$  - را دارد.

علاوه بر خمش ذاتی، خمش خارجی<sup>۴</sup> نیز یک رویکرد جالب در فضای حالت ترمودینامیکی برای بررسی گذار فاز است [۱۷]. در حقیقت، خمش خارجی از یک ابرسطح معین در فضای ترمودینامیکی حاوی اطلاعات مفیدی در مورد موقعیت نقطه بحرانی مرتبه دوم و پایداری یک سیستم است [۱۸]. به عبارت دیگر خمش خارجی نقاط واگرایی یکسان و رفتار مشابه با ظرفیت گرمای ویژه حول چنین نقاطی دارد.

در سال‌های اخیر ترمودینامیک و گذار فاز سیاه‌چاله گوس بونت<sup>۵</sup> (GB)، که یک نظریه گرانشی تعمیم یافته است، به طور گسترده‌ای مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۹-۲۱]. در این مطالعات نشان می‌دهند که گذار فازی شبیه به شاره واندروالس (VdW) همیشه در سیاه‌چاله بدون بار گوس بونت در فضازمان‌های  $D \geq 5$  اتفاق می‌افتد و حتی در صورت عدم وجود بار الکتریکی، این نوع گذار فاز نیز می‌تواند در  $D=5$  همچنان مشاهده شود. همان طور که می‌دانید، در گرانش تعمیم یافته گوس بونت، حل‌های ایستا با تقارن کروی تنها در بعدها بالاتر از پنج امکان پذیر است و در  $D=4$ ، بر طبق نظریه لاولاک [۲۲] جمله ناشی از تصحیحات GB در معادله حرکت اینشتین، حذف خواهند شد، در نتیجه حل سیاه‌چاله‌ای با تصحیحات گوس بونت در چهار بعد وجود ندارد. با این وجود، اخیراً در مقاله [۲۳]، با تغییر مقیاس پارامتر جفت‌شدگی

ساخته شده است ارائه داده است [۲]. در عین حال، متریک واینهولد به وسیله تابع دما به عنوان ضریب هم‌مدیس<sup>۱</sup>، با متریک راپنیر ارتباط دارد. عموماً اعتقاد بر این است که در گذار فاز یک سیاه‌چاله، ارتباطی میان برهم‌کنش میکروسکوپی و حرکت‌های گرمایی درجات میکرو آزادی یک سیاه‌چاله وجود دارد. بنابراین با ترکیب گذار فاز و هندسه ترمودینامیکی می‌توان بر روی ریزساختارهای سیاه‌چاله‌ها تحقیق کرد. در این راستا در مرجع [۳]، از متریک هندسه ترمودینامیکی راپنیر برای شناخت نوع برهم‌کنش میان مولکول‌های سیاه‌چاله، استفاده شد. علاوه بر این، خمش ذاتی<sup>۲</sup> (نرده‌ای) ترمودینامیکی مربوط به متریک راپنیر مقیاسی از طول همبستگی سیستم را نشان می‌دهد که در نقطه بحرانی به سمت بی‌نهایت میل می‌کند [۴ و ۵]. در این راستا از تکینگی‌های خمش ساخته شده از متریک راپنیر برای یافتن نقاط گذار فاز در سیاه‌چاله‌ها استفاده شده است [۶-۸]. علیرغم این واقعیت، در برخی مثال‌ها [۹ و ۱۰]، خمش ذاتی هندسه راپنیر، در نقطه بحرانی رفتار تکین را از خود نشان نمی‌دهد. برای غلبه بر این مشکل، فرمول‌بندی جدیدی از هندسه راپنیر در مراجع [۱۱-۱۳] مطرح شد که در آن از ماتریس هسیان ساخته شده از پتانسیل‌های ترمودینامیکی مربوط به تابع انرژی (به جای تابع آنتروپی) که توسط تبدیلات لژاندر به یکدیگر مرتبط می‌شوند، استفاده می‌شود. این فرمول‌بندی جدید از هندسه ترمودینامیکی<sup>۳</sup> (NTG) امکان تناظر یک به یک بین نقاط بحرانی که در آنها گذار فاز رخ می‌دهد با تکینگی‌های خمش را فراهم می‌سازد.

از سوی دیگر، پدیده‌های بحرانی نظیر نمایه‌های بحرانی و روابط مقیاسی می‌توانند سبب آشکار شدن ویژگی‌هایی جهان شمولی در نزدیکی نقطه بحرانی برای سیستم ترمودینامیکی شوند. بنابراین بررسی رفتار بحرانی از کمیت‌های ترمودینامیکی حائز اهمیت است. همانگونه که در مراجع [۱۴ و ۱۵] به صورت عددی نشان داده شده است خمش ذاتی در نقطه بحرانی به بی‌نهایت منفی ( $-\infty$ ) میل می‌کند و رفتار بحرانی با

۱. Conformal factor

۲. Intrinsic curvature

۳. New Thermodynamics Geometry

۴. Extrinsic curvature

۵. Gauss-Bonnet

GB به صورت  $\alpha \rightarrow \alpha / (D-4)$  در معادلات حرکت سیاه‌چاله گوس بونت  $D$  بعدی و گرفتن حد  $D \rightarrow 4$ ، حل سیاه‌چاله ایستای غیر بدیهی با تقارن کروی برای نظریه اینشتین گوس بونت در چهار بعد، به دست آمد. به نظر می‌رسد این امر سبب می‌شود که حداقل یکی از فرضیات لاولاک نقض شود. لذا قابل پیش بینی بود که این مقاله مورد انتقادهای زیادی قرار گیرد. برای مثال در مقاله [۲۴] نشان داده شده که برای چنین نظریه‌ای نمی‌توان توصیفی از یک تانسور مرتبه دوم هموردا در چهار بعد را پذیرفت زیرا یک قسمت از تانسور گوس بونت همیشه در بعد بالاتر باقی خواهد ماند. البته این مشکل را می‌توان با در نظر گرفتن نسخه‌های منظم شده‌ای از گرانش اینشتین گوس بونت در چهار بعد رفع کرد [۲۵]. مثلاً با بهره‌مندی از رویه کلازو کلاین<sup>۱</sup> حد چهار بعدی نظریه اینشتین گوس بونت را می‌توان از طریق فشردن فضای  $D$  روی فضای بیشینه تقارن  $D-4$  و گرفتن حد  $D \rightarrow 4$  برای حذف کردن بعد چنین فضایی، ساخت [۲۵]. علاوه بر این در مراجع [۲۶ و ۲۷] نظریه گرانشی خوش تعریفی از نظریه چهار بعدی گوس بونت پیشنهاد شد که از روشی نظیر آنچه برای گرفتن حد  $D=2$  در نظریه گرانش اینشتین [۲۸] است، استفاده شد. در این نظریه جدید یک درجه آزادی نرده‌ای علاوه برای دو درجه آزادی تانسوری به نظریه وارد می‌شود که می‌توان آن را در زیرگروه نظریه‌های هرنسدسکی<sup>۲</sup> طبقه‌بندی کرد [۲۹]. اما اخیراً در مقاله [۳۰] نشان داده شده است که حتی با شکستن بخشی از تقارن دیفیومورفیسم<sup>۳</sup> می‌توان نظریه سازگاری از نظریه گرانشی اینشتین گوس بونت در چهار بعد را به دست آورد. همچنین در مقاله [۳۰] اشاره شده است که حل ایستا با تقارن کروی از چنین نظریه منجر به همان حل ارائه شده در [۲۳] است، اما به طور صریح این مطلب اثبات نشده است. بنابراین یکی از اهداف این مقاله، اثبات این ادعا است.

به‌طور کلی در بخش اول این مقاله، قصد داریم که ضمن بهره‌مندی از تجزیه ADM برای نظریه سازگار از نظریه

اینشتین گوس بونت در  $D=4$ ، به طور دقیقی حل مربوط به سیاه‌چاله بدون بار با تقارن کروی را استخراج کنیم. سپس در بخش بعد به بررسی ترمودینامیک چنین حلی خواهیم پرداخت. قبلاً با در نظر گرفتن تغییرات جفت‌شدگی گوس بونت در قانون اول ترمودینامیک، استفاده از متریک (NTG) یک منیفولد<sup>۴</sup> ترمودینامیکی ۳ بعدی را منتج می‌شود که جفت‌شدگی گوس بونت ( $\alpha$ ) یکی از ابعاد این فضا است [۳۱]. تطابق میان نقاط واگرایی خمش ذاتی این منیفولد ترمودینامیکی ۳ بعدی، با نقاط گذار فاز مشاهده شده است. در این تطابق، علاوه بر نقاط گذار فاز یک نقطه واگرایی اضافی در خمش ذاتی وجود دارد که ناشی از اثرات کوانتومی (تصحیحات لگاریتمی در آنتروپی) موجود در مدل اینشتین - گوس بونت در ۴ بعد است [۳۱]. از نقطه نظر هندسی در مقایسه با این مقاله، در اینجا ما خود را به ابرسطح‌های ۲ بعدی با معادله سطح  $\alpha$  ثابت از منیفولد ترمودینامیکی ۳ بعدی اشاره شده در بالا، محدود می‌سازیم که منجر به عدم مشاهده اثرات کوانتومی در خمش ذاتی از چنین سطوحی می‌شود. بنابراین انتظار می‌رود که نقاط واگرایی خمش ذاتی مربوط به این ابرسطوح دقیقاً در نقاط گذار فاز اتفاق بیافتند. در ادامه به‌عنوان یکی از اهداف مهم این مقاله که قبلاً در مرجع [۳۱] بررسی نشده است، نمایه‌های بحرانی و دامنه‌های جهان‌شمول را برای خمش ذاتی از یک منیفولد ۲ بعدی ترمودینامیکی و خمش خارجی روی ابرسطح‌های هم‌دما در چنین منیفولدی را محاسبه خواهیم کرد.

## ۲. سیاه‌چاله بدون بار اینشتین گوس بونت در $D=4$

برطبق نظریه لاولاک با در نظر گرفتن مجموعه‌ای از فرضیات منطقی، هر تانسور مرتبه دو بدون دیورژانس ساخته شده از متریک و مشتقات مرتبه اول و دوم متریک در فضای چهاربعدی تنها یک ترکیب خطی از تانسور اینشتین و خود متریک است [۲۲]. بنابراین برای ساخت گرانش‌های تعمیم یافته از نسبت عام نیازمند آن هستیم که حداقل یکی از فرضیات در نظریه لاولاک شکسته شود. با این وجود اخیراً در

۱. Kaluza-Klein-like procedure

۲. Horndeski theory

۳. Diffeomorphism

۴. Manifold

مدل‌های گرانشی تعمیم‌یافته کمینه دست‌بندی می‌شود. در این قسمت سعی داریم تا به طور صریحی حل سیاه‌چاله بدون بار (خنثی) از چنین نظریه سازگاری را به دست آوریم.

برای نظریه سازگار از گرانش چهاربعدی اینشتین-گوس-بونت به علت این که تقارن دیفیومورفیسم زمانی شکسته شده است به نظر طبیعی است تا از صورت‌مندی ADM زمانی

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt), \quad (1)$$

استفاده کنیم که در آن  $N$  تابع گذر<sup>۱</sup> و  $N^i$  بردار میل<sup>۲</sup> و نیز  $\gamma_{ij}$  متریک فضای سه بعدی را نشان می‌دهند. کنش گرانشی با ثابت کیهان‌شناسی این نظریه نیز با رابطه زیر داده می‌شود:

$$S_g = \frac{1}{16\pi G} \int dt d^3x N \sqrt{\gamma} \left[ {}_2R - \mathcal{M} + \alpha R_{4DGB} + \frac{\epsilon}{l^2} \right],$$

$$R_{4DGB} \equiv \frac{1}{2} \left( {}_2R^2 - 4R\mathcal{M} - \mathcal{M}^2 - \frac{1}{3} \left( {}_2R_{ij} R^{ij} - 4R_{ij} \mathcal{M}^{ij} - \mathcal{M}_{ij} \mathcal{M}^{ij} \right) \right), \quad (2)$$

که

$$\mathcal{M}_{ij} \equiv R_{ij} + \mathcal{K}^k{}_k \mathcal{K}_{ij} - \mathcal{K}_{ik} \mathcal{K}^k{}_j, \quad \mathcal{M} \equiv \mathcal{M}^i{}_i, \quad (3)$$

و

$$\mathcal{K}_{ij} \equiv \frac{1}{2N} (\dot{\gamma}_{ij} - 2D_{(i} N_{j)}) - \gamma_{ij} D^k \lambda_{GF}, \quad (4)$$

در اینجا مشتق زمانی با علامت نقطه به بالای عبارت مشخص شده است. همان‌طور که پیداست این نظریه خواص زیر را دارد: الف: تحت تقارن دیفیومورفیسم سه بعدی فضایی ناوردا است. ب: در حد  $\alpha \rightarrow 0$  به نظریه گرانشی اینشتین-هیلبرت میل می‌کند.

ج: تعداد درجات آزادی موضعی فیزیکی آن به مانند گرانش اینشتین دو است.

د: تمام تصحیحات گوس بونت یعنی  $R_{4DGB}$  از مرتبه مشتقی چهارم هستند.

ح: اگر تانسور وایل از متریک فضایی و نیز قسمت وایل از

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} (\dot{\gamma}_{ij} - 2D_{(i} N_{j)}) \quad \text{که} \quad K_{ik} K_{jl} - K_{il} K_{jk}$$

از گرانش D بعدی اینشتین-گوس-بونت صفر شود، در این

مقاله [۲۳] پیشنهاد شد که با گرفتن حد  $4 \rightarrow D$  از گرانش اینشتین گوس بونت در فضا زمان  $D > 4$ ، می‌توان یک معادله حرکت هموردا برای متریک چهاربعدی اینشتین گوس بونت ساخت که علاوه بر تانسور اینشتن و متریک شامل جملات جدیدی است. به بیانی دقیق‌تر، در این نظریه با ضرب ضریب  $(D-4)/1$  در عبارت گوس بونت قبل از گرفتن حد  $4 \rightarrow D$  از معادله حرکت، ضریب واگرایی  $(D-4)/1$  توسط عبارت گوس بونت که قبلاً بنابر نظریه لاولاک در چهاربعد ناپدید می‌شد، منجر به اثرات غیربدهی در معادله حرکت می‌شود. اما آیا واقعا این معادله با فرضیات نظریه لاولاک در تناقض نیست؟ در پاسخ به این سوال در مقاله [۳۰] نشان داده شده است که با در نظر گرفتن تمام شرایط لاولاک، اتحاد بیانجی در حد  $4 \rightarrow D$  شکسته می‌شود که خود بیانگر شکست تقارن دیفیومورفیسم است و این که درجات آزادی تغییر خواهد کرد.

ادعای نویسندگان مقاله [۲۳] بر آن است که تعداد درجات آزادی دینامیکی سیستم (یعنی قطبیدگی دو مد گرانشی) با گرفتن حد  $4 \rightarrow D$  از نظریه اینشتین گوس بونت D بعدی همچنان دو می‌ماند. اما همان گونه که در مقدمه اشاره شد در مرجع [۲۵] با استفاده از فرایند کالزو کلاین با فشرده‌سازی گرانش D بعدی روی فضای بیشینه تقارن  $4 \rightarrow D$  بعدی و گرفتن حدی که بعد این فضا ناپدید می‌شود، توانستند شکل منظمی از کنش نظریه چهاربعدی را پیشنهاد دهند. اما در نظریه پیشنهاد شده حضور یک درجه آزادی نرده‌ای علاوه بر دو درجه آزادی گرانشی امری اجتناب ناپذیر است. به بیانی صریح‌تر می‌توان گفت از این دیدگاه، نظریه گرانش چهاربعدی گوس بونت در دسته نظریه‌های انرده‌ای-تانسور هرنسکی طبقه‌بندی می‌شود. با این وجود اخیراً در مقاله [۳۰] پیشنهاد دیگری مطرح شده است که براساس آن نظریه سازگاری از اینشتین گوس بونت چهاربعدی می‌تواند تنها با دو درجه آزادی فیزیکی موضعی در مرتبه غیرخطی انتشار یابد. در حقیقت چنین نظریه سازگاری به علت شکست تقارن دیفیومورفیسم قابل تشخیص است. به بیانی دقیق‌تر ساخت چنین نظریه سازگاری تنها با شکست تقارن دیفیومورفیسم زمانی در محتوای

۱. Laplace function

۲. Shift vector

$$K_{ij} = -\frac{\gamma_{ij} D^\nu \lambda_{GF}}{\gamma N} \quad (10)$$

$$M_{ij} = \frac{(D^\nu \lambda_{GF})^\nu}{\gamma N^\nu} (\gamma \gamma_{ij} - \gamma_{ik} \gamma_j^k) + R_{ij}$$

$$K = \gamma^{ij} K_{ij} = -\frac{\gamma D^\nu \lambda_{GF}}{\gamma N}$$

$$M = \gamma^{ij} M_{ij} = \frac{\gamma (D^\nu \lambda_{GF})^\nu}{\gamma N^\nu} + R,$$

حال با قرار دادن روابط بالا در معادلات حرکت (۷) به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$D^\nu \left[ D^\nu \lambda_{GF} \left[ \gamma + \alpha \left( R + \frac{1}{\gamma} D^\nu \lambda_{GF} \right) \right] \right] = 0, \quad (11)$$

بنابراین به طور روشنی می‌توان  $\lambda_{GB} = 0$  را به عنوان حل معادله دیفرانسیلی بالا در نظر گرفت. همچنین جواب غیر بدیهی زیر را برای معادله دیفرانسیلی  $D^\nu \lambda_{GB} = 0$  در نظر گرفت (در این معادله ثابت انتگرال‌گیری صفر در نظر گرفته شده است).

$$\lambda_{GB} = \int_1^r \frac{C_1}{r'^2 \sqrt{f(r')}} dr' + C_2, \quad (12)$$

که  $C_1$  و  $C_2$  ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند. همان‌طور که در روابط (۱۰) مشاهده می‌کنید تمام عبارات شامل  $D^\nu \lambda_{GB}$  هستند، بنابراین با اعمال هر یک از جواب‌ها در این روابط به معادلات زیر خواهیم رسید.

$$K_{ij} = 0 \quad K = 0 \quad (13)$$

$$M_{ij} = R_{ij} \quad M = R,$$

حال با جایگذاری این اتحادها در معادله حرکت (۵) رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$R + \frac{\epsilon}{l^\nu} = \alpha \left( \gamma R_{ij} R^{ij} - \frac{\gamma}{\gamma} R^\nu \right), \quad (14)$$

و سپس بعد از به دست آوردن تانسور ریچی و نرده‌ای ریچی از متریک فضایی سرانجام به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$r^\nu + \frac{\gamma r^\nu}{l^\nu} - r^\nu f - r^\nu f' - \alpha (f - 1)(f - \gamma f' - 1) = 0, \quad (15)$$

با حل معادله دیفرانسیلی بالا جواب زیر حاصل می‌شود:

$$f(r) = 1 - \frac{r^\nu}{\gamma \alpha} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\gamma \alpha}{l^\nu} + \frac{\lambda \alpha GM}{r^\nu}} \right), \quad (16)$$

که در این رابطه  $M$  ثابت انتگرال‌گیری است (در حد  $l \rightarrow \infty$  و نیز با بازمقیاس کردن  $\alpha \rightarrow 16\pi G\alpha$  این حل، دقیقاً با حل

صورت گرفتن حد  $4 \rightarrow D$  از چنین حلی می‌تواند جوابی از نظریه چهاربعدی اینشتین-گوس بونت تعریف شده با کنش (۲) باشد. در واقع شرایط اشاره شده در بالا توسط انتخابی از قید پیمانه-ثابت که با ضریب نامعین لاگرانژ  $\lambda_{GB}$  وارد کنش شده است، قابل کنترل است. وجود چنین عبارتی از پیمانه ثابت به خاطر داشتن نظریه سازگاری با شکست تقارن لورنسی لازم است [۳۰].

در ادامه با محاسبه معادلات حرکت حاصل از وردش کنش نسبت به تابع گذر و بردار میل و ضریب نامعین لاگرانژ مقدار مناسبی از قید پیمانه-ثابت برای حل سیاه‌چاله‌های با تقارن کروی که قبلاً در مقاله [۲۳] ارائه شده، خواهیم رسید. با گرفتن وردش نسبت به تابع گذر و بردار میل و نیز ضریب نامعین لاگرانژ به ترتیب به روابط زیر خواهیم رسید:

$$M + \frac{\epsilon}{l^\nu} = \alpha \left( \gamma M_{ij} M^{ij} - \frac{\gamma}{\gamma} M^\nu \right), \quad (5)$$

$$D_i K - D_j K_i^j = \frac{\alpha}{\gamma} D_j (\epsilon R K_{ij} - \gamma K_{in} K_{ji} K^{nl} + \gamma \gamma_{ij} K_{nl} K_m^n K^{lm} - \gamma \gamma_{ij} R K + \gamma K K_{in} K_j^n - \gamma K_{ij} K^\nu) \quad (6)$$

$$\gamma \gamma_{ij} K^\nu + \gamma K M_{ij} - \gamma M_{ij}^n K_{jn} - \gamma K_{in} M_j^n + \gamma \gamma_{ij} K_{nm} M^{nm} + \gamma K_{ij} M + \gamma \gamma_{ij} K M),$$

$$D_i D^i \left( \gamma K + \alpha \left[ \gamma K^\nu + \epsilon R K - \gamma K M - \epsilon K^{nm} M_{nm} - \gamma K_n^l K^{nm} K_{ml} \right] \right) = 0, \quad (7)$$

اکنون با در نظر گرفتن شکل متریک

$$ds^\nu = -f(r) dt^\nu + \frac{1}{f(r)} dr^\nu + r^\nu (d\theta^\nu + \sin^\nu \theta d\varphi^\nu), \quad (8)$$

برای حل سیاه‌چاله کروی و مقایسه آن با متریک ADM می‌توان تساوی‌های زیر را در نظر گرفت:

$$N^\nu = f(r) \quad (9)$$

$$N^i = 0$$

$$\gamma = \text{diag} \left( 1/f(r), r^\nu, r^\nu \right),$$

همچنین

$$S = \int T^{-1} \left( \frac{\partial M}{\partial r_+} \right)_{\bar{\alpha}} dr_+ = \frac{\pi r_+^2}{G} + \frac{\alpha \pi}{G} \ln(r_+) + S_0, \quad (21)$$

که  $S_0$  ثابت انتگرال گیری است که به علت وجود عبارت لگاریتم نمی توان آن را به طور روشنی مشخص کرد. علاوه بر این آنتروپی بالا را می توان بر حسب مساحت افق رویداد  $A = 4\pi r_+^2$  به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$S = \frac{A}{4G} + \frac{\alpha \pi}{G} \ln \left( \frac{A}{A_0} \right), \quad (22)$$

در این رابطه  $A_0$  ثابتی با بعد مساحت است؛ به این علت که آرگمان لگاریتم بایستی بی بعد باشد.

### ۳. رفتار بحرانی هندسه های ترمودینامیکی

همان طور که در مقدمه اشاره شد فرمول بندی جدیدی از هندسه ترمودینامیکی بنام  $NTG$  در مرجع [۱۰] ارائه شده است که قادر به توضیح تطابق یک به یک میان تکنیکی های خمش و نقاط گذار فاز است. این هندسه با المان فاصله زیر بیان می شود:

$$dl_{NTG}^2 = \frac{1}{T} \left( \eta_i^j \frac{\partial^2 \Xi}{\partial X^j \partial X^l} dX^i dX^l \right), \quad (23)$$

که  $\eta_i^j = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$  و  $\Xi$  پتانسیل ترمودینامیکی است. همچنین  $X^i$  متغیرهای ترمودینامیکی فزونبر و نافزونبر هستند. لازم به ذکر است که متریک شناخته شده کوودو [۳۲] با یک تبدیل همدیس تکین از متریک  $NTG$  به دست می آید [۱۰]. البته ریشه های چنین تبدیلاتی باعث بروز نقاط واگرایی اضافی در خمش ذاتی می شوند که منجر به عدم تطابق یک به یک میان تکنیکی های خمش و نقاط گذار فاز می شود. از سوی دیگر اخیراً متریک ترمودینامیکی جدیدی به نام  $HPEM$  در [۳۳] معرفی شده است که برای بررسی نقاط گذار در سیاه چاله های مختلف مورد توجه قرار گرفته است [۳۴ و ۳۵]. همچنین به سادگی می توان نشان داد که متریک  $HPEM$  با یک تبدیل همدیس مشخص به متریک  $NTG$  مرتبط می شود.

به عنوان مثالی از متریک  $NTG$  در فضای ترمودینامیکی دو

خلاً به طور مجانبی تخت در مرجع [۲۳] برابر است). همان طور که مشاهده می شود این جواب دو شاخه با علامت مثبت و منفی دارد. زمانی که  $M = 0$ ، حل بالا به جواب زیر کاهش می یابد.

$$f(r) = 1 - \frac{r^2}{2\alpha} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\alpha}{l^2}} \right), \quad (17)$$

در این مورد شاخه منفی مطابق با فضا زمان پاددوسیتته  $AdS$  با شعاع مؤثر  $l_{eff} = \sqrt{2\alpha / (\sqrt{1 - 4\alpha/l^2} - 1)}$  است در حالی که در شاخه مثبت فضا زمان دوسیتته  $dS$  با شعاع مؤثر  $l_{eff} = \sqrt{2\alpha / (\sqrt{1 - 4\alpha/l^2} + 1)}$  را داریم. بنابراین در تشابه با سیاه چاله گوس بونت پاددوسیتته در بعدها بالاتر از چهار حل شاخه مثبت ممکن است ناپایدار باشد. بنابراین حل شاخه منفی را انتخاب می کنیم. علاوه بر این در حد  $\alpha \rightarrow 0$  این حل شاخه منفی به حل سیاه چاله شواتزشیلد پادوسیتته یعنی

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{l^2} - \frac{2GM}{r}, \quad (18)$$

میل می کند. این رابطه بیانگر جرم سیاه چاله بودن ثابت  $M$ ، در رابطه (۱۶) است. با فرض این که حل (۱۶) با شاخه منفی سیاه چاله با افق رویداد  $r_+$  را توصیف کند و به طور مجانبی فضا زمان  $AdS$  باشد، در این صورت با استفاده از شرط  $f(r_+) = 0$  در افق رویداد، جرم این سیاه چاله با رابطه زیر مشخص می شود:

$$M = \frac{r_+}{2G} \left( 1 + \frac{r_+^2}{l^2} + \frac{\alpha}{r_+^2} \right), \quad (19)$$

همچنین دمای هاوکینگ برای این سیاه چاله نیز با رابطه زیر داده می شود:

$$T = \frac{f'(r)}{4\pi} \Big|_{r=r_+} = \frac{3r_+^4 - l^2(\alpha - r_+^2)}{4\pi r_+(r_+^2 + 2\alpha)}, \quad (20)$$

اکنون با توجه به قانون اول ترمودینامیک یعنی  $dM = TdS + \dots$  که همیشه برای این نوع سیاه چاله ها برقرار است (علامت ... برای بعضی عبارات های کار نوشته شده است.)، آنتروپی با گرفتن انتگرال از قانون اول به مانند زیر به دست می آید.

دو بعدی ساخته شده از  $X^i = (T, V)$ ، می‌توان خمش خارجی این ابرسطوح را محاسبه کرد که خود به عنوان معیاری برای مطالعه رفتار بحرانی سیاه‌چاله‌ها استفاده می‌شود. به بیان دقیق‌تر خمش خارجی، اطلاعات در مورد نقاط گذار فاز و نیز رفتار سیستم حول این نقاط را نشان می‌دهد؛ به گونه‌ای که تکینگی‌های این خمش دقیقاً در نقاط گذار اتفاق می‌افتند و همچنین اطراف نقاط گذار جهت‌دهی مطابق با ظرفیت گرمایی دارد. از لحاظ هندسی اهمیت ابرسطوح  $T$  ثابت به علت نمودارهای هم‌دما در نمودار  $P-V$  است. بردار نرمال مربوط به این ابرسطوح با  $n_i = (n, p, v, T) = (\sqrt{C_V}/T, 0)$  و  $n^i = g^{ij}n_j = (\sqrt{C_V}/T, 0)$  هستند. در نتیجه خمش خارجی مربوط به این ابرسطوح با رابطه  $K = \nabla_i n^i$  تعریف می‌شود که منجر به رابطه زیر خواهد شد:

$$K_N = K \sqrt{C_V} = \frac{1}{\gamma} \left[ 1 - \frac{T \partial_V T P}{\partial_V P} \right], \quad (27)$$

در تشابه با خمش ذاتی بهنجار شده در رابطه بالا، خمش خارجی بهنجار شده تعریف شده است. همچنین در فضای پارامترهای کاهش یافته یعنی  $\hat{P} = P/P_c$  و  $\hat{V} = V/V_c$  و نیز  $\hat{T} = T/T_c$  تراکم‌پذیری هم‌دما  $\kappa_T$  را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\kappa_T \equiv -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{P_c \hat{V}} \left( \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{P}} \right)_{\hat{T}} = \frac{1}{P_c \hat{n}} \left( \frac{\partial \hat{n}}{\partial \hat{P}} \right)_{\hat{T}}, \quad (28)$$

که در این رابطه  $n = 1/v$  چگالی تعداد  $(\hat{n} = 1/\hat{v})$ ،  $v = V/N$  حجم ویژه  $(\hat{v} = v/v_c)$  و  $V$  حجم کل است. به منظور بسط کمیت‌های فیزیکی اطراف نقاط بحرانی  $T_c$ ،  $v_c$  و  $P_c$  شرایط  $(\partial_V P)_T = 0$  و  $(\partial_{V,V} P)_T = 0$  باید اعمال شوند. بدین منظور در ادامه نقاط بحرانی این سیاه‌چاله را می‌یابیم و رفتار ظرفیت گرمایی را با کمیت‌های هندسی معرفی شده مقایسه می‌کنیم. در فضای فاز تعمیم یافته، ثابت کیهان‌شناسی یا شعاع فضای پاددوسیه به عنوان فشار ترمودینامیکی با استفاده از رابطه  $P = 3/(8\pi l^2)$  تعبیر می‌شود [۳۶]. با استفاده از رابطه دما (۲۰) و جایگذاری شعاع  $l$  برحسب فشار  $P$  و با تعریف حجم ویژه  $v = 2r_+$ ، معادله حالت به صورت زیر به دست می‌آید [۳۱]:

بعدی می‌توانیم پتانسیل را انرژی آزاد یعنی  $\Xi = F$  در نظر بگیریم که  $X^i = (T, V)$  که  $T$  دما و  $V$  حجم هستند. در این صورت تکینگی‌های مربوط به این متریک دقیقاً در نقاط گذار فاز  $C_p$  اتفاق می‌افتد که  $P$  فشار است. بنابراین متریک مربوط به انرژی آزاد با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$dl_{NTG}^2 = \frac{1}{T} \left( -\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} dT^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} dV^2 \right) = \frac{C_V}{T^2} dT^2 + \frac{1}{T} \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T dV^2, \quad (24)$$

در رابطه بالا از رابطه دیفرانسیلی برای انرژی آزاد یعنی  $d = - +$  استفاده شده است. همان‌گونه که در مقدمه اشاره شد در فضای ترمودینامیکی تعمیم یافته یعنی در جایی که ثابت کیهان‌شناسی به عنوان فشار ترمودینامیکی در نظر گرفته می‌شود، رفتار بحرانی سیاه‌چاله‌های پاددوسیه مشابه با رفتار شار و اندروالس است. اگر چه ظرفیت گرمایی در حجم ثابت،  $C_V = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V$ ، برای چنین سیاه‌چاله‌هایی از جمله سیاه‌چاله مورد مطالعه صفر است (این مطلب در بخش بعد نشان داده شده است). ولی در تشابه با شار و اندروالس که ظرفیت گرمایی  $C_V = \frac{3}{4} k_B$  مقداری ثابت است، می‌توان ظرفیت چنین سیاه‌چاله‌هایی را به عنوان حد  $k_B \rightarrow 0$  شار و اندروالس در نظر گرفت [۱۴ و ۱۳]. اما این امر سبب صفر شدن دترمینان متریک بالا خواهد شد، لذا برای حل این مشکل  $C_V$  را، مانند شار و اندروالس عددی ثابت در نظر می‌گیریم که در حد  $k_B \rightarrow 0$  به صفر میل می‌کند. بنابراین بسیار مناسب است تا خمش ذاتی بهنجار شده  $R_N = C_V R$  را که با رابطه زیر به دست می‌آید در نظر بگیریم [۱۳].

$$R_N = RC_V = \frac{(\partial_V P)^2 - T^2 (\partial_{T,V} P)^2 + 2T^2 (\partial_V P) (\partial_{T,T,V} P)}{2(\partial_V P)^2}, \quad (25)$$

با توجه به معادله حالت برای سیاه‌چاله‌های و اندروالس می‌توان دید که فشار به طور خطی با دما در ارتباط است بنابراین  $\partial_{T,T,V} P = 0$  است و (۲۵) به رابطه زیر کاهش می‌یابد [۱۵]:

$$R_N = \frac{1}{\gamma} \left[ 1 - \left( T \frac{\partial_{V,T} P}{\partial_V P} \right)^2 \right], \quad (26)$$

علاوه بر این با انتخاب ابرسطوح  $T$  ثابت در منیفلد ترمودینامیکی

به‌وضوح این گرمای ویژه در نقطه بحرانی تکینگی دارد. در مرجع [۱۳] نشان داده شده است که علاوه بر ظرفیت گرمای ویژه، کمیت‌های هندسی مانند خمش ذاتی و خمش خارجی نیز از جمله کمیت‌هایی هستند که از آنها می‌توان به‌عنوان معیاری برای گذار فاز استفاده کرد و بین تکینگی‌های گرمای ویژه و خمش ذاتی و خارجی یک تناظر یک به یک وجود دارد. در شکل ۱ نمودار  $R_N, C_{P,\alpha}$  و  $K_N$  برحسب حجم ویژه  $\hat{v}$  به ازای دماهای کمتر، برابر و بیشتر از دمای بحرانی رسم شده است. نقاط گذار فاز معادل نقاط واگرایی گرمای ویژه هستند که به‌ازای دماهای کمتر از دمای بحرانی در دو نقطه و برابر با دمای بحرانی در یک نقطه گذار فاز داریم و درعین حال به ازای دماهای بالاتر از دمای بحرانی گذار فازی مشاهده نمی‌شود. مقایسه این نمودار با نمودار خمش ذاتی و خارجی نشان دهنده یک تناظر یک به یک بین نقاط گذار فاز برای گرمای ویژه و نقاط تکینگی خمش ذاتی و خارجی است.

معمولاً حول نقاط بحرانی، رفتار متغیرهای ترمودینامیکی به صورت تابع توانی از متغیرهای ترمودینامیکی کاهش یافته بیان می‌شود که به توان‌های آنها نمای بحرانی گفته می‌شود. برای مثال نمای بحرانی  $\beta$  توصیف کننده رفتار اختلاف چگالی تعداد برای مولکول‌های گاز و مایع در شاره و اندروالس یا به طور معادل سیاه‌چاله‌های بزرگ و کوچک برای سیاه‌چاله‌های پاددوسپته در امتداد منحنی  $\hat{P}-\hat{T}$  است، یعنی جایی که دو فاز گاز و مایع یا سیاه‌چاله بزرگ و کوچک باهم وجود داشته باشند. به عبارت دیگر:

$$\Delta n = n_g - n_l \propto (1 - \hat{T})^\beta, \quad T < T_c, \quad (35)$$

از سوی دیگر نماهای بحرانی  $\gamma$  و  $\gamma'$  به ترتیب عبارتند از: رفتار بحرانی تراکم‌پذیری هم دما  $\kappa_T$  در طول خط هم حجم  $\hat{n} = 1$  و منحنی  $\hat{P}-\hat{v}$  زمانی که دو فاز باهم وجود دارند.

بنابراین در مجاورت نقطه بحرانی

$$\kappa_T P_c \propto \begin{cases} (\hat{T} - 1)^{-\gamma} & T > T_c \\ (1 - \hat{T})^{-\gamma'} & T < T_c \end{cases}, \quad (36)$$

درعین حال نشان داده شده است که رفتار بحرانی خمش ذاتی  $R_N$  نزدیکی نقطه بحرانی یعنی در حد  $\hat{T} \rightarrow 1^\pm$ ، با روابط زیر

$$P = -\frac{1}{2\pi v^2} + \frac{T}{v} + \frac{2\alpha}{\pi v^4} + \frac{8\alpha T}{v^3}, \quad (29)$$

با داشتن این معادله حالت، نقطه بحرانی را می‌توان با حل  $(\partial_v P)_T = (\partial_{v,v} P)_T = 0$  به دست آورد [۳۱].

$$T_c = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{6\pi\sqrt{2}\alpha}; \quad v_c = 2\sqrt{(6+4\sqrt{3})\alpha}; \quad P_c = \frac{15-8\sqrt{3}}{288\pi\alpha}, \quad (30)$$

و

$$Z_c = \frac{P_c v_c}{T_c} = \frac{1}{12}(6 - \sqrt{3}), \quad (31)$$

که این کمیت قدری از مقدار  $Z_c = 3/8$  برای شاره و اندوالس کوچک‌تر است [۳۷]. با استفاده از پارامترهای کاهش یافته  $\hat{P} = \frac{P}{P_c}, \hat{v} = \frac{v}{v_c}, \hat{T} = \frac{T}{T_c}$  صورت زیر بازنویسی کرد [۳۱]:

$$\hat{P} = \frac{1}{11}(9 - 2\sqrt{3})\frac{1}{\hat{v}^2} + \frac{4}{11}(3\sqrt{3} - 2)\frac{\hat{T}}{\hat{v}^3} - \frac{6}{11}(1 + 2\sqrt{3})\frac{1}{\hat{v}^2} + \frac{4}{11}(6 + \sqrt{3})\frac{\hat{T}}{\hat{v}}, \quad (32)$$

درعین حال، نشانه‌های گذار فاز به طور معمول هنگامی ایجاد می‌شوند که ظرفیت گرمایی ویژه، علامت خود را تغییر دهد، که نشان دهنده تغییر پایداری در سیستم است. به بیانی روشن‌تر، ظرفیت گرمایی مثبت به معنای پایداری یک سیستم حرارتی است در حالی که ظرفیت گرمایی منفی نشان دهنده ناپایداری سیستم تحت اختلالات کوچک است. با استفاده از معادلات فوق، گرمای ویژه در فشار و جفت‌شدگی گوس بونت ثابت توسط رابطه زیر داده می‌شود:

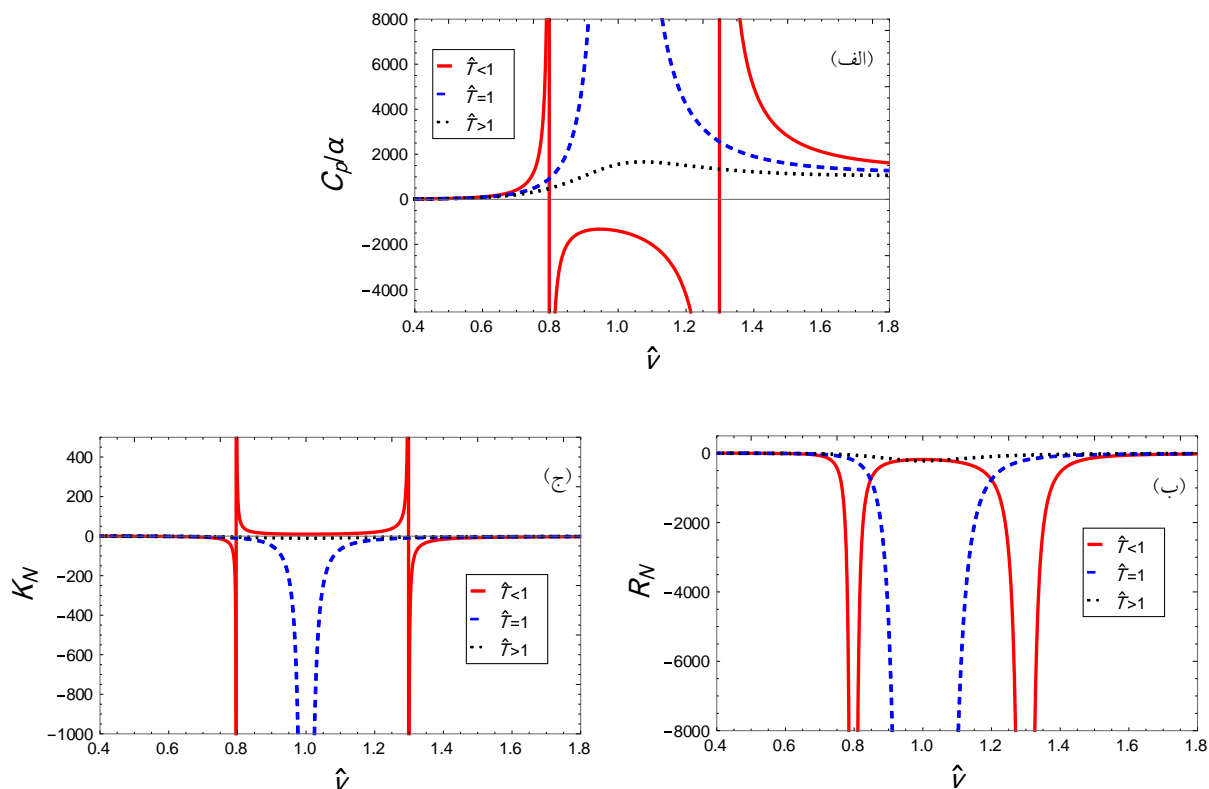
$$C_{P,\alpha} = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{P,\alpha} = T \frac{\{S, P, \alpha\}_{T,v,\alpha}}{\{T, P, \alpha\}_{T,v,\alpha}} = \frac{\pi^2 T v (v^2 + 8\alpha)^2}{\sqrt{(v^2(\pi T v - 1) + 8\alpha(1 + 3\pi T v))}}, \quad (33)$$

که در آن از روش و نمادگذاری براکت نامبو<sup>۱</sup> استفاده شده است (برای توضیحات بیشتر به پیوست مراجعه کنید). این ظرفیت گرمایی برحسب متغیرهای کاهش یافته عبارت است از:

$$C_{P,\alpha} = \frac{2\pi\hat{T}\hat{v} \left( (2\sqrt{3} + 3)\hat{v}^2 + 1 \right)^2 \alpha}{\hat{T} \left( (2\sqrt{3} + 3)\hat{v}^2 + 3 \right) \hat{v} - 3(\sqrt{3} + 2)\hat{v}^2 + \sqrt{3}}, \quad (34)$$

۱. Nambu





شکل ۱. تغییرات (الف)  $C_{p,\alpha}/\alpha$ ، (ب)  $R_N$  و (ج)  $K_N$  برحسب حجم ویژه  $\hat{v}$  به ازای دماهای کمتر (قرمز توپر)، برابر (آبی خط‌چین) و بیشتر از دمای بحرانی (سیاه نقطه چین) رسم شده است.

داده می‌شود [۱۵]:

$$R_N (1-\hat{T})^2 \approx -\frac{(\gamma' - \beta)^2}{2} \quad T < T_c, \quad (37)$$

$$R_N (1-\hat{T})^2 \approx -\frac{\gamma^2}{2} \quad T > T_c,$$

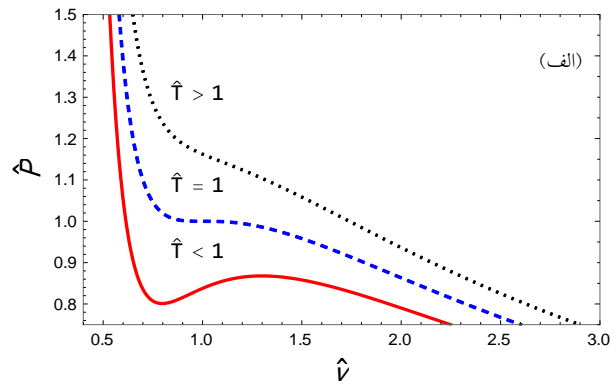
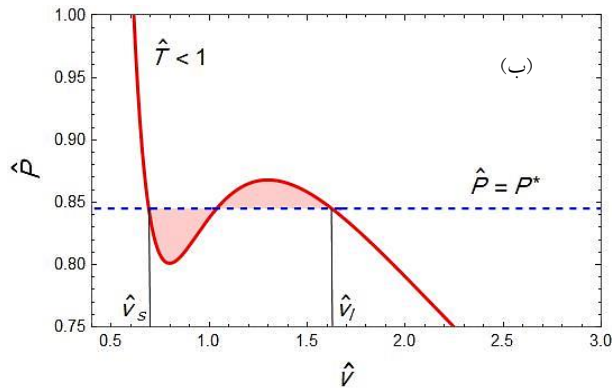
همان‌طور که مشخص است، نمای بحرانی خمشی ذاتی بهنجار شده در نزدیکی نقطه بحرانی، ۲ است، در حالی که دامنه آن زمانی که از طرف دماهای پایین به نقطه بحرانی نزدیک می‌شویم با زمانی که از دماهای بالا به آن نقطه نزدیک می‌شویم، مقداری متفاوت هستند. نکته قابل توجه که از رابطه بالا می‌توان دید این است که دامنه بحرانی از خمشی ذاتی تابعی از نماهای بحرانی دیگر کمیت‌های ترمودینامیکی نظیر چگالی تعداد و نیز تراکم پذیری هم دما است. به طور مشابه، رفتار خمشی خارجی بهنجار شده در نزدیکی نقطه بحرانی به صورت زیر است [۱۵].

$$K_N (1-\hat{T}) \approx -\frac{\gamma' - \beta}{2} \quad T < T_c, \quad (38)$$

$$K_N (1-\hat{T}) \approx -\frac{\gamma}{2} \quad T > T_c,$$

همان‌گونه که از روابط (۳۷) و (۳۸) مشهود است دامنه‌های بحرانی تابعی از نماهای بحرانی  $\beta$ ،  $\gamma$  و  $\gamma'$  هستند. به این علت که چنین نماهایی برای سیاه‌چاله‌های پاددوسیه که رفتار بحرانی شبیه شاره و اندروالس را از خود نشان می‌دهند معمولاً مقادیری یکسان و مستقل از پارامترهای فیزیکی مدل هستند [۱۹، ۳۶ و ۳۸]، بنابراین دامنه‌های بحرانی را می‌توان مقادیر جهان شمول در نظر گرفت.

برای بررسی بیشتر خصوصیات ترمودینامیکی این سیاه‌چاله، در ادامه به بررسی کمیت‌های ترمودینامیکی اعم از تغییرات چگالی تعداد دو فاز، تراکم‌پذیری هم دما و کمیت‌های هندسی مانند خمشی ذاتی و عرضی در مجاورت نقاط گذار فاز می‌پردازیم و نماهای بحرانی این کمیت‌ها نیز به دست خواهیم آورد. مقایسه این نماهای بحرانی با مقادیر متناظر با شاره و اندروالس و دیگر سیاه‌چاله‌ها حاکی از جهان‌شمول بودن رفتار این کمیت‌ها است. نمودار  $\hat{P}-\hat{v}$  این سیاه‌چاله در شکل ۲ الف رسم شده



شکل ۲. (الف) نمودار هم‌دمای  $\hat{P}-\hat{v}$  سیاه‌چاله گوس بونت ۴ بعدی. قرمز توپر به ازای  $\hat{T} < 1$ ، آبی خط‌چین به ازای  $\hat{T} = 1$  و سیاه نقطه‌چین به ازای  $\hat{T} > 1$  و (ب) روش مساحت‌های برابر ماکسول به ازای  $\hat{T} < 1$ .

$$\Delta \hat{n} \sim (1 - \hat{T})^\beta, \quad (40)$$

یا به‌طور معادل

$$\text{Ln}(\Delta \hat{n}) = \beta \text{Ln}(1 - \hat{T}) + C_1, \quad (41)$$

در امتداد منحنی‌های همزیستی دو فاز، نتایج برازش عددی زیر را به دست می‌آوریم که در شکل ۳ با خط آبی مشخص شده است.

$$\text{Ln}(\Delta \hat{n}) = 0.50012 \text{Ln}(1 - \hat{T}) + 2/4144, \quad (42)$$

با در نظر گرفتن خطای عددی، مقادیر شیب نمودارها نشان می‌دهند که نمای بحرانی  $\beta = 0.5$  است.

علاوه بر این، در فضای پارامترهای کاهش یافته تراکم-پذیری هم دما در فشار بحرانی ( $\kappa_T P_c$ ) را می‌توان از رابطه (۲۸) به دست آورد. برازش عددی رفتار  $\kappa_T P_c$  در امتداد منحنی همزیستی دو فاز از نمودار  $\hat{P}-\hat{v}$  در نزدیکی نقطه بحرانی مطابق شکل ۴ نشان می‌دهد. همان‌طور که از معادلات خط‌های مستقیم پیداست کمیت  $\kappa_T P_c$  یک رفتار جهان‌شمول با ضریب نمای بحرانی  $\gamma' \approx 1$  هم برای سیاه‌چاله کوچک و هم بزرگ دارد. همچنین با قرار دادن معادله حالت (۳۲) در رابطه (۲۸) برای تراکم پذیری هم دما داریم:

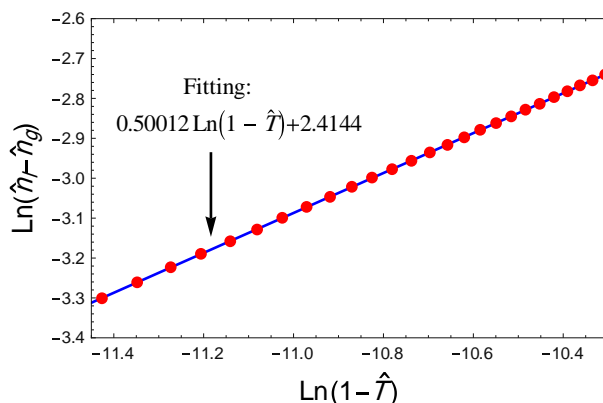
$$\kappa_T P_c = \frac{33 \left( (\sqrt{3} + 6) \hat{v}^{2/3} + 3\sqrt{3} - 4 \right) \hat{v}^{4/3}}{4 \left( 3 \left( 4\sqrt{3} + 13 \right) \hat{T} \hat{v}^{5/3} + 3 \left( 43 - 24\sqrt{3} \right) \hat{T} \hat{v}^{1/3} + \left( 56\sqrt{3} - 60 \right) \hat{T} \hat{v} - 3 \left( 13\sqrt{3} + 12 \right) \hat{v}^{2/3} + 43\sqrt{3} - 72 \right)}, \quad (43)$$

است، و همانند شماره واندروالس برای دماهای پایین‌تر از دمای بحرانی که یک رفتار نوسانی در منحنی دیده می‌شود، می‌توان از روش مساحت‌های برابر ماکسول<sup>۱</sup> در محاسبات این نمودار استفاده کنیم. هدف از این روش محاسباتی، جایگزینی ناحیه نوسانی با یک منحنی هم‌فشار  $P = P^*$  است. برش نمودار فشار به گونه‌ای است که سطح زیر و بالای منحنی هم‌فشار یکسان باشد (شکل ۲. ب):

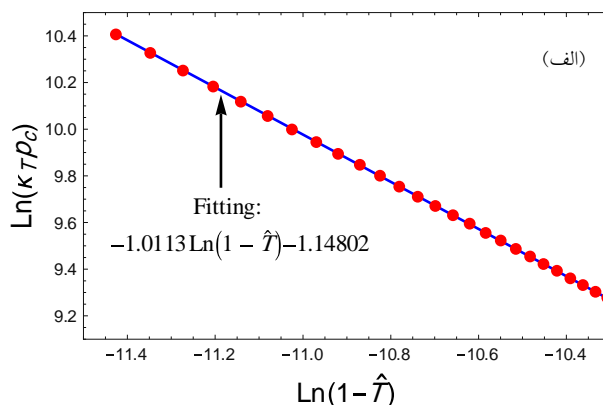
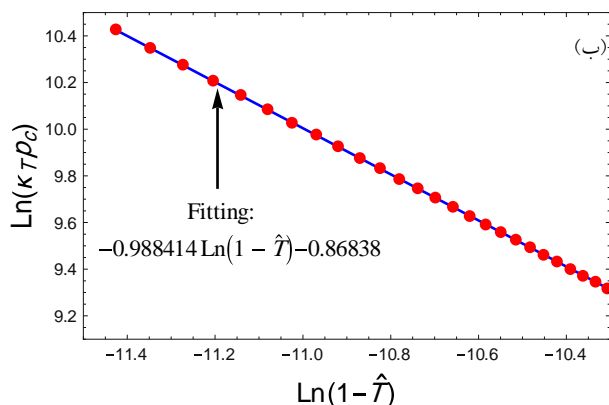
$$\int_{\hat{v}_s}^{\hat{v}_l} \hat{v} d\hat{P} = 0 \rightarrow P^*(\hat{v}_l - \hat{v}_s) = \int_{\hat{v}_s}^{\hat{v}_l} \hat{P} d\hat{v}, \quad (39)$$

تفسیر فیزیکی بخش فشار ثابت از این منحنی، همزیستی دو فاز سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ است. نتایج عددی به دست آمده از این محاسبات، دما و حجم کاهش یافته برای دو فاز سیاه‌چاله کوچک و بزرگ است که از آنها در محاسبات مربوط به کمیت‌های هندسی استفاده می‌کنیم. با در نظر گرفتن شکل کاهش یافته چگالی تعداد بین فازهای سیاه‌چاله کوچک و بزرگ، می‌توان معادله حالت را بر حسب  $\hat{n}$  نیز بیان کرد. بنابراین معادل حجم‌های مربوط به سیاه‌چاله کوچک و بزرگ ( $\hat{v}_l, \hat{v}_s$ ) در محاسبات قبلی، می‌توان چگالی تعداد ( $\hat{n}_l, \hat{n}_s$ ) را جایگزین و در عین حال اختلاف چگالی تعداد ( $\Delta \hat{n} = \hat{n}_s - \hat{n}_l$ ) را به دست آورد. با فرض این که در نزدیکی نقاط بحرانی ( $\hat{T} = 1$ )، اختلاف چگالی تعداد رابطه‌ای به شکل زیر باشد، می‌توان یک برازش عددی متناسب انجام داد.

۱. Maxwell area construction



شکل ۳. تغییرات  $\text{Ln}(\hat{n}_s - \hat{n}_l)$  بر حسب  $\text{Ln}(1 - \hat{T})$  با دایره های قرمز پرشده، شیب خط مستقیم آبی برازش شده برای داده های عددی در امتداد منحنی همزیستی دو فاز  $0.50012$  است.



شکل ۴. تغییرات  $\text{Ln}(k_T P_C)$  بر حسب  $\text{Ln}(1 - \hat{T})$  با دایره های قرمز پرشده، شیب خط مستقیم آبی برازش شده برای داده های عددی در امتداد منحنی همزیستی دو فاز، (الف)  $-1.0113$  برای سیاهچاله کوچک و (ب)  $-0.988414$  برای سیاهچاله بزرگ.

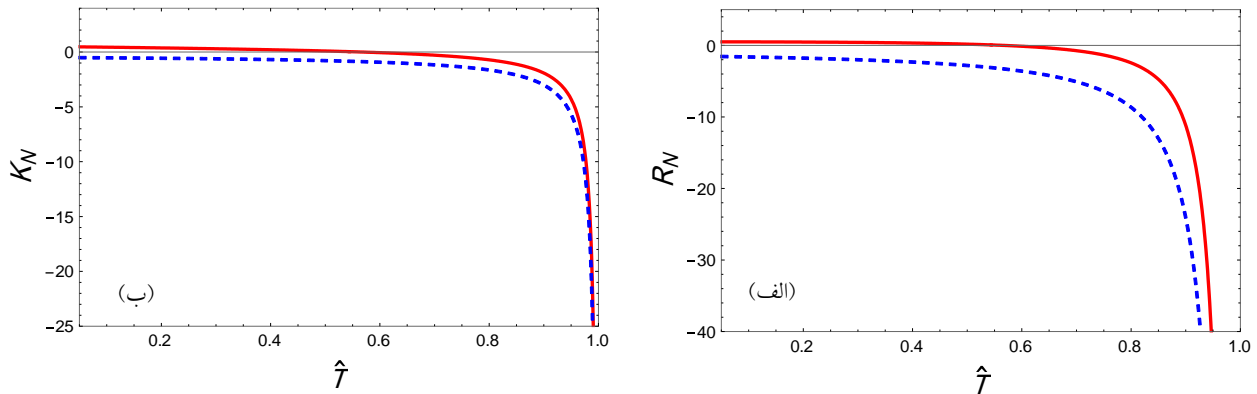
انجام محاسبات به صورت عددی هستیم. با استفاده از نتایج به دست آمده برای دما و حجم کاهش یافته دو فاز سیاهچاله کوچک و بزرگ، در شکل ۵ خمشی ذاتی و خارجی بهنجار شده در امتداد منحنی همزیستی دو فاز بر حسب دمای کاهش یافته  $\hat{T}$  رسم شده است. همان طور که از شکل دیده می شود، این خمشی‌ها در بیشتر دماها منفی است و اندازه آن با کاهش دما کاهش می یابد و تنها به ازای دماهای پایین برای سیاهچاله کوچک اندکی بزرگتر از صفر است. بنابراین، در بازه های دماهای پایین که در آن ناحیه مطابق شکل ۵  $R_N > 0$ ، ریزساختارهای آنها برخلاف شاره  $VdW$  برهم کنش دافعه دارند [۱۴]. در دماهای مجاور صفر،  $R_N \rightarrow 0$  ( $K_N \rightarrow 0$ )

اکنون در امتداد خط هم حجم  $\hat{v} = 1$  با تعریف پارامتر  $t = \hat{T} - 1$  با گرفتن جمله غالب در بسط تیلور از رابطه بالا به رابطه زیر می رسیم.

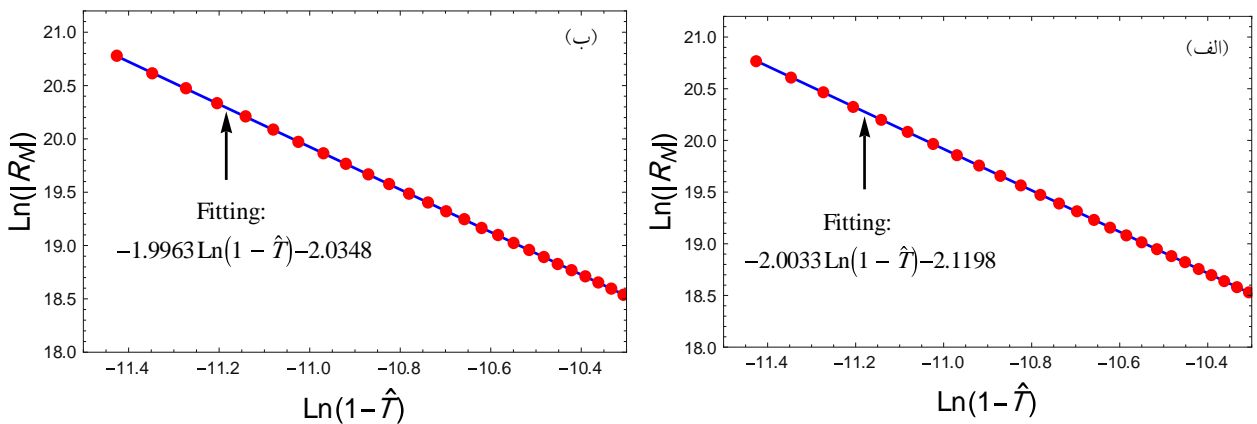
$$\kappa_T P_C = \frac{23(1 + 2\sqrt{3})}{8(27 - \sqrt{3})t} + O(t'), \quad (44)$$

که با مقایسه با رابطه (۳۶) نمای بحرانی در امتداد خط هم حجم،  $\gamma = 1$  است.

در ادامه، رفتار خمشی ذاتی و خارجی بهنجار شده،  $K_N, R_N$  را در امتداد منحنی همزیستی دو فاز و در امتداد خط هم حجم در مجاورت نقطه بحرانی بررسی می کنیم. با توجه به وجود جمله لگاریتمی در رابطه خمشی‌ها تنها قادر به



شکل ۵. تغییرات (الف)  $R_N$  و (ب)  $K_N$  بر حسب  $\hat{T}$ . قرمز توپر برای سیاه‌چاله کوچک و آبی خط‌چین برای سیاه‌چاله بزرگ.



شکل ۶. تغییرات  $\ln(R_N)$  بر حسب  $\ln(1-\hat{T})$  با دایره های قرمز پرشده، شیب خط مستقیم آبی برازش شده برای داده های عددی در امتداد منحنی همزیستی دو فاز (الف)  $-2,0033$  - برای سیاه‌چاله کوچک و (ب)  $-1,9963$  - برای سیاه‌چاله بزرگ.

$$\ln(R_N)_i = -v_i \ln(1 - \hat{T}) + C_i \quad i = s, l, \quad (46)$$

در امتداد منحنی‌های همزیستی دو فاز، نتایج برازش عددی زیر را به دست می آوریم که در شکل ۶ با خط آبی مشخص شده اند.

$$\begin{aligned} \ln(R_N)_s &= -2/0.033 \ln(1 - \hat{T}) - 2/1.198 \\ \ln(R_N)_l &= -1/9963 \ln(1 - \hat{T}) - 2/0.348, \end{aligned} \quad (47)$$

با در نظر گرفتن خطای عددی، مقادیر شیب نمودارها نشان می دهند که نمای بحرانی  $\sigma = 2$  است و به عبارت دیگر:

$$R_N(1 - \hat{T})^\sigma = -e^{\frac{C_s + C_l}{2}} = -e^{\frac{-2/1.198 - 2/0.348}{2}} \approx -\frac{1}{8}, \quad (48)$$

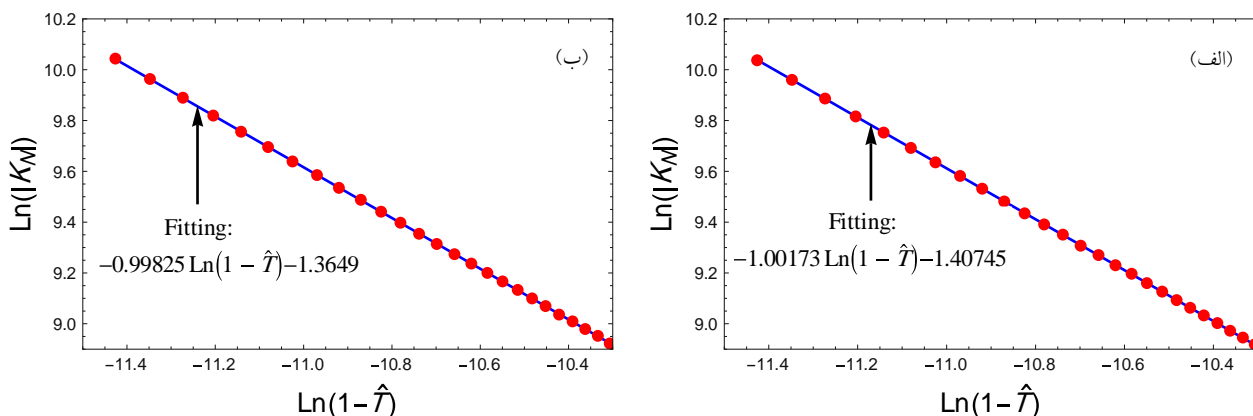
این کمیت یک مقدار جهان شمول دارد و با نتایج سیاه‌چاله‌های  $Ads$  و شماره و اندروالس نیز در تطابق است [۱۴، ۱۵ و ۳۹]. علاوه بر آن، خمش ذاتی بهنجار شده  $R_N$  می‌تواند نامزدی

و در نقطه بحرانی،  $R_N(K_N)$  به سمت منفی بی‌نهایت می‌رود. درعین حال، اندازه خمش ذاتی فاز سیاه‌چاله کوچک از فاز سیاه‌چاله بزرگ بیشتر است و اگر اندازه خمش ذاتی را معیاری از قدرت برهمکنش‌ها بدانیم، برهمکنش‌های فاز سیاه‌چاله کوچک از فاز سیاه‌چاله بزرگ آن قوی‌تر هستند.

در مرحله بعد، می‌خواهیم نمای بحرانی  $R_N$  را در نزدیکی نقطه بحرانی بررسی کنیم، که می‌تواند برخی از خصوصیات جهان‌شمول این سیستم را نشان دهد. با فرض این که در نزدیکی نقاط بحرانی، خمش ذاتی رابطه‌ای به شکل زیر دارد، می‌توان یک برازش عددی متناسب انجام داد.

$$R_N \sim -(1 - \hat{T})^{-\sigma}, \quad (49)$$

یا به‌طور معادل



شکل ۷. تغییرات  $\ln(|K_N|)$  بر حسب  $\ln(1-\hat{T})$  با دایره های قرمز پرشده، شیب خط مستقیم آبی برازش شده برای داده های عددی در امتداد منحنی همزیستی دو فاز (الف)  $-1,00173$  برای سیاهچاله کوچک و (ب)  $-0,99825$  برای سیاهچاله بزرگ.

زیر بیان می شود که این نتایج در توافق با سیاهچاله های  $AdS$  و شماره واندروالس  $VdW$  است و نشان دهنده جهان شمول بودن این کمیت ها برای این سیاهچاله است [۱۴، ۱۵ و ۳۹].

$$\begin{cases} R_N(1-\hat{T})^\gamma \approx -\frac{1}{\gamma} & T < T_c \\ R_N(1-\hat{T})^\gamma \approx -\frac{1}{\gamma} & T > T_c \end{cases}, \quad (53)$$

$$\begin{cases} K_N(1-\hat{T})^\gamma \approx -\frac{1}{\gamma} & T < T_c \\ K_N(1-\hat{T})^\gamma \approx -\frac{1}{\gamma} & T > T_c \end{cases}, \quad (54)$$

بسیار جالب است که نتایج عددی بالا با نتایج تحلیلی در روابط (۳۷) و (۳۸) با قرار دادن  $\gamma = \gamma' = 1$  و  $\beta = 1/2$  در تطابق کامل است. علاوه بر این می توان دید که دامنه های بحرانی مستقل از تغییرات ثابت جفت شدگی گوس بونت است که نشانه ای از جهان شمول بودن چنین دامنه هایی است.

#### ۴. نتیجه گیری

در این مقاله، در ابتدا حل سیاهچاله بدون بار با تقارن کروی از نظریه سازگار اینشتین گوس بونت در چهار بعد [۳۰] را به طور دقیق محاسبه کردیم. سپس رفتار بحرانی کمیت های ترمودینامیکی نظیر ظرفیت گرمایی و تراکم پذیری هم دما و نیز چگالی تعداد برای چنین حلی را در نزدیکی نقطه بحرانی مطالعه کردیم. به بیانی دقیق تر نتایج نشان می دهند که نمایه های بحرانی تغییر چگالی عددی  $\Delta n$  در امتداد فاز همزیستی

برای مطالعه خواص میکروسکوپی یک سیاهچاله  $AdS$  باشد. در عین حال، با فرض این که در نزدیکی نقاط بحرانی، خمش خارجی رابطه ای به شکل زیرداشته باشد، می توان یک برازش عددی متناسب انجام داد.

$$K_N \sim -(1-\hat{T})^{-\delta}, \quad (49)$$

یا به طور معادل

$$\ln|K_N|_i = -\delta_i \ln(1-\hat{T}) + C_i \quad i = s, l \quad (50)$$

در امتداد منحنی های همزیستی دو فاز، نتایج برازش عددی زیر را به دست می آوریم که در شکل ۷ با خط آبی مشخص شده اند.

$$\ln|K_N|_s = -1/00173 \ln(1-\hat{T}) - 1/40745 \quad (51)$$

$$\ln|K_N|_l = -0/99825 \ln(1-\hat{T}) - 1/3649,$$

با در نظر گرفتن خطای عددی، مقادیر شیب نمودارها نشان می دهند که نمای بحرانی  $\delta = 1$  است و به عبارت دیگر:

$$K_N(1-\hat{T}) = -e^{\frac{C_s+C_l}{2}} = -e^{\frac{-1/40745-1/3649}{2}} \approx -\frac{1}{4}, \quad (52)$$

این کمیت نیز یک مقدار جهان شمول دارد و با نتایج سیاهچاله های  $AdS$  و شماره واندروالس نیز در تطابق است [۱۴ و ۱۵].

به طور خلاصه، بررسی رفتار خمشی ذاتی و خارجی بهنجار شده برای سیاهچاله گوس بونت ۴ بعدی و محاسبه نمای بحرانی و دامنه های آنها در مجاورت نقطه بحرانی به صورت

خمش‌های ترمودینامیکی در مرز برای نظریه همدیس دما دار چیست؟ این سؤال می‌تواند به‌عنوان چشم اندازی از کارهای آینده در این زمینه باشد.

### پیوست

مشتق جزئی برای تابع‌هایی با  $n+1$  متغیر را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد [۹]:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_{h_1, \dots, h_n} = \frac{\{f, h_1, \dots, h_n\}_{q_1, q_2, \dots, q_{n+1}}}{\{g, h_1, \dots, h_n\}_{q_1, q_2, \dots, q_{n+1}}}, \quad (1-پ)$$

که در آن توابع  $f, g$  و  $h_n (n=1, 2, \dots)$  تابعی از متغیرهای  $q_i (i=1, 2, \dots, n+1)$  و نماد  $\{\dots\}$  به براکت نامبو موسوم است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{f, h_1, \dots, h_n\}_{q_1, q_2, \dots, q_{n+1}} = \sum_{ijk\dots l=1}^{n+1} \varepsilon_{ijk\dots l} \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial h_1}{\partial q_j} \frac{\partial h_2}{\partial q_k} \dots \frac{\partial h_n}{\partial q_l}, \quad (2-پ)$$

برای یک مثال خاص که در آن کمیت‌های  $f, g$  و  $h$  تابع‌های صریحی از  $(a, b)$  باشند، رابطه فوق به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_h = \frac{\{f, h\}_{a,b}}{\{g, h\}_{a,b}}, \quad (3-پ)$$

که در آن  $\{\dots\}$  براکت پواسون به‌صورت زیر است:

$$\{f, h\}_{a,b} = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_b \left(\frac{\partial h}{\partial b}\right)_a - \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)_a \left(\frac{\partial h}{\partial a}\right)_b. \quad (4-پ)$$

سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ  $\beta=0/5$  است؛ در حالی که نمای بحرانی  $\gamma'=1$  برای کمیت تراکم پذیری هم دما  $K_T$  حاصل می‌شود. علاوه بر این در امتداد خط هم حجم، نمای بحرانی تراکم پذیری هم دما  $\gamma=1$  است. از سوی دیگر، استفاده از هندسه ترمودینامیکی  $NTG$  نیز اطلاعات مفیدی از چنین نماهای بحرانی را در اختیار ما قرار می‌دهد. همچنین خمش‌های هندسی اعم از خمش ذاتی و خارجی، می‌تواند مکان نقاط گذار و نیز اطلاعاتی در مورد پایداری یا عدم پایداری سیستم حول نقاط گذار فاز را از خودشان نشان دهند. درعین حال علامت این کمیت‌های هندسی اطلاعاتی از نوع برهم‌کنش‌های بین ریزساختارهای سیاه‌چاله (برهم‌کنش جاذبه یا دافعه) بیان می‌کند. بسیار جالب توجه است که رفتار بحرانی خمش ذاتی بهنجار شده  $R_N$  و خمش خارجی بهنجار شده  $K_N$  در امتداد فاز همزیستی سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ به صورت  $R_N(1-\hat{T})^2 = -1/8$  و  $K_N(1-\hat{T}) = -1/4$  برای  $\hat{T} < 1$  و نیز در امتداد خط هم حجم به صورت  $R_N(1-\hat{T})^2 = K_N(1-\hat{T}) = -1/2$  برای  $\hat{T} > 1$  هستند. همان‌طور که مشاهده می‌شود دامنه‌های بحرانی مستقل از تغییرات ثابت جفت‌شدگی گوس بونت است که خود دلیلی بر جهان‌شمول بودن چنین دامنه‌هایی است.

به‌علت این که سیاه‌چاله‌های پاددوسیه از جمله سیاه‌چاله مورد بررسی در این مقاله از اهمیت فوق‌العاده‌ای در نظریه دوگانگی پیمانانه-گرانش [۴۰] برخوردار هستند، این سؤال جالب مطرح می‌شود که تعبیر دوگان چنین رفتار بحرانی از

### مراجع

1. F Weinhold, *J. Chem. Phys.* **63** (1975) 2479.
2. G Ruppeiner, *Rev. Mod. Phys.* **67** (1995) 605, [Erratum-ibid. **68** (1996) 313].
3. S W Wei and Y-X Liu, *Phys. Rev. Lett.* **115** (2015) 111302, Erratum: *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 169903.
4. G Ruppeiner, *Phys. Rev. A* **20** (1979) 1608.
5. J Aman, I Bengtsson, and N Pidokrajt, *Gen. Rel. Grav.* **35** (2003) 1733.
6. J Aman and N Pidokrajt, *Phys. Rev. D* **73** (2006) 024017.
7. B Mirza and M Zamani-Nasab *JHEP* **0706** (2007) 059.
8. M Kord Zangeneh, et al., *Eur. Phys. J. C* **77** (2017) 423.
9. T Sarkar, G Sengupta, and B Nath Tiwari *JHEP* **0611** (2006) 015.
10. S A H Mansoori and B Mirza, *Eur. Phys. J. C* **74** (2014) 2681.
11. S A H Mansoori, B Mirza, and M Fazel, *JHEP* **1504** (2015) 115.
12. S A Hosseini Mansoori and B Mirza, *Phys. Lett. B* **799** (2019) 135040.

13. S W Wei, Y X Liu, and R B Mann, *Phys. Rev. Lett.* **123** (2019) 071103.
14. [14] S W Wei, Y X Liu, and R B Mann, *Phys. Rev. D* **100** (2019) 124033.
15. S A H Mansoori, M Rafiee, and S -W Wei, *Phys. Rev. D.* **102** (2020) 124066.
16. A Dehyadegari, A Sheykhi, and S-W Wei, *Phys. Rev. D* 102 (2020) 104013.
17. S A H Mansoori, B Mirza, and E Sharifian, *Phys. Lett. B* **759** (2016) 298.
18. M Zhang, X Y Wang, and W B Liu, *Phys. Lett. B* **783** (2018) 169.
19. S -W. Wei and Y-X. Liu, *Phys. Rev. D* **87** (2013) 044014.
20. R -G. Cai, L -M. Cao, L Li, and R -Q. Yang, *JHEP* **1309** (2013) 005.
21. S -W. Wei and Y -X. Liu, *Phys. Rev. D* **90** (2014) 044057.
22. D Lovelock, *J. Math. Phys.* **13** (1972) 874.
23. D Glavan and C Lin, *Phys. Rev. Lett.* **124** (2020) 081301.
24. M Gurses, T C Sisman, and B Tekin, *Eur. Phys. J. C* **80** (2020) 647.
25. R A Hennigar, et al., *JHEP***07** (2020) 027.
26. H Lu and Y Pang, *Phys.Lett. B* **809** (2020) 135717.
27. P G Fernandes, P Carrilho, T Clifton, and D J Mulryne, *Phys. Rev. D* **102** (2020) 024025.
28. R B Mann and S Ross, *Class. Quant. Grav.* **10** (1993) 1405.
29. G W Horndeski, *Int J Theor. Phys.* **10** (1974) 363.
30. K Aoki, M A Gorji, and S Mukohyama, *Phys. Lett. B* **810** (2020) 135843.
31. S A Hosseini Mansoori, *Phys. Dark Univ.* **31** (2021) 100776.
32. H Quevedo, *Gen. Rel. Grav.* **40** (2008) 971.
33. S H Hendi, et al., *Eur. Phys. J. C* **75** (2015) 507.
34. S H Hendi, et al., *Phys. Rev. D* **92** (2015) 064028.
35. S H Hendi, S Panahiyan, and M Momennia, *Int. J. Mod. Phys. D* **25** (2016) 1650063.
36. D Kubiznak and R B Mann, *JHEP* **1207** (2012) 033.
37. D C Johnston, "*Advances in Thermodynamics of the van der Waals Fluid*", Morgan & Claypool Publishers (2014)
38. A Dehyadegari, et al., *Phys.Lett. B* **791** (2019) 30.
39. S-W Wei and Y-X. Liu, *Phys. Rev. D* **101** (2020) 104018.
40. J M Maldacena, *Int.J.Theor.Phys.* **38** (1999) 1113 .