مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۲۲، شمارهٔ ۱، بهار ۱۴۰۱
DOI: 10.47176/ijpr.22.1.11352

یک مدل عاری از تکینگی برای پتانسیل بار نقطه‌ای در حضور یک برش تکانه در فضای اقلیدسی D بعدی ($D \geq ۳$)

سعید نبی‌پور و سید کامران مؤیدی*

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه اراک، اراک

پست الکترونیکی: s-moayedi@araku.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۸/۲۶ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۴۰۰/۱۰/۱۴)

چکیده

در نظریهٔ الکتروستاتیک ماکسول، پتانسیل الکتروستاتیکی مربوط به یک بار نقطه‌ای در مکان قرار گرفتن بار بی‌نهایت است. در این مقاله یک مدل فاقد تکینگی برای پتانسیل بار نقطه‌ای در حضور یک برش تکانهٔ $p_{\max}$ براساس یک دگرگونش تک پارامتری از جبر هایزنبرگ در یک فضای فاز $۲D$ بعدی ارائه می‌شود. به ازای $p_{\max} \to \infty$ نتایج به دست آمده در این مقاله به نتایج حاصل از الکتروستاتیک ماکسول معمولی برای یک بار نقطه‌ای تبدیل می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: فضای فاز، جبر هایزنبرگ دگرگون شده، الکتروستاتیک ماکسول، برش تکانه، پتانسیل بار نقطه‌ای

۱. مقدمه

بر اساس تجارب روزمره به نظر می‌رسد، فضایی که ما در آن زیست می‌کنیم باید سه بعدی باشد. با این وجود گروهی از فیزیکدانان بر این باورند که شاید فضا ابعادی بیشتر از سه بعد داشته باشد [۱-۳]. در واقع ایدهٔ وجود ابعاد فضایی اضافی برای نخستین بار توسط تئودور کالوزا[۱] در سال ۱۹۲۱ میلادی و اسکار کلاین[۲] در سال ۱۹۲۶ میلادی مطرح شد [۱-۳]. این دو نفر فرض کردند که فضا ابعاد اضافه‌ای دارد که این ابعاد اضافی به دلیل کوچکی بیش از حد مشاهده پذیر نیستند. بر طبق نظریهٔ کالوزا-کلاین یک فضا-زمان $D+۱$ بعدی ساختاری به شکل $K_{D+۱} = M_۴ \times K_n$ دارد که $M_۴$ معرف فضا-زمان چهار بعدی بوده و K_n معرف یک فضای فشرده n بعدی است. در مدل‌های کالوزا-کلاین ارتباط میان تعداد کل ابعاد فضایی، یعنی D با تعداد ابعاد فضایی اضافی n به شکل $D = n + ۳$ است [۱ و ۲]. بر اساس مطالعات انجام گرفته در گرانش کوانتومی و نظریهٔ ریسمان، فضای فشرده K_n می‌تواند به شکل یک کرهٔ n

۱. Theodor Kaluza

۲. Oskar Klein

بعدی، یعنی S^n و یا یک چنبرهٔ n بعدی، یعنی $T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times ... \times S^1}_{n\ \ times}$ باشد [۱و ۲]. امروزه فیزیکدانان معتقدند که بررسی قوانین فیزیک در یک فضای D بعدی، صرف نظر از جذابیت‌های ریاضی می‌تواند به درک عمیق‌تری از قوانین فیزیک در جهان واقعی لااقل در مقیاس ماکروسکوپیک که برای آن $D=3$ است منجر شود [۱–۳]. نظریهٔ الکترومغناطیس ماکسول یکی از بنیادی‌ترین نظریه‌های علم فیزیک است که به بررسی قوانین مربوط به برهم‌کنش میان ذرات باردار در مقیاس ماکروسکوپیک می‌پردازد [۴]. این نظریه می‌تواند پدیده‌هایی نظیر انتشار نور در محیط‌های ناهمگن که برای آن محیط‌ها، ضریب شکست تابعی از مکان در نظر گرفته می‌شود و هم‌چنین انتشار امواج الکترومغناطیسی در داخل موجبرها را توصیف کند [۵–۷]. برای تعیین شکل پتانسیل کولن که همان پتانسیل وابسته به یک بار نقطه‌ای q در مبدأ یک فضای اقلیدسی D بعدی است لازم است تا معادلهٔ پواسون زیر حل شود

$$\nabla_D^2\, \phi(\vec{x}) = -\frac{q}{\varepsilon_0}\, \delta^{(D)}(\vec{x}), \tag{۱}$$

که $\delta^{(D)}(\vec{x}) = \delta(x^1)\delta(x^2)...\delta(x^D)$ تابع دلتای دیراک و $\nabla_D^2 = \sum_{i=1}^{D} \partial_i \partial_i$ عملگر لاپلاس در فضای اقلیدسی D بعدی هستند. در مراجع [۱، ۲ و ۸] معادلهٔ (۱) به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شده است که این معادله پاسخ دقیقی به شکل زیر دارد:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{\varepsilon_0 (D-2)\, \Omega_{D-1}}\ \frac{1}{r^{D-2}}, \tag{۲}$$

که $r = (\sum_{i=1}^{D} (x^i)^2)^{\frac{1}{2}}$ بوده و $\Omega_{D-1} = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}$ مساحت گوی واحد در فضای اقلیدسی D بعدی است. به ازای $D=3$ رابطهٔ (۲) به رابطهٔ $\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ تبدیل می‌شود که همان شکل آشنای پتانسیل کولنی در یک فضای اقلیدسی سه بعدی است [۴]. در مرجع [۸] نویسندگان با بهره‌گیری از روش منظم‌سازی ابعادی نشان داده‌اند که پتانسیل کولنی معرفی شده در رابطهٔ (۲) به ازای $D=2$ به شکل زیر در می‌آید:

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \ln r + const. \tag{۳}$$

همان گونه که روابط (۲) و (۳) نشان می‌دهند مقدار پتانسیل الکتروستاتیکی $\phi(\vec{x})$ در مکان قرار گرفتن بار نقطه‌ای q ($r=0$) به ازای $D \geq 3$ به شکل توانی و به ازای $D=2$ به صورت لگاریتمی واگرا می‌شود. یکی دیگر از ایرادهای وارد بر نظریهٔ الکترومغناطیس ماکسول مسئلهٔ نامتناهی شدن خود–انرژی مربوط به بارهای نقطه‌ای در این نظریه است. یکی از روش‌های ممکن برای دستیابی به یک فرمول‌بندی متناهی از نظریهٔ الکترومغناطیس ماکسول که در آن مقدار خود–انرژی وابسته به بارهای نقطه‌گون نظیر الکترون مقداری متناهی به دست آید وارد کردن ایدهٔ وجود یک کمینهٔ طول قابل اندازه‌گیری در اندازه‌گیری فواصل مکانی به درون ساختار این نظریه است [۹–۱۳]. به لحاظ تاریخی فرضیهٔ وجود یک طول کمینه در اندازه‌گیری بازه‌های مکانی برای نخستین بار در مدل‌های گوناگون برای گرانش کوانتومی نظیر نظریهٔ ریسمان مطرح شده است که در اینجا برای مطالعهٔ شرح کاملی از این موضوع خواننده را به مقالهٔ مروری [۹] ارجاع می‌دهیم. نکته‌ای که در اینجا توجه به آن ضروری به نظر می‌رسد آن است که در هنگام باز فرمول‌بندی[۱] نظریه‌های میدان همانند نظریهٔ الکترودینامیک ماکسول در حضور یک کمینهٔ طول قابل اندازه‌گیری، پارامتر کمینهٔ طول به مانند یک تنظیم کننده عمل کرده و باعث حذف بسیاری از واگرایی‌ها در نظریهٔ میدان باز فرمول‌بندی شده بر اساس فرض وجود یک طول کمینه در اندازه‌گیری بازه‌های مکانی می‌شود [۱۴–۱۷]. در سال ۲۰۱۶ میلادی فیزیکدان اوکراینی تکاچوک[۲] موفق به ارائهٔ گسترش تک پارامتری از جبر هایزنبرگ در یک فضای اقلیدسی D بعدی شد که در ساختار این جبر وجود یک برش تکانه پیش‌بینی شده بود [۱۵]. در بخش ۲ این مقاله، مروری کوتاه بر ساختار جبر هایزنبرگ دگرگون شده[۳] معرفی شده توسط

۱. Reformulation

۲. Tkachuk

۳. Deformed Heisenberg algebra

تکاچوک در مرجع [۱۵] خواهیم داشت. در بخش ۳ شکل صریح معادلهٔ پواسون در نظریهٔ الکتروستاتیک ماکسول بر اساس ساختار جبری معرفی شده در بخش ۲ این مقاله، در حضور یک برش تکانه در یک فضای اقلیدسی D بعدی، بـه دست آورده می‌شود. در بخش ۴ با حل معادلهٔ پواسون تعمیم یافتهٔ معرفی شده در بخش۳، برای یک بار نقطه‌ای q واقع در مبدأ فضای اقلیدسی D بعدی به ازای $D \geq ۳$ ، شکل دقیق پتانسیل الکتروستاتیکی بار نقطه‌ای در چارچوب ساختار جبری معرفی شده در بخش ۲ به دست می‌آید. در بخش نتیجه‌گیری این مقاله نشان می‌دهیم که برای اندازهٔ پتانسیل الکتروستاتیکی تعمیم یافته وابسته به یک بار نقطه‌ای q در بخش ۴، برای نقاط بسیار نزدیک به بار نقطه‌ای q ($r \to ۰$) برخلاف نظریهٔ ماکسول معمولی مقداری متناهی به دست می‌آید. هم‌چنین در رژیم انرژی‌های پایین که جبر هایزنبرگ دگرگون شده معرفی شده در مرجع [۱۵] به جبر هایزنبرگ معمولی تبدیل می‌شود، پتانسیل الکتروستاتیکی تعمیم یافته وابسته به یک بار نقطه‌ای در بخش ۴ به رابطهٔ (۲)، یعنی همان پتانسیل الکتروستاتیکی مربوط به بار نقطه‌ای در نظریهٔ ماکسول معمولی در یک فضای اقلیدسی D بعدی تبدیل می‌شود.

۲. جبر هایزنبرگ دگرگون شده در یک فضای فاز $۲D$ بعدی

در سال ۲۰۱۶ میلادی تکاچوک گسترش تک پارامتری از جبر هایزنبرگ در یک فضای فاز کوانتومی $۲D$ بعدی به شکل زیر ارائه داد [۱۵]:

$$\left[X^i, X^j\right] = ۰, \tag{۴}$$

$$\left[P^i, P^j\right] = ۰, \tag{۵}$$

$$\left[X^i, P^j\right] = i\hbar\sqrt{۱+\beta P^۲}\left(\delta^{ij} + \beta P^i P^j\right), \quad \forall i, j \in \{۱,۲,...,D\}, \tag{۶}$$

که β یک پارامتر ثابت نامنفی با بعد $(momentum)^{-۲}$ بوده و $P^i = \left(P^۱, P^۲, ..., P^D\right)$ و $X^i = \left(X^۱, X^۲, ..., X^D\right)$ بـه ترتیب مؤلفه‌های عملگر مکان و تکانهٔ تعمیم یافته هستند. هم‌چنین $P = (\sum_{i=۱}^{D}(P^i)^۲)^{\frac{۱}{۲}}$ طول بردار تکانه در فضای فاز $۲D$ بعدی دگرگون شده است. در مرجع [۱۵] تکاچوک نشان داده است که عملگرهای مکان و تکانهٔ تعمیم یافتهٔ $\left(X^i, P^i\right)$ در جبر هایزنبرگ دگرگون شده (۴) تا (۶) نمایش شبه مکانی به صورت زیر دارند:

$$X^i = x^i, \tag{۷}$$

$$P^i = \frac{p^i}{\sqrt{۱-\beta p^۲}}, \qquad \forall i \in \{۱,۲,...,D\}, \tag{۸}$$

که $p = (\sum_{i=۱}^{D}(p^i)^۲)^{\frac{۱}{۲}}$ طول بردار تکانه در فضای فاز غیر دگرگون شده $\left(x^i, p^i\right)$ است. شرط حقیقی بودن P^i در رابطهٔ (۸) مستلزم آن است که p نامساوی زیر را برآورده سازد

$$\mathrm{p} \leq \frac{۱}{\sqrt{\beta}}. \tag{۹}$$

باید توجه داشت که در رابطهٔ (۹) با وجود این که حالت تساوی منجر به مقدار بی‌نهایت برای تکانه می‌شود ولی این مقدار بی‌نهایت هنوز حقیقی باقی می‌ماند. با توجه به رابطهٔ (۸) ارتباط میان P با p چنین است:

$$P = \frac{p}{\sqrt{۱-\beta p^۲}}. \tag{۱۰}$$

بنا به رابطهٔ (۱۰)، بازهٔ $۰ \leq p \leq \frac{۱}{\sqrt{\beta}}$ در فضای فاز $\left(x^i, p^i\right)$ متناظر با بازهٔ $۰ \leq P < +\infty$ در فضای فاز $\left(X^i, P^i\right)$ است و این بدان معنا است که در جبر هایزنبرگ دگرگون شده (۴) تا (۶)، p مقدار بیشینه‌ای برابر با

$$\mathrm{p}_{\max} = \frac{۱}{\sqrt{\beta}}, \tag{۱۱}$$

دارد. رابطهٔ (۱۱) نشان دهندهٔ وجود یک برش تکانه روی اندازهٔ p است. بنا به رابطهٔ (۱۱) در جبر هایزنبرگ دگرگون شدهٔ (۴) تا (۶) می‌توان یک طول کمینه به شکل

$$\ell_۰ := \frac{\hbar}{p_{max}} = \hbar\sqrt{\beta}, \tag{۱۲}$$

تعریف کرد. با توجه به تعریف $\ell_۰$ در رابطهٔ (۱۲)، نمایش شبه مکانی برای عملگر P^i در رابطهٔ (۸) را می‌توان چنین نوشت:

$$P^i = \frac{p^i}{\sqrt{1-\frac{\ell_0^2}{\hbar^2}p^2}}, \qquad \forall i \in \{1,2,...,D\}. \tag{۱۳}$$

همان‌گونه که روابط (۷) و (۱۳) نشان می‌دهند در حد $\ell_0 \to 0$، عملگرهای مکان و تکانهٔ تعمیم یافتهٔ X^i و P^i به عملگرهای مکان و تکانهٔ متعارف x^i و $p^i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i} = -i\hbar\partial_i$ تبدیل می‌شوند. روابط (۷) و (۱۳) نشان می‌دهند که در هنگام باز فرمول‌بندی یک نظریهٔ میدان از منظر جبر هایزنبرگ دگرگون شدهٔ (۴) تا (۶) لازم است تا عملگرهای مکان و مشتق استاندارد، یعنی (x^i,∂_i) بر طبق دستورالعمل زیر با عملگرهای مکان و مشتق تعمیم یافتهٔ (X^i,D_i) جایگزین شوند:

$$x^i \to X^i = x^i, \tag{۱۴}$$

$$\partial_i \to D_i := \frac{1}{\sqrt{1+\ell_0^2\nabla_D^2}}\partial_i, \quad \forall i \in \{1,2,...,D\}. \tag{۱۵}$$

بدیهی است که در حد $\ell_0 \to 0$، مشتق تعمیم یافتهٔ D_i در رابطهٔ (۱۵) به مشتق معمولی ∂_i تبدیل می‌شود.

۳. باز فرمول‌بندی نظریهٔ الکتروستاتیک ماکسول در فضای فاز $2D$ بعدی (x^i,p^i) با فرض وجود یک برش تکانهٔ $p_{max}=\frac{1}{\sqrt{\beta}}$

چگالی لاگرانژی برای پتانسیل الکتروستاتیکی $\phi(\vec{x})$ در حضور چشمهٔ خارجی $\rho(\vec{x})$ در یک فضای اقلیدسی D بعدی به صورت زیر است [۱۱]:

$$\mathcal{L}(\phi,\partial_i\phi) = \frac{1}{2}\varepsilon_0(\partial_i\phi)(\partial_i\phi)-\rho\phi. \tag{۱۶}$$

رابطهٔ (۱۶) چگالی لاگرانژی توصیف کنندهٔ نظریهٔ الکتروستاتیک ماکسول است. تحت اثر تبدیل مختصاتی به شکل رابطهٔ (۱۴)، پتانسیل الکتروستاتیکی $\phi(\vec{x})$ و چگالی بار الکتریکی $\rho(\vec{x})$ به صورت زیر تبدیل پیدا می‌کنند:

$$\phi(\vec{x}) \to \Phi(\vec{X}) = \phi(\vec{x}), \tag{۱۷}$$

$$\rho(\vec{x}) \to \mathrm{P}(\vec{X}) = \rho(\vec{x}). \tag{۱۸}$$

با توجه به روابط (۱۵)، (۱۶)، (۱۷) و (۱۸) چگالی لاگرانژی وابسته به الکتروستاتیک ماکسول در چارچوب جبر هایزنبرگ دگرگون شدهٔ (۴) تا (۶) به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\Phi,D_i\Phi) &= \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(D_i\Phi(\vec{X})\right)\left(D_i\Phi(\vec{X})\right)-\mathrm{P}(\vec{X})\Phi(\vec{X})\\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{1}{\sqrt{1+\ell_0^2\nabla_D^2}}\partial_i\phi(\vec{x})\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+\ell_0^2\nabla_D^2}}\partial_i\phi(\vec{x})\right)\\ &\quad -\rho(\vec{x})\phi(\vec{x}).\end{aligned} \tag{۱۹}$$

بعد از انجام اندکی محاسبات می‌توان نشان داد که رابطهٔ (۱۹) به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\varepsilon_0(\partial_i\phi)(\partial_i\phi)-\rho\phi\\ &+\frac{1}{2}\varepsilon_0\ell_0^2(\partial_i\partial_j\phi)(\partial_i\partial_j\phi)\\ &+\frac{1}{2}\varepsilon_0\ell_0^4(\partial_i\nabla_D^2\phi)(\partial_i\nabla_D^2\phi)\\ &+\frac{1}{2}\varepsilon_0\partial_j\Gamma_j+O(\ell_0^6),\end{aligned} \tag{۲۰}$$

که

$$\begin{aligned}\Gamma_j := &-\ell_0^2(\partial_i\phi)(\partial_i\partial_j\phi)\\ &+\frac{3}{4}\ell_0^4\left[(\partial_i\phi)(\partial_j\nabla_D^2\partial_i\phi)-(\partial_i\partial_j\phi)(\partial_i\nabla_D^2\phi)\right].\end{aligned} \tag{۲۱}$$

دو جملهٔ نخست در سمت راست رابطهٔ (۲۰) همان چگالی لاگرانژی توصیف کنندهٔ نظریهٔ الکتروستاتیک ماکسول، یعنی رابطهٔ (۱۶) است. سایر جملات ظاهر شده در سمت راست رابطهٔ (۲۰)، اثرات ناشی از دگرگونش جبر هایزنبرگ را نشان می‌دهند. در رژیم انرژی‌های پایین که متناظر با حد $\ell_0 \to 0$ است، مدل (۲۰) نظریهٔ الکتروستاتیک ماکسول معمولی در یک فضای اقلیدسی D بعدی را بازتولید می‌کند. لازم به تذکر است که جملهٔ $\frac{1}{2}\varepsilon_0\partial_j\Gamma_j$ در رابطهٔ (۲۰) یک جملهٔ مشتق کلی بوده و تأثیری در معادلات حرکت ندارد، بنابراین مدل (۲۰) را می‌توان به صورت مؤثر زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\varepsilon_0(\partial_i\phi)(\partial_i\phi)+\frac{1}{2}\varepsilon_0\ell_0^2(\partial_i\partial_j\phi)(\partial_i\partial_j\phi)\\ &+\frac{1}{2}\varepsilon_0\ell_0^4(\partial_i\nabla_D^2\phi)(\partial_i\nabla_D^2\phi)-\rho\phi+O(\ell_0^6).\end{aligned} \tag{۲۲}$$

اکنون معادلهٔ حرکت وابسته به رابطهٔ (۲۲) را به دست می‌آوریم. در مرجع [۱۸] نشان داده شده است که اگر چگالی لاگرانژی

توصیف کنندهٔ میدان ϕ به شکل زیر باشد

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}\left(\phi,\ \partial_{i_1}\phi,\ \partial_{i_1}\partial_{i_2}\phi,\partial_{i_1}\partial_{i_2}\partial_{i_3}\phi,\dots\right), \qquad (۲۳)$$

معادلهٔ اویلر-لاگرانژ وابسته به میدان ϕ چنین خواهد شد:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\partial_{i_1}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{i_1}\phi\right)}\right)+\partial_{i_1}\partial_{i_2}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{i_1}\partial_{i_2}\phi\right)}\right)-\dots$$
$$+(-1)^k\ \partial_{i_1}\partial_{i_2}\dots\partial_{i_k}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{i_1}\partial_{i_2}\dots\partial_{i_k}\phi\right)}\right)+\dots=0. \qquad (۲۴)$$

اگر چگالی لاگرانژی (۲۲) را در معادلهٔ اویلر-لاگرانژ تعمیم یافته (۲۴) قرار دهیم، معادلهٔ حرکت زیر برای پتانسیل الکتروستاتیکی $\phi(\vec{x})$ به دست می‌آید:

$$\nabla_D{}^2\phi(\vec{x})-\ell_0{}^2\nabla_D{}^2\nabla_D{}^2\phi(\vec{x})+\ell_0{}^4\nabla_D{}^2\nabla_D{}^2\nabla_D{}^2\phi(\vec{x})+O\left(\ell_0{}^6\right)=-\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}. \qquad (۲۵)$$

لازم به ذکر است که در به دست آوردن معادلهٔ (۲۵) از تعریف زیر استفاده شده است [۱۸]

$$\frac{\partial\phi_{i_1i_2\cdots i_k}}{\partial\phi_{j_1j_2\cdots j_k}}=\delta_{i_1}^{j_1}\,\delta_{i_2}^{j_2}\dots\delta_{i_k}^{j_k}\ , \qquad (۲۶)$$

که

$$\phi_{i_1i_2\cdots i_k}:=\partial_{i_1}\partial_{i_2}\dots\partial_{i_k}\phi. \qquad (۲۷)$$

معادلهٔ (۲۵) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\left[1-\left(\ell_0{}^2\nabla_D{}^2\right)+\left(\ell_0{}^2\nabla_D{}^2\right)^2-\dots\right]\nabla_D{}^2\phi(\vec{x})=-\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}. \qquad (۲۸)$$

عبارت داخل کروشه در سمت چپ معادلهٔ (۲۸) به عبارت $\frac{1}{1+\ell_0{}^2\nabla_D{}^2}$ همگرا بوده از این رو معادلهٔ (۲۸) را می‌توان به شکل بستهٔ زیر نوشت:

$$\frac{\nabla_D{}^2}{1+\ell_0{}^2\nabla_D{}^2}\phi(\vec{x})=-\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}, \qquad (۲۹)$$

و یا

$$\frac{\nabla_D{}^2}{1+\frac{\hbar^2}{p_{max}{}^2}\nabla_D{}^2}\phi(\vec{x})=-\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}. \qquad (۳۰)$$

معادلهٔ (۳۰) همان معادلهٔ پواسون در حضور برش تکانهٔ $p_{\max}$ (رابطهٔ(۱۱)) است. در حد $\ell_0\to 0$ ($p_{\max}\to\infty$) معادلهٔ پواسون تعمیم یافتهٔ (۲۹) و یا (۳۰) به همان معادلهٔ آشنای پواسون در الکتروستاتیک ماکسول استاندارد، یعنی معادلهٔ $\nabla_D{}^2\phi(\vec{x})=-\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}$ تبدیل می‌شود.

۴. تعیین شکل دقیق پتانسیل الکتروستاتیکی مربوط به بار نقطه‌ای در چارچوب جبر هایزنبرگ دگرگون شده

معادلهٔ پواسون تعمیم یافتهٔ (۲۹) برای یک بار نقطه‌ای q واقع در مبدأ فضای اقلیدسی D بعدی به ازای $D\geq 3$ به شکل زیر است:

$$\frac{\nabla_D{}^2}{1+\ell_0{}^2\nabla_D{}^2}\phi(\vec{x})=-\frac{q}{\varepsilon_0}\,\delta^{(D)}(\vec{x}). \qquad (۳۱)$$

برای حل معادلهٔ (۳۱) از روش تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم. تابع دلتای دیراک $\delta^{(D)}(\vec{x})$ و پتانسیل الکتروستاتیکی $\phi(\vec{x})$ در حضور برش تکانهٔ $p_{max}=\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ نمایش انتگرالی به صورت زیر دارند:

$$\delta^{(D)}(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^D}\int_{k\leq\frac{1}{\ell_0}}d^Dk\ e^{i\vec{k}.\vec{r}}\ , \qquad (۳۲)$$

$$\phi(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^D}\int_{k\leq\frac{1}{\ell_0}}d^Dk\ e^{i\vec{k}.\vec{r}}G\left(\vec{k}\right). \qquad (۳۳)$$

در نوشتن روابط (۳۲) و (۳۳) از این واقعیت استفاده شده است که ارتباط میان بردار تکانهٔ $\vec{p}$ و بردار موج $\vec{k}$ به صورت $\vec{p}=\hbar\vec{k}$ بوده، از این رو رابطهٔ $p_{max}=\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ معادل با رابطهٔ $k_{max}=\frac{1}{\ell_0}$ خواهد شد ($k=(\sum_{i=1}^{D}(k^i)^2)^{\frac{1}{2}}$). پس از جایگذاری روابط (۳۲) و (۳۳) در معادلهٔ (۳۱)، شکل تابع گرین $G\left(\vec{k}\right)$ در فضای موج D بعدی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$G\left(\vec{k}\right)=\frac{q}{\varepsilon_0}\frac{1-\ell_0{}^2k^2}{k^2}. \qquad (۳۴)$$

اگر رابطهٔ (۳۴) را در رابطهٔ (۳۳) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{1}{(2\pi)^D}\int_{k\le \frac{1}{\ell_0}} d^D k\, \frac{1-\ell_0^2 k^2}{k^2} e^{i\vec{k}.\vec{r}}. \qquad (۳۵)$$

برای محاسبهٔ انتگرال معرفی شده در رابطهٔ (۳۵)، از مختصات فوق کروی[1] در فضای موج D بعدی استفاده می‌کنیم که در آن عنصر حجم $d^D k$ به شکل زیر است [۱۹]:

$$d^D k = k^{D-1} dk \prod_{i=1}^{D-1} sin^{D-1-i}\theta_i\, d\theta_i, \qquad (۳۶)$$

که

$$0\le k \le \frac{1}{\ell_0}, \qquad (۳۷)$$

$$0\le\theta_{D-1}\le 2\pi, \qquad (۳۸)$$

$$0\le\theta_i\le\pi, \qquad 1\le i\le D-2. \qquad (۳۹)$$

اگر رابطهٔ (۳۶) را در رابطهٔ (۳۵) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}) = &\frac{q}{\varepsilon_0}\frac{1}{(2\pi)^D}\int_0^{\frac{1}{\ell_0}} dk\; k^{D-1}\frac{1-\ell_0^2k^2}{k^2}\\ &\int_0^{2\pi} d\theta_{D-1}\int_0^{\pi} sin\,\theta_{D-2}\, d\theta_{D-2}\int_0^{\pi} sin^2\theta_{D-3}\, d\theta_{D-3}\\ &\ldots\int_0^{\pi} sin^{D-3}\theta_2\, d\theta_2\int_0^{\pi} sin^{D-2}\theta_1\, e^{ikr\cos\theta_1}\, d\theta_1\\ = &\frac{q}{\varepsilon_0}\frac{\Omega_{D-2}}{(2\pi)^D}\int_0^{\frac{1}{\ell_0}} dk\; k^{D-1}\frac{1-\ell_0^2k^2}{k^2}\\ &\int_0^{\pi} sin^{D-2}\theta_1\, e^{ikr\cos\theta_1}\, d\theta_1,\end{aligned}$$

(۴۰)

که $\Omega_{D-2} = \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)}$ مساحت گوی واحد در فضای اقلیدسی $D-1$ بعدی است. در نوشتن رابطهٔ (۴۰) فرض کرده‌ایم که بردار مکان $\vec{r}$ با راستای بردار موج $\vec{k}$ زاویهٔ θ_1 بسازد. برای محاسبهٔ انتگرال $\int_0^{\pi} sin^{D-2}\theta_1\, e^{ikr\cos\theta_1}\, d\theta_1$ از انتگرال زیر استفاده می‌کنیم [۱۹]

$$\int_0^{\pi} e^{i\beta\cos x}\, sin^{2\nu} x\, dx = \sqrt{\pi}\left(\frac{2}{\beta}\right)^{\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)J_{\nu}(\beta), \quad \nu > -\frac{1}{2},$$

(۴۱)

که $J_\nu(\beta)$ معرف تابع بسل از رتبهٔ ν با شناسهٔ β است. با استفاده از انتگرال معرفی شده در رابطهٔ (۴۱)، پتانسیل $\phi(\vec{x})$ در رابطهٔ (۴۰) به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}) = &\frac{q}{\varepsilon_0}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}}\frac{1}{r^{\frac{D-2}{2}}}\\ &\int_0^{\frac{1}{\ell_0}} dk\; k^{\frac{D}{2}}\frac{1-\ell_0^2k^2}{k^2}\; J_{\frac{D-2}{2}}(kr).\end{aligned} \qquad (۴۲)$$

با توجه به شکل تابع بسل رتبهٔ p با شناسهٔ x برای مقادیر نامنفی p، یعنی [۲۰]

$$J_p(x) = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{1}{s!\,\Gamma(s+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+p}, \quad p\ge 0,$$

(۴۳)

رابطهٔ (۴۲) را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}) = &\frac{q}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}\varepsilon_0}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{r^{2s}}{2^{2s+\frac{D-2}{2}}\, s!\,\Gamma\left(s+\frac{D}{2}\right)}\\ &\int_0^{\frac{1}{\ell_0}} dk\left(k^{2s+D-3}-\ell_0^2k^{2s+D-1}\right)\\ = &\frac{q}{2^D\pi^{\frac{D}{2}}\varepsilon_0\ell_0^{D-2}}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{1}{s!\left(s+\frac{D}{2}-1\right)\Gamma\left(s+\frac{D}{2}+1\right)}\\ &\left(\frac{r}{2\ell_0}\right)^{2s}.\end{aligned}$$

(۴۴)

همان گونه که رابطهٔ (۴۴) نشان می‌دهد برای نقاط بسیار نزدیک به بار نقطه‌ای q ($r\to 0$)، برای پتانسیل وابسته به بار نقطه‌ای در یک فضای اقلیدسی D بعدی مقدار متناهی زیر به دست می‌آید:

$$\phi\left(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{D\ times}\right) = \frac{q}{2^{D-1}\pi^{\frac{D}{2}}(D-2)\,\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)\varepsilon_0\,\ell_0^{D-2}}.$$

(۴۵)

عبارت به دست آمده در رابطهٔ (۴۵) نشان دهندهٔ این واقعیت است که طول کمینهٔ معرفی شده در رابطهٔ (۱۲)، یعنی ℓ_0، همانند یک تنظیم کننده عمل کرده و مانع از واگرایی پتانسیل بار نقطه‌ای در مکان بار می‌شود.

۵. نتیجه‌گیری

در سال ۲۰۱۶ میلادی تکاچوک موفق به ارائهٔ گسترش تک

[1] Hyperspherical coordinates

پارامتری از جبر هایزنبرگ در یک فضای فاز $2D$ بعدی با پارامتر دگرگونش β شد (روابط (۴) تا (۶)). همان‌گونه که روابط (۴) تا (۶) نشان می‌دهند در حد $\beta \to 0$ ، جبر هایزنبرگ دگرگون شده معرفی شده در این روابط به جبر استاندارد هایزنبرگ، یعنی روابط

$$\left[X^i, X^j\right] = 0, \qquad (۴۶)$$

$$\left[P^i, P^j\right] = 0, \qquad (۴۷)$$

$$\left[X^i, P^j\right] = i\hbar\delta^{ij}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, D\}, \qquad (۴۸)$$

تبدیل می‌شوند. از طرفی بنا به روابط (۱۱) و (۱۲)، حد $\beta \to 0$ متناظر با حدود $p_{max} \to \infty$ و $\ell_0 \to 0$ است. بر این اساس ما انتظار داریم که در حد $\ell_0 \to 0$، رابطهٔ (۴۲) که معرف پتانسیل الکتروستاتیکی وابسته به یک بار نقطه‌ای در الکتروستاتیک ماکسول تعمیم یافته است به رابطهٔ (۲)، یعنی پتانسیل بار نقطه‌ای در نظریهٔ الکتروستاتیک ماکسول معمولی در یک فضای اقلیدسی D بعدی تبدیل شود. به منظور بررسی صحت ادعای مطرح شده، در جملات بالا حد $\ell_0 \to 0$ رابطهٔ (۴۲) را در نظر می‌گیریم، خواهیم داشت:

$$\lim_{\ell_0 \to 0} \phi(\vec{x}) = \frac{q}{\varepsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{r^{\frac{D-2}{2}}} \int_0^\infty dk\ k^{\frac{D-2}{2}-1} J_{\frac{D-2}{2}}(kr).$$

(۴۹)

با انجام تغییر متغیری به شکل

$$t = kr, \qquad (۵۰)$$

رابطهٔ (۴۹) به شکل زیر در می‌آید:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{\varepsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{r^{D-2}} \int_0^\infty dt\ t^{\frac{D-2}{2}-1} J_{\frac{D-2}{2}}(t). \qquad (۵۱)$$

با استفاده از انتگرال زیر [۲۰]

$$\int_0^\infty t^\mu J_\nu(t)\, dt = \frac{2^\mu\, \Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}, \qquad (۵۲)$$

$$Re(\mu+\nu) > -1, \quad Re\,\mu < \frac{1}{2},$$

و $\nu = \frac{D-2}{2}$ و $\mu = \frac{D-2}{2} - 1$، رابطهٔ (۵۱) به شکل زیر خواهد شد:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{\varepsilon_0 (D-2)\, \Omega_{D-1}} \frac{1}{r^{D-2}}. \qquad (۵۳)$$

رابطهٔ (۵۳) همان پتانسیل بار نقطه‌ای در نظریهٔ الکتروستاتیک ماکسول معمولی، یعنی رابطهٔ (۲) است. به منظور بررسی رفتار پتانسیل بار نقطه‌ای برای نقاط بسیار نزدیک به مکان قرار گرفتن بار در یک فضای اقلیدسی D بعدی از منظر جبر هایزنبرگ دگرگون شدهٔ (۴) تا (۶) کافی است تا در رابطهٔ (۳۵)، $x^1 = x^2 = \ldots = x^D = 0$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\phi\Big(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{D\ times}\Big) &= \frac{q}{\varepsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{k \le \frac{1}{\ell_0}} d^D k\ \frac{1 - \ell_0^2 k^2}{k^2} \\
&= \frac{q}{\varepsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^D}\, \Omega_{D-1} \int_0^{\frac{1}{\ell_0}} k^{D-1}\ \frac{1 - \ell_0^2 k^2}{k^2} dk \\
&= \frac{q}{2^{D-1} \pi^{\frac{D}{2}} (D-2)\, \Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) \varepsilon_0\, \ell_0^{D-2}}.
\end{aligned}$$

(۵۴)

رابطهٔ (۵۴) قبلا با شیوه‌ای متفاوت در بخش ۴ این مقاله به دست آمده است (رابطهٔ (۴۵) را ببینید). رابطهٔ (۵۴) نشان می‌دهد که وجود پارامتر تنظیم کنندهٔ ℓ_0 مانع از واگرا شدن پتانسیل بار نقطه‌ای در مکان بار می‌شود.

مراجع

1. B Zwiebach, “*A First Course in String Theory*”, Cambridge University Press, Second Edition (2009).
2. H Nastase, “*String Theory Methods for Condensed Matter Physics*”, Cambridge University Press (2017).
3. K Andrew and J Supplee, *Am. J. Phys*. **58** (1990) 1177.
4. J D Jackson, “*Classical Electrodynamics*”, *John Wiley & Sons, Inc.* Third Edition (1999).
5. A Rostami and S K Moayedi, *Indian J. Phys.* **75B** (2001) 357.
6. S K Moayedi and A Rostami, *Eur. Phys. J.* B **36** (2003) 359.
7. A Rostami and S K Moayedi, *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **5** (2003) 380.

8. M Stone and P Goldbart, "*Mathematics for Physics: A Guided Tour for Graduate Students*", Cambridge University Press, (2009).
9. S Hossenfelder, *Living Rev. Relativity* **16** (2013) 2.
10. S K Moayedi, M R Setare, and B Khosropour, *Advances in High Energy Physics* **2013** (2013) 657870.
11. S K Moayedi, M R Setare, and H Moayeri, *EPL* **98** (2012) 50001.
12. S K Moayedi, M R Setare, and B Khosropour, *International Journal of Modern Physics* A **28** (2013) 1350142.
13. A V Silva, E M C Abreu, and M J Neves, *International Journal of Modern Physics* A **31** (2016) 1650096.
14. A M Frydryszak and V M Tkachuk, *Czechoslovak Journal of Physics* **53** (2003) 1035.
15. V M Tkachuk, *Found. Phys*. **46** (2016) 1666.
16. A Izadi and S K Moayedi, *Annals of Physics* **411** (2019) 167956.
17. M Ranaiy and S K Moayedi, *Modern Physics Letters A* **35** (2020) 2050038.
18. N Moeller and B Zwiebach, *JHEP* **10** (2002) 034.
19. A Accioly, J H Neto, G Correia, G Brito, J de Almeida, and W Herdy, *Physical Review* D **93** (2016) 105042.
20. M Abramowitz and I A Stegun, "*Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables (AMS-55)*", Washington, DC: National Bureau of Standards (1972).