



## یک نمایش ماتریس تصادفی هرمیتی برای مدل تراوش دو بعدی

سینا صابر\* و عباس علی صابری

گروه فیزیک حالت جامد، دانشکده فیزیک، دانشگاه تهران، تهران

پست الکترونیکی: sina.saber@ut.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۴/۲۲؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۰/۶/۱۴)

### چکیده

در این مقاله نمایش ماتریس تصادفی برای یک مدل تراوش پیوندی دو بعدی ارائه می‌شود. می‌توان رفتار مدل ماتریسی را تنها با دو بزرگ‌ترین ویژه مقدار آن تعیین کرد. دومین ویژه مقدار روی لبه نیم‌دایره تابع توزیع ویژه مقادیر قرار دارد و مکان آن به صورت تابعی از  $p$ ، تغییر می‌کند در حالی که اولین ویژه مقدار به صورت یک توزیع گوسی مجزا از سایر ویژه مقادیر ظاهر شده و مسئول ایجاد ویژگی‌های مقیاسی در همسایگی نقطه بحرانی است. شبیه سازی عددی انجام شده بیانگر واگرایی‌های قانون توانی است که به واسطه ادغام دو بزرگ‌ترین ویژه مقدار در حد ترمودینامیک ایجاد می‌شوند. همچنین قانون مقیاسی ارائه می‌شود که با استفاده از مجموعه‌ای از نماهای مقیاسی، رفتار کامل مقیاسی افت و خیزهای بزرگ‌ترین ویژه مقدار در اندازه‌های سیستم متناهی را بیان می‌کند.

واژه‌های کلیدی: نظریه ماتریس تصادفی، نظریه تراوش، توزیع تریسی-ویدام، جهان شمولی

### ۱. مقدمه

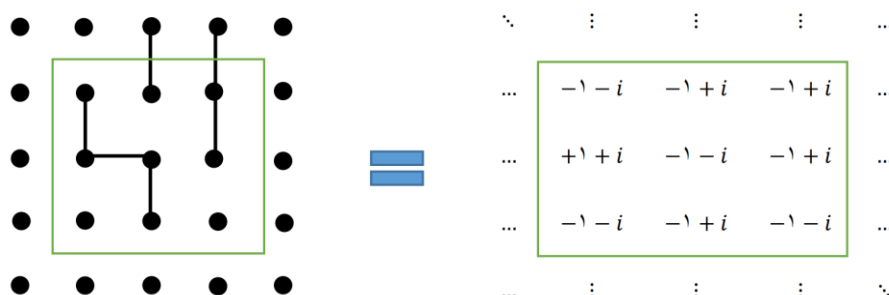
مجموعه‌ای از نماهای بحرانی داده می‌شوند. بر اساس دانسته‌های نویسندگان این مقاله، هیچ گزارشی از ارتباط و یا ادغام این دو نظریه تا کنون صورت نگرفته و هدف از این مقاله پر کردن شکاف میان این دو نظریه و همچنین بحث روی قانون توانی ظاهر شده در نزدیکی نقطه بحرانی است.

نظریه‌های ماتریس‌های تصادفی و تراوش<sup>۱</sup> به عنوان دو رکن اساسی در نظریه احتمالات در نظر گرفته شده و کاربردهای متنوعی در فیزیک آماری و توصیف سیستم‌های پیچیده‌دارند [۱-۷]. به عنوان نمونه می‌توان به کاربرد این دو نظریه در توصیف اثر کوانتومی هال [۸] و ارتباطات بی‌سیم [۹] اشاره کرد. کلاس‌های جهان‌شمولی مشخص کننده ماتریس‌های تصادفی و مدل تراوش به ترتیب توسط توابع توزیع ویژه مقادیر و

### ۲. یافته‌های پژوهش

در این مقاله یک مسئله تراوش پیوندی در دو بعد با احتمال اتصال  $p$  و اندازه خطی  $L$  روی یک شبکه مربعی در نظر

۱. Percolation model

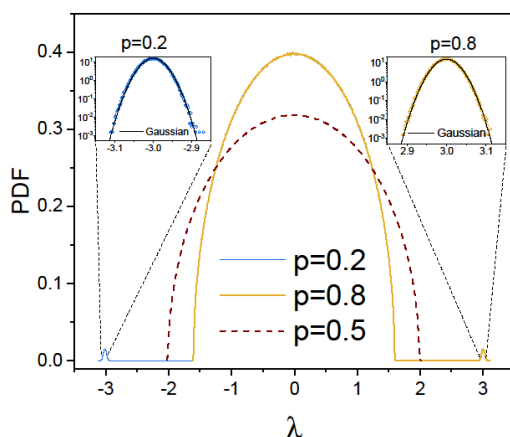


**شکل ۱.** نحوه ساختن ماتریس مختلط  $M'$ . شکل سمت چپ: شبکه مربعی متناظر با مسئله تراوش پیوندی، که پیوندهای بسته با خطوط سیاه نمایش داده شده است. شکل سمت راست: ماتریس مربعی متناظر با مسئله تراوش. عناصر ماتریسی مختلط متناظر با هر نقطه از شبکه تراوش در داخل مستطیل سبز رنگ به صورت نمونه نمایش داده شده است. همان طور که در کادر سبز رنگ واضح است هر نقطه از شبکه در صورت داشتن پیوند افقی با همسایه سمت راست متناظر است با بخش حقیقی  $+1$  در عنصر ماتریسی مربوط و در صورت باز بودن پیوند متناظر است با بخش حقیقی  $-1$  در همان عنصر ماتریسی. همچنین در صورت وجود پیوند عمودی با همسایه بالایی، عنصر ماتریسی مربوط بخش موهومی  $+i$  و در صورت باز بودن پیوند عمودی، بخش موهومی عنصر ماتریسی برابر  $-i$  دارد.

گرفته شده است. می توان این مسئله تراوش را به یک ماتریس مربعی تصادفی مختلط  $M'$  به ابعاد  $L \times L$  نگاه داشت داد. ماتریس  $M'$  عناصر مختلط  $M'_{ij}$  با بخش های حقیقی و موهومی مستقل دارد که بخش حقیقی آن متناظر با یک پیوند افقی و بخش موهومی متناظر با یک پیوند عمودی در مسئله تراوش پیوندی است. بخش های حقیقی و موهومی هر کدام به طور تصادفی و مستقل با احتمال  $p$ ، مقدار  $+1$  و با احتمال  $1-p$ ، مقدار  $-1$  را اختیار می کنند (شکل ۱). یک مسئله تراوش پیوندی در حد ترمودینامیک یک گذار فاز پیوسته در آستانه تراوش  $p_c = 1/2$  دارد که طول همبستگی به شکل توانی  $\xi \propto |p - p_c|^{-\nu}$  و اگر می شود.

در این مقاله، ویژگی های آماری ویژه مقادیر ماتریسی در حد  $p \rightarrow p_c$  مورد توجه خاص قرار گرفته است. به منظور اطمینان از حقیقی بودن تمام ویژه مقادیر، ماتریسی از هرمیتی سازی به صورت  $M = (M' + M'^{\dagger})/2$  استفاده شده است که در آن  $(\cdot)^{\dagger}$  نشان دهنده مزدوج ترانهادی یک ماتریس مختلط است. بنابراین ماتریس مختلط  $M$   $\frac{1}{4}L(L+1)$  عنصر مستقل دارد که برای عناصر غیرقطری، بخش حقیقی با احتمال  $(1-p)^2$ ،  $-1$  با احتمال  $2p(1-p)$ ، صفر و با احتمال  $p^2$ ،  $+1$  است و بخش موهومی با احتمال  $p(1-p)$ ،  $\pm 1$  و با احتمال

تابع توزیع احتمال ویژه مقادیر یک مجموعه از ماتریس های هرمیتی تصادفی  $M$ ، که نگاهی از مسئله تراوش پیوندی است به ازای  $0/8, 0/5, 0/2, p=0$ ، در شکل ۲ نمایش داده شده است. همان طور که در شکل ۲ دیده می شود ویژه مقادیر ماتریس های تصادفی به ازای  $0/5, p=0$ ، با در نظر گرفتن یک عامل  $\sqrt{2}$ ، که ناشی از اضافه شدن بخش موهومی است به طور دقیق قانون نیم دایره ویگنر را نمایش می دهد. این در حالی است که برای  $0/8, 0/2, p=0$ ، تابع توزیع ویژه مقادیر دو بخش



**شکل ۲.** تابع توزیع ویژه مقادیر یک آنسامبل از ماتریس‌های تصادفی هرمیتی بازمقیاس شده به عنوان نگاشتی از مدل تراوش پیوندی مربعی با احتمال  $p = 0/2, 0/5, 0/8$ . برای  $p = 0/5$  (منحنی نشان داده شده با خط چین قرمز) قانون نیم‌دایره ویگنر را با یک ضریب اضافه  $\sqrt{2}$  نشان می‌دهد. به ازای  $p = 0/2, 0/8$  تابع توزیع دو بخش دارد: (الف) یک بخش مربوط به تمام ویژه مقادیر به جز بزرگ‌ترین (کوچک‌ترین) ویژه مقدار که به شکل نیم‌دایره است که در حد  $(p \rightarrow 0) \rightarrow p$ ، لبه‌های آن به سمت صفر میل می‌کند. (ب) بخشی با توزیع گوسی که تنها شامل بزرگ‌ترین ویژه مقدار است و از سایر ویژه مقادیر جدا شده است.

ویژه مقدار بعد از آن درست روی لبه نیم‌دایره قرار دارد. (ب) رفتار پله‌ای حول نقطه بحرانی  $p \rightarrow p_c$  که در شکل ۳ مشاهده می‌شود نشان دهنده یک گذار فاز حول این نقطه است که در آن دو توزیع گوسی و GUE، با یکدیگر ادغام می‌شوند. در ادامه این مقاله خواهیم دید که این رفتار حول نقطه بحرانی با برخی واگرایی‌ها در آمار بزرگ‌ترین ویژه مقادیر همراه است که از قانون توانی پیروی می‌کنند. همچنین چارچوب مقیاسی جهان‌شمولی را ارائه خواهیم داد که این واگرایی‌ها را به خوبی توصیف می‌کند.

در مرجع [۱۳] نشان داده شده است که برای یک ماتریس حقیقی متقارن با میانگین عناصر غیرصفر، همواره ویژه مقادیری وجود دارد که اندازه آن بزرگ‌تر یا مساوی میانگین مجموع عناصر در یک سطر از ماتریس است. این به آن معنی است که قدر مطلق بزرگ‌ترین ویژه مقدار  $\tilde{\lambda}_{max}$ ، ماتریس  $M$ ، هم‌رتبه با  $|M_{ij}|L$  است. از آنجا که در عناصر ماتریس غیرهرمیتی  $M'$ ، بخش حقیقی و موهومی هر عنصر دقیقاً با احتمال  $p$ ، برابر  $+1$  و با احتمال  $1-p$ ، برابر  $-1$  است برای ماتریس هرمیتی  $M$  خواهیم داشت:  $|\tilde{\lambda}_{max}| \sim |2p-1|L$ ، که در آن تیلدا بیانگر ویژه مقادیر مقیاس نشده است. بزرگ‌ترین

مجزا دارد که یک بخش به شکل نیم‌دایره، مربوط به تمام ویژه مقادیر به جز بزرگ‌ترین ویژه مقدار و بخش دیگر مربوط به توزیع بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین ویژه مقدار با توزیع گوسی است.

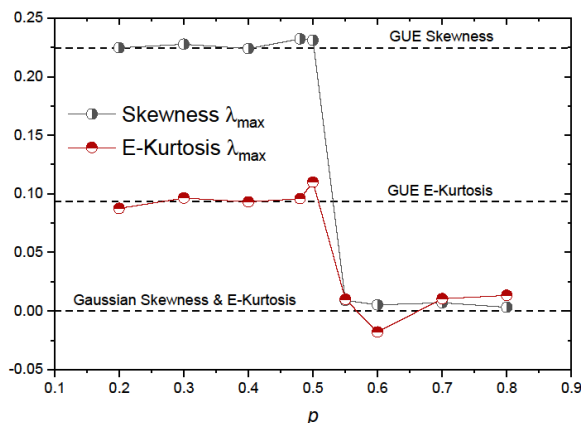
در مرجع [۱۲] نشان داده شده است که برای ماتریس‌های تصادفی مختلط و هرمیتی، توزیع بزرگ‌ترین ویژه مقدار که روی لبه نیم‌دایره قرار دارد با تابع توزیع آنسامبل یکانی گوسی (GUE)<sup>۱</sup> تریسی-ویدام<sup>۲</sup> داده می‌شود. مقادیر مشخصه اسکینوس<sup>۳</sup> و اکسس-کورتوسیس<sup>۴</sup> برای این تابع توزیع به ترتیب برابر با  $0/224$  و  $0/093$  است. در شکل ۳ مقادیر اسکینوس و اکسس-کورتوسیس به دست آمده از شبیه سازی برای بزرگ‌ترین ویژه مقدار  $\lambda_{max}$ ، برحسب  $p$ ، رسم شده و با مقادیر متناظر توزیع‌های گوسی و GUE، مقایسه شده است. نتایج به دست آمده بیانگر دو نتیجه مهم هستند: (الف) به ازای  $p > p_c$  ( $p < p_c$ ) توزیع گوسی تنها شامل بزرگ‌ترین (کوچک‌ترین) ویژه مقدار است و بزرگ‌ترین (کوچک‌ترین)

۱. Gaussian Unitary Ensemble (GUE)

۲. Tracy-Widom

۳. Skewness

۴. Excess-kurtosis



شکل ۳. اسکینوس و اکسس-کورتوسیس بزرگ‌ترین ویژه مقدار به‌دست‌آمده از  $10^5$  ماتریس تصادفی مستقل بر حسب تابعی از  $p$ ، خط‌چین‌های افقی مشکی نشان دهنده مقادیر متناظر برای توزیع‌های GUE و گوسی هستند.

ویژه مقدار یک ماتریس هرمیتی و تعیینی به شکل  $M_{ij} = \mu$  برابر است با  $\mu L$ ، و سایر ویژه مقادیر صفر است. افت و خیز عناصر ماتریسی حول مقدار میانگین  $\mu$ ، تنها باعث انتقال  $\tilde{\lambda}_{max}$  به اندازه یک کمیت تصادفی گوسی حول مقدار  $\mu L$  می‌شود (شکل ۲). کمیتی که قصد بررسی آن را داریم میانگین افت و خیز بزرگ‌ترین ویژه مقدار  $L$   $|\tilde{\lambda}_{max}|_c = |\tilde{\lambda}_{max}| - |2p - 1|L$  در حد  $L \rightarrow \infty$  است.

$$|\tilde{\lambda}_{max}|_c(p, L) = |p - p_c|^{-\alpha} \mathcal{F}\left(\left(\frac{1}{L}\right) |p - p_c|^{-z}\right), \quad (2)$$

ما برای اندازه‌های بسیار بزرگ سیستم، محاسبات مونت‌کارلو را به منظور بررسی میانگین افت و خیز بزرگ‌ترین ویژه مقدار در همسایگی نقطه بحرانی  $p \rightarrow p_c$  انجام دادیم. همان‌طور که در ضمیمه سمت چپ نمودار شکل ۴ نشان داده شده است، آثار ناشی از متناهی بودن اندازه سیستم در نزدیکی نقطه بحرانی بسیار مهم است و همگرایی کمیت  $|\tilde{\lambda}_{max}|_c$  در همسایگی نقطه بحرانی  $p \rightarrow p_c$ ، تنها به ازای اندازه‌های بسیار بزرگ اتفاق می‌افتد. تخمین ما از کمیت  $|\tilde{\lambda}_{max}|_c$  در همسایگی نقطه بحرانی به صورت تابعی از  $p$ ، در شکل ۴ نشان داده شده است. رابطه (۱)، قانون توانی به‌دست‌آمده از بهترین برازش منحنی برای داده‌ها را نشان می‌دهد:

$$|\tilde{\lambda}_{max}|_c(p, L) \propto \begin{cases} |p - p_c|^{-\alpha} & L^* \ll L \\ \left(\frac{1}{L}\right)^{\beta} & L \ll L^* \end{cases}, \quad (3)$$

که  $L^*$  طول اشباع متناسب با  $|p - p_c|^{-z}$  است. همچنین  $\alpha, \beta$  و  $z = \alpha / \beta$  سه نمای مقیاسی تعیین‌کننده جهان‌شمولی افت و خیزهای بزرگ‌ترین ویژه مقدار هستند.

همان‌طور که در ضمیمه سمت راست شکل ۴ نشان داده شده است، زمانی که داده‌ها با استفاده از نماهای

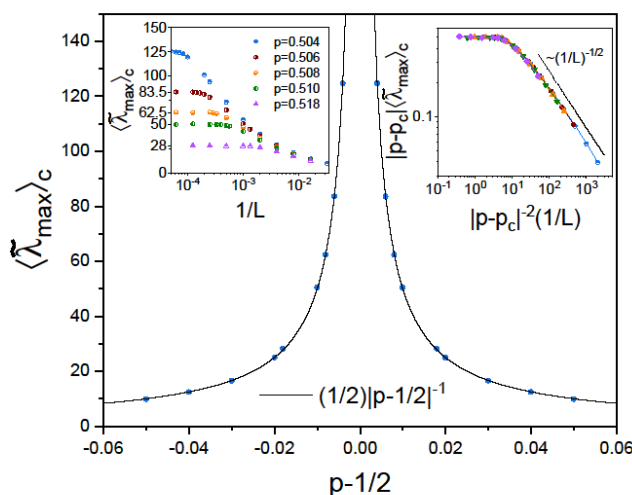
$$\alpha = 1, \quad \beta = 1/2, \quad z = 2, \quad (4)$$

در حالت حدی  $L \rightarrow \infty$ ، صحیح است و ضمیمه سمت چپ شکل ۴ بیانگر وابستگی افت و خیز بزرگ‌ترین

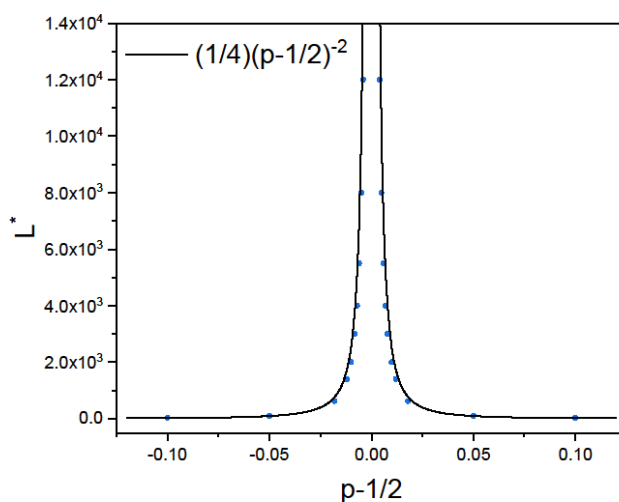
ویژه مقدار یک ماتریس هریتی و تعیینی به شکل  $M_{ij} = \mu$  برابر است با  $\mu L$ ، و سایر ویژه مقادیر صفر است. افت و خیز عناصر ماتریسی حول مقدار میانگین  $\mu$ ، تنها باعث انتقال  $\tilde{\lambda}_{max}$  به اندازه یک کمیت تصادفی گوسی حول مقدار  $\mu L$  می‌شود (شکل ۲). کمیتی که قصد بررسی آن را داریم میانگین افت و خیز بزرگ‌ترین ویژه مقدار  $L$   $|\tilde{\lambda}_{max}|_c = |\tilde{\lambda}_{max}| - |2p - 1|L$  در حد  $L \rightarrow \infty$  است.

$$|\tilde{\lambda}_{max}|_c = \frac{1}{4} |p - p_c|^{-1}, \quad (1)$$

در حالت حدی  $L \rightarrow \infty$ ، صحیح است و ضمیمه سمت چپ شکل ۴ بیانگر وابستگی افت و خیز بزرگ‌ترین



شکل ۴. قانون مقیاسی توسعه داده شده در اندازه سیستم‌های متناهی برای افت و خیز بزرگ‌ترین ویژه‌مقدار. نمودار اصلی: رفتار حدی میانگین افت و خیزهای بزرگ‌ترین ویژه‌مقدار بر حسب تابعی از  $p - p_c$ ، خط مشکی بهترین برازش منحنی برای داده‌ها به شکل قانون توانی با نمای ۱- است. ضمیمه سمت چپ: میانگین افت و خیز بزرگ‌ترین ویژه‌مقدار بر حسب معکوس اندازه سیستم برای پنج احتمال متفاوت به ازای  $p > 0.5$ . میانگین افت و خیز متناسب با اندازه سیستم افزایش می‌یابد و در  $L^*$  به مقدار حدی (اشباع شده) خود می‌رسد. ضمیمه سمت راست: زمانی که داده‌های موجود در ضمیمه سمت چپ بر اساس روابط مقیاسی پیشنهاد شده (۳) و (۴) بازمقیاس شوند، تمام داده‌ها روی یک منحنی جهانشمول واحد قرار می‌گیرند.



شکل ۵. مقادیر به دست آمده برای اندازه مشخصه سیستم  $L^*$ ، که در آن افت و خیزهای بزرگ‌ترین ویژه‌مقدار به مقدار حدی (اشباع) خود می‌رسد، بر حسب  $p - p_c$ . خط مشکی بهترین برازش منحنی به دست آمده بر روی داده‌ها با نمای ۲- است.

می‌شود، بهترین برازش به دست آمده روی داده‌ها رابطه (۵) را نتیجه می‌دهد که با نماهای مقیاسی بیان شده در رابطه (۴) مطابقت دارد:

$$L^* = \frac{1}{4} |p - p_c|^{-2}, \quad (5)$$

به شکل مناسب بازمقیاس شوند، تمام منحنی‌ها روی یک تابع جهانشمول  $\mathcal{F}$  قرار می‌گیرند. همچنین می‌توان با رسم مقیاس طولی  $L^*$  به صورت تابعی از  $|p - p_c|$ ، روابط مقیاسی بیان شده را تأیید کرد (شکل ۵). همان‌طور که در شکل ۵ مشاهده

## ۳. نتیجه گیری

به طور خلاصه ما روشی جدید برای مطالعه یک مدل دو بعدی تراوش پیوندی با استفاده از نگاشت به یک مدل ماتریس تصادفی مختلط هرمیتی ارائه کرده ایم که از تمام جنبه ها سازگار با مفاهیم موجود در پدیده های بحرانی است. واگرایی افت و

خیزهای بزرگ ترین ویژه مقادیر در همسایگی نقطه بحرانی به صورت قانون توانی است که بیانگر رفتار بحرانی سیستم حول این نقطه است. همچنین ما نشان دادیم که می توان با استفاده از یک قانون مقیاسی نسبتاً ساده، اثر اندازه متناهی در سیستم را بر حسب مجموعه ای از نماهای مقیاسی بیان کرد.

## مراجع

1. S N Majumdar and G Schehr, *J. Stat. Mech. Theory Exp.* **1** (2014) 1012.
2. P L Ferrari, *J. Stat. Mech. Theory Exp.* **10** (2010) 10016.
3. M Prahofer and H Spohn, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 4882.
4. P L Ferrari and H Spohn, "The Oxford handbook of random matrix theory", Oxford University Press, (2011).
5. T Kriecherbauer and J Krug, *J. Physics A: Math. and Theor.* **43** (2010) 403001.
6. M Sahimi, "Applications of percolation theory", CRC Press (2003).
7. D Stauffer and A Aharony, "Introduction to Percolation Theory", Taylor and Francis (1991).
8. H A Weidenmueller and M R Zirnbauer, *Nucl. Phys. B* **305** (1988) 339.
9. R Couillet and M Debbah, "Random matrix methods for wireless communications", Cambridge University Press (2011).
10. E Wigner, *Ann. of Math.* **62** (1955) 548.
11. E Wigner, *Ann. of Math.* **67** (1958) 325.
12. C Nadal, S N Majumdar, *J. Stat. Mech. Theory Exp.* **4** (2011) 4001.
13. D W Lang, *Physical Review* **135** (1964) B1082.