مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۲۲، شمارهٔ ۱، بهار ۱۴۰۱
DOI: 10.47176/ijpr.22.1.81300

دینامیک کوانتومی یک نوسانگر هماهنگ در یک حمام غیر تعادلی بدون تقریب موج چرخان

محسن دایی‌محمد

گروه فیزیک، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد

پست الکترونیکی: m.daeimohammad@pco.iaun.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۵/۲۰ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۴۰۰/۹/۶)

چکیده

هدف این مقاله بررسی خواص دینامیکی یک نوسانگر هماهنگ جفت شده با یک حمام غیر تعادلی درغیاب تقریب موج چرخان است. در ابتدا به بررسی نظری این مدل می‌پردازیم و معادلات حرکت هایزنبرگ را برای عملگرهای نابودی نوسانگر و حمام درغیاب و درحضورتقریب موج چرخان به دست می‌آوریم. بعد آن رابطهٔ نوسانی و نوسانی - اتلافی را به ترتیب درغیاب و در حضورتقریب موج چرخان برای عملگر نابودی حمام غیر تعادلی به دست می‌آوریم. سپس به بررسی فرو افت مدهای سیستم با استفاده ازتقریب ویگنر- ویسکوف می‌پردازیم. در آخر طیف وابسته به زمان مدهای میدلن کاواک جفت شده با یک حمام غیر تعادلی را محاسبه می‌کنیم. نشان می‌دهیم حتی در محدودهٔ اعتبار تقریب موج چرخان (برهم‌کنش ضعیف) اثرات جملات پاد چرخان روی کمیت‌های فیزیکی مانند ضریب پخش، چگالی انرژی، پهنای خط و جابه‌جایی بسامد بسیار مهم است.

واژه‌های کلیدی: تقریب موج چرخان، جملات پاد چرخان، فوتون‌های مجازی، تقریب ویگنر- ویسکوف، معادلهٔ لانژون، ضریب پخش

۱. مقدمه

نوسانگر هماهنگ اتلافی به دلیل وسعت کاربرد جایگاه خاصی در فیزیک دارد. اگرچه رفتار کلاسیکی آنها به خوبی قابل درک است ولی رفتار کوانتومی آنها بسیار پیچیده است. به علت اتلاف انرژی در نوسانگرهای کوانتومی اتلافی به کارگیری روش کوانتش استاندارد درمورد آنها مشکل است [۱-۲۱]. همچنین بررسی‌های تجربی روی نوسانگر کوانتومی به درجه‌ای از رشد رسیده است که می‌تواند مکانیک کوانتومی جهان ماکروسکوپیک را به خوبی توصیف کند [۲۲-۲۶] . مشکلات کوانتش بندادی نوسانگر هماهنگ اتلافی را می‌توان با وارد کردن یک حمام حرارتی که در واقع عامل اتلاف انرژی است مرتفع کرد. اگرکوانتش میدان دریک محیط محدود صورت گیرد حمام با تعداد بی‌نهایت ولی شمارش‌پذیر از میدان‌های کلاین- گوردون مدل سازی می‌شود ودراین صورت باید درروش‌های

به کار رفته محدودیت‌هایی اعمال کرد تا بتوان طیف وسیعی ازرفتارسیستم‌های اتلافی بررسی کرد [۱۰-۲۰ و ۳] (این محدودیت‌ها را می‌توان برداشت ولی ظرافت‌هایی دارد که توسط تا تارسکی در مرجع [۱۳] شرح داده شده است). روش تبدیل محیط اتلافی ازتعداد نامتناهی ولی شمارش‌پذیر میدان کلاین- گوردون به تعداد نامتناهی ولی شمارش‌پذیر میدان کلاین- گوردون است.

در مرجع [۲۱] ازابتدا حمام حرارتی دارای تعداد نا متناهی ولی غیر شمارش‌پذیر از میدان کلاین- گوردون در نظر گرفته شده است [۲۷] بنابراین هیچ نیازی به روش‌های محدود کننده نیست. نظریهٔ حاصل شده شباهت‌های زیادی با نظریهٔ الکترومغناطیس ماکروسکوپی دارد و به همین دلیل آن را می‌توان نظریهٔ میدان نوسانگر اتلافی دانست. به طورخاص، دینامیک یک نوسانگر هارمونیک اتلافی وابسته به تابع حساسیت یا نفوذ پذیری محیط است که از رابطه کرامرز- کرونینگ پیروی می‌کند ودقیقا" مشابه حرکت نور در محیط‌های مادی است [۲۱]. با استفاده ازفرمول‌بندی حمام حرارتی معرفی شده درمرجع [۲۷] هم می‌توان یک میدان الکترومغناطیسی ماکروسکوپیک را برای دی الکتریک‌های دلخواه و هم می‌توان یک نوسانگر هماهنگ ساده اتلافی را کوانتیده کرد. مدل سیستم حمام حرارتی سال‌ها است که به عنوان یک الگوی استاندارد برای بررسی سیستم‌های اتلافی چه در فیزیک کلاسیکی و چه در فیزیک کوانتومی استفاده می‌شود. معروف‌ترین این مدل، مدل اسپین- بوزون است که در آن یک گشتاور دو قطبی مغناطیسی با یک میدان بوزونی برهم‌کنش می‌کند. مورد دیگر برهم‌کنش یک اتم دو ترازی با یک میدان تابشی است. این مدل توصیف کنندهٔ بسیاری از پدیدهای فیزیکی همچون نشر خود به خودی، حرکت اکسیتون، تونل زنی کوانتومی ماکروسکوپیک و غیره در فیزیک اتمی، فیزیک حالت جامد و کوانتوم اپتیک است. به طور کلی، دو وضعیت مشخص بسته به شدت جفت شدگی بین سیستم و حمام حرارتی وجود داد. در مورد برهم‌کنش ضعیف، حمام اساساً شبیه یک میدان آزاد رفتار می‌کند و حالت اولیهٔ آن تغییرات بسیار کمی دارد. در مورد جفت شدگی‌های قوی (همچون نظریه‌های قطبی) از قطبش میدان حمام حرارتی که توسط سیستم صورت می‌گیرد نمی‌توان صرف نظرکرد. دومین تقریبی که تقریباً همیشه به کار گرفته می‌شود این است که زمان همبستگی حمام حرارتی به اندازهٔ کافی کوچک باشد (تقریب مارکوف) طوری که باعث ایجاد برهم‌کنش ضعیف بین سیستم و حمام شود (تقریب برهم‌کنش ضعیف). در مورد برهم‌کنش بین سیستم وحمام غیر تعادلی بررسی‌های بسیار کمی صورت گرفته است. این عدم تعادل حمام دینامیک کوانتومی سیستم را تغییر می‌دهد [۲۸-۳۰] و باعث یک فرو افت غیرنمایی می‌شود؛ در حالی که درسیستم‌های با حمام در حال تعادل فرو افت نمایی خواهد بود. بنابراین پایداری سیستم‌های غیر تعادلی ممکن است در اتلاف سیستم مورد نظر به روش غیر اصولی تأثیر گذار باشد. درمرجع [۳۱] دینامیک کوانتومی یک نوسانگر هماهنگ تغییرشکل یافته در یک حمام گرمایی مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین دینامیک کوانتومی یک نوسانگر هماهنگ در یک محیط تغییر شکل یافته در [۳۲] مورد بررسی قرار گرفته است .

از طرف دیگر برهم‌کنش میان نور و ماده یکی از اساسی‌ترین مسائل در اپتیک کوانتومی است. ساده ترین نوع این نوع برهم‌کنش مدل رابی می‌شود [۳۳] که برهم‌کنش یک اتم دوترازه را با یک میدان تک مدی بررسی می‌کند. علی‌رغم مطالعات بسیار گسترده‌ای که روی این موضوع دردهۀ اخیر انجام شده است تا به امروز این مسئله فاقد یک روش تحلیلی است وتنها روش‌های عددی [۳۴ و ۳۵] تقریبی دردسترس هستند [۳۶ و ۳۷]. با وجود این ریک و درچا [۳۸ و ۳۹] حدس زدند که یک حل دقیق براساس توابع شناخته شده امکان پذیر است. متداول‌ترین روش برای حل مدل رابی استفاده ازتقریب موج چرخان (RWA) است که در این حالت ازجملات پادچرخان صرف نظر می‌شود. دراین محدوده هامیلتونی رابی همان مدل شناخته شده جینز- کامینگز (JC) است و می‌تواند دقیقاً بررسی شود [۴۰ و ۴۱]. علی‌رغم سادگی این مدل، دینامیک آن بسیار پیچیده است. در واقع دراین مدل به سبب طبیعت کوانتومی نوروکوانتش امواج الکترومغناطیسی اثرات

غیرکلاسیکی همچون نـابودی و احیـاء در وارونـی جمعیـت و نوسانات رابـی وچلانـدگی [۴۲ و ۴۳] در درهمتنیـدگی اتـم - میدان و اتم - اتم دیده می‌شود [۴۴]. ازبرهم‌کنش میـدان و اتـم می‌توان درالکترودینامیک کاواک‌های کوانتومی اسـتفاده کـرد. از نظریۀ کاواک‌های کوانتومی نیز می‌تـوان بـرای بـه دام انـداختن اتم‌ها که نقش بسیار مهمی در ذخیـرۀ اطلاعـات کوانتـومی دارد استفاده کرد [۴۵]. هنگامی که برهم‌کنش میان میدان و اتم قـوی باشد نمی‌توان ازتقریب موج چرخان استفاده کـرد و بایـد مـدل رابی اصلاح شود [۴۶]. همچنین در چنـدین مقالـه بـه بررسـی صحت و سقم تقریب موج چرخان پرداختـه شـده اسـت [۴۸ و ۴۷] و روش‌های تقریبی عددی جایگزین ایـن تقریـب پیشـنهاد شده است [۳۴ و ۳۵]. به علاوه نشان داده شده است که اگـر از جملۀ پاد چرخان درمحاسبات اسـتفاده شـود بـه علـت حضـور فوتون‌های مجازی، نتـایج جدیـدی در بـر دارد [۳۶]. محـدودۀ دقیقی که در آن تقریب RWA فاقد اعتباراست مشخص نیست. وقتی جملات پادچرخان را درمعادلات وارد می‌کنـیم و تقریـب موج چرخان را کنارمی‌گذاریم از روش‌های تقریبـی بـرای حـل مسئله استفاده می‌کنیم و سپس می‌توانیم نتـایج را بـا وقتـی کـه تقریب موج چرخان را به کار مـی‌بـریم مقایسـه کنـیم. در ایـن حالت می‌توانیم اثرات فوتون‌هـای مجـازی را روی پارامترهـای محاسبه شده بررسی کنیم. به علاوه مطالعـه‌ای مفیـد اسـت کـه بتـوانیم گسـتره‌ای را کـه در آن تقریـب RWA کـاربرد دارد تشخیص دهیم . در این مقاله ما نظریۀ اتلاف را به یک نوسانگر هماهنگ که با یک حمام غیر تعادلی درحالت برهم‌کـنش اسـت درغیاب موج چرخان گسترش می‌دهیم. یک حمام غیـر تعـادل حمامی است که پهنای باند عریض با ابعاد نیمه بـی‌نهایـت دارد که خود نیـز درتمـاس بـا یـک حمـام حرارتـی تعـادلی اسـت. ساختاراین مقاله به این صورت است:

در بخش ۲ به تعمـیم نظریـۀ کوانتـومی اتـلاف بـرای یـک نوسـانگر کوانتـومی کـه بـا یـک حمـام غیـر تعـادلی در حـال برهم‌کنش است می‌پردازیم. دربخش ۳ معادلۀ اتلافی واتلافـی- نوسانی را برای بـه ترتیـب درغیـاب ودرحضـور تقریـب مـوج چرخان برای مدهای حمام غیر تعادلی به دسـت مـی‌آوریـم. در بخش ۴ به بررسی فرو افت مدهای سیستم با استفاده از تقریـب موج چرخان می‌پردازیم. در قسمت ۵ نشان می‌دهیم کـه وقتـی بهره مثبت باشد طیف مدهای سیستم سفید خواهد بود. دربخش ۶ نتایج به دست آمده را می‌آوریم.

۲. مدل و معادلۀ حرکت

برای شروع ما یک نوسانگر هماهنگ را در نظر می‌گیریم که بـا یک حمام حرارتی تعادلی و یک حمام حرارتی غیـر تعـادلی در غیاب موج چرخان برهم‌کنش می‌کند. فرض می‌کنـیم دو حمـام حرارتـی ازیـک سـری نوسـانگرهای بـا بسـامدهـای $\{\Omega_j\}$ و $\{\omega_j\}$ تشکیل شده است. هـامیلتونی کـل سیسـتم و محـیط در غیاب موج چرخان به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^{+}\hat{a} + \hbar\sum_j \omega_j \hat{b}_j^{+}\hat{b}_j + \hbar\sum_\mu \Omega_\mu \hat{C}_\mu^{+}\hat{C}_\mu + \\ \hbar\sum_\mu g_\mu\left(\hat{C}_\mu + \hat{C}_\mu^{+}\right)\left(\hat{a}+\hat{a}^{+}\right) + \\ \hbar\sum_\mu\sum_j \alpha_{j\mu}\left(\hat{C}_\mu + \hat{C}_\mu^{+}\right)\left(\hat{b}_j + \hat{b}_j^{+}\right),\end{aligned} \tag{۱}$$

در اینجا جملۀ اول هامیلتونی یک نوسانگر هماهنـگ بـا بسـامد $\omega_\circ$ را نشان مـی‌دهـد. جمـلات دوم و سـوم هـامیلتونی حمـام حرارتی تعادلی وغیر تعادلی را نشان می‌دهـد. جمـلات بعـدی برهم‌کنش حمام حرارتی تعادلی وحمام حرارتی غیر تعـادلی را با نوسانگر هماهنگ با ثابت جفت شـدگی g_μ و $\alpha_{j\mu}$ رانشـان می‌دهند. با استفاده ازمعادلۀ حرکت هایزنبرگ داریم:

$$\dot{\hat{a}}(t) = -i\,\omega_\circ\hat{a}(t) - i\sum_\mu g_\mu\left(\hat{C}_\mu(t) + \hat{C}_\mu^{+}(t)\right), \tag{۲}$$

$$\dot{\hat{b}}_j(t) = -i\,\omega_j\hat{b}_j(t) - i\sum_\mu \alpha_{j\mu}\left(\hat{C}_\mu(t) + \hat{C}_\mu^{+}(t)\right), \tag{۳}$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{C}}_\mu(t) = -i\,\Omega_\mu\hat{C}_\mu(t) - ig_\mu\left(\hat{a}(t) + \hat{a}^{+}(t)\right) - \\ i\sum_j \alpha_{j\mu}\left(\hat{b}_j(t) + \hat{b}_j^{+}(t)\right),\end{aligned} \tag{۴}$$

از حل معادلۀ (۳) داریم :

$$\begin{aligned}\hat{b}_j(t) = \hat{b}_j(t_\circ)e^{-i\omega_j(t-t_\circ)} - \\ i\sum_\mu \alpha_{j\mu}\int_{t_\circ}^{t} dt'\left(\hat{C}_\mu(t') + \hat{C}_\mu^{+}(t')\right)e^{-i\omega_j(t-t_\circ)},\end{aligned} \tag{۵}$$

با قرار دادن رابطۀ (۵) در رابطۀ (۴) داریم:

$$\dot{\hat{C}}_\mu(t) = -i\Omega_\mu \hat{C}_\mu(t) - g_\mu\left(\hat{a}(t)+\hat{a}^+(t)\right) - i\sum_j \alpha_{j\mu}\left[\hat{b}_j(t_0)e^{-i\omega_j(t-t_0)} + \hat{b}_j^+(t_0)e^{i\omega_j(t-t_0)}\right] - \sum_j\sum_\nu \alpha_{j\mu}\alpha_{j\nu}\int_{t_0}^{t}\left(\hat{C}_\nu(t')+\hat{C}_\nu^+(t')\right)e^{-i\omega_j(t-t_0)} + \sum_j\sum_\nu \alpha_{j\mu}\alpha_{j\nu}\int_{t_0}^{t}\left(\hat{C}_\nu(t')+\hat{C}_\nu^+(t')\right)e^{i\omega_j(t-t_0)}, \quad (۶)$$

بـــا توجـــه بـــه ایـــن کـــه تغییـــرات زمـــانی درجمـــلات $\sum_j \alpha_{j\mu}\alpha_{j\nu}e^{-i\omega_j(t-t_0)}$ و $\sum_j \alpha_{j\mu}\alpha_{j\nu}e^{i\omega_j(t-t_0)}$ بســـــیار کوچـک‌تـر از زمـانی اسـت کـه تغییـرات قابـل ملاحظـه‌ای درمدلاسیون دامنه و فاز مـدهای خطـی عملگـر نـابودی حمـام حرارتی غیر تعادلی رخ می‌دهد می‌تـوانیم ایـن جمـلات را بـه صورت زیر بنوسیم [۴۹]:

$$\gamma_{\mu\nu}^C = \pi\alpha_{\nu\mu}(\Omega_\nu)\alpha_{\nu\nu}(\Omega_\nu)D(\Omega_\nu), \quad (۷)$$

در اینجا $\gamma_{\mu\nu}^C$, $D(\Omega_\nu)$ به ترتیب نشان دهنـدهٔ چگـالی حالـت مدها و تابت اتلاف است. بنـابراین مـی‌تـوان معادلـهٔ (۶) را بـه صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\dot{\hat{C}}_\mu(t) = -i\Omega_\mu \hat{C}_\mu(t) - ig_\mu\left(\hat{a}(t)+\hat{a}^+(t)\right) - \sum_\nu \gamma_{\mu\nu}^C\left(\hat{C}_\nu(t)+\hat{C}_\nu^+(t)\right) + \sum_\nu \gamma_{\mu\nu}^C\left(\hat{C}_\nu(t)+\hat{C}_\nu^+(t)\right) + \hat{f}_\mu(t) = -i\Omega_\mu \hat{C}_\mu(t) - ig_\mu\left(\hat{a}(t)+\hat{a}^+(t)\right) + \hat{f}_\mu(t), \quad (۸)$$

در اینجا $\hat{f}_\mu(t)$ یک عملگر نوفـه اسـت کـه ازجفـت شـدگی حمام‌های حرارتی تعادلی وغیر تعادلی ایجاد می‌شود و داریم:

$$\hat{f}_\mu(t) = -i\sum_j \alpha_{j\mu}\left[e^{-i\omega_j(t-t_0)}\hat{b}_j(t_0) + e^{i\omega_j(t-t_0)}\hat{b}_j^+(t_0)\right], \quad (۹)$$

اگر از تقریب موج چرخـان اسـتفاده کنـیم بـا حـذف جمـلات $\hat{C}_\mu^+(t)\hat{b}_j^+(t)$ ،$\hat{C}_\mu(t)\hat{b}_j(t)$ ،$\hat{C}_\mu^+(t)\hat{a}^+(t)$ و $\hat{C}_\mu(t)\hat{a}(t)$ از معادلهٔ (۱) به دست می‌آوریم:

$$\dot{\hat{C}}_\mu(t) = -i\Omega_\mu \hat{C}_\mu(t) - ig_\mu\hat{a}(t) - \sum_\nu \gamma_{\mu\nu}^C\hat{C}_\nu(t) + \hat{f}_\mu(t), \quad (۱۰)$$

که برای عملگر نوفه داریم:

$$\hat{f}_\mu(t) = -i\sum_j \alpha_{j\mu}e^{-i\omega_j(t-t_0)}\hat{b}_j(t_0), \quad (۱۱)$$

همان طورکه مشاهده می‌شـود درغیـاب تقریـب مـوج چرخـان معادلهٔ حاکم برعملگر نابودی حمام حرارتـی غیـر تعـادلی یـک معادلهٔ نوسانی است در حالی که درحضورتقریب موج چرخـان معادلهٔ حاکم برعملگر نابودی حمـام غیـر تعـادلی یـک معادلـهٔ نوسانی- اتلافی است. درواقع فوتون‌های مجازی باعـث حـذف اثرات اتلاف ازمعادلهٔ لانژون مربوط به عملگر نابودی حمام غیر تعادلی مـی‌شـود. در اینجـا درغیـاب و در حضـورتقریب مـوج چرخان، مقدار متوسط نوفـه نسـبت بـه درجـات آزادی حمـام حرارتی تعادلی صفر می‌شود.

$$\left\langle \hat{f}_\mu(t)\right\rangle_B = 0, \quad (۱۲)$$

در اینجا مفهوم $\left\langle \hat{O}(t)\right\rangle_B$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left\langle \hat{O}(t)\right\rangle_B = Tr\left[\hat{O}(t)\hat{\rho}_B\right], \quad (۱۳)$$

ماتریس چگالی اولیهٔ حمام حرارتی تعادلی توسـط رابطـهٔ زیـر تعریف می‌شود:

$$\hat{\rho}_B = \prod_j\left[exp\left(\frac{-\omega_j\hat{b}_j\hat{b}_j^+}{KT}\right)\right]\left[1-exp\left(\frac{\omega_j}{KT}\right)\right], \quad (۱۴)$$

که T دمای حمام حرارتی است. حال یک عملگر کند تغییـر بـه صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{C}_\mu(t) = \hat{C}_\mu(t)e^{i\Omega_\mu(t-t_0)}, \quad (۱۵)$$

در این صورت معادلهٔ (۸) به شکل زیر در می‌آید:

$$\dot{\tilde{C}} = -ig_\mu e^{i\Omega_\mu(t-t_0)}\left[\hat{a}(t)+\hat{a}^+(t)\right] + \hat{F}_\mu(t), \quad (۱۶)$$

در اینجا تعریف کرده‌ایم:

$$\hat{F}_\mu(t) = \hat{f}_\mu(t)e^{i\Omega_\mu(t-t_0)}, \quad (۱۷)$$

خصوصیات مربوط به عملگر نوفه را می‌توان بـه صـورت زیـر خلاصه کرد:

$$\left\langle \hat{F}_\mu(t)\right\rangle_B = 0, \quad (۱۸)$$

همچنین داریم:

$$\left\langle \hat{F}_\mu^+(t)\hat{F}_\nu(t')\right\rangle_B = \gamma_{\mu\nu}^C\left(2\bar{N}(\Omega_\nu)+1\right)\delta(t-t')\delta_{\mu\nu}, \quad (۱۹)$$

در اینجا از روابط زیر استفاده کرده‌ایم:

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{b}_m^+(t_0)\hat{b}_n(t_0)\right\rangle &= \bar{N}(\omega_n)\delta_{mn},\\ \left\langle \hat{b}_m(t_0)\hat{b}_n^+(t_0)\right\rangle &= \left(\bar{N}(\omega_m)+1\right)\delta_{mn},\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

$\bar{N}(\omega_n)$ متوسط حرارتی عملگر تعداد حمام گرمایی تعادلی است و داریم:

$$\bar{N}(\omega_n)=\frac{1}{exp\left(\frac{\omega_n}{KT}\right)-1}, \qquad (۲۱)$$

معادلهٔ (۲۰) نشان دهندهٔ یک اتلاف مستقل از بسامد اهمی خالص برای حمام غیر تعادلی است. اگر از تقریب موج چرخان استفاده کنیم با استفاده از روابط (۱۱)، (۱۷) و (۲۰) داریم:

$$\left\langle \hat{F}_\mu^+(t)\hat{F}_\nu(t')\right\rangle_B=\gamma_{\mu\nu}^C\left(\bar{N}(\Omega_\nu)\right)\delta(t-t')\delta_{\mu\nu}, \qquad (۲۲)$$

از روابط (۱۹) و(۲۱) مشاهده می‌شود تابع همبستگی نوفه در دمای صفر $(\bar{N}(\Omega_\nu)=0)$ درغیاب موج چرخان، غیرصفر ولی درحضور تقریب موج چرخان صفر خواهد شد. به علاوه مشاهده می‌کنیم که به دلیل این که تعداد متوسط حرارتی عملگرتعداد حمام غیر تعادلی $\left(\bar{N}(\Omega_\nu)\right)$ با دما رابطه مستقیم دارد، نتیجه می‌گیریم که با افزایش دما تابع همبستگی هم درغیاب و هم درحضور تقریب موج چرخان بزرگ‌تر خواهد شد. همچنین به دلیل این که متوسط حرارتی عملگر تعداد همواره یک تابع مثبت است $\left(\bar{N}(\Omega_\nu)\succ 0\right)$ تابع همبستگی نوفه درغیاب تقریب موج چرخان نسبت به در حضور تقریب موج چرخان بزرگ‌تر است. درواقع فوتون‌های مجازی باعث بزرگ‌تر شدن تابع همبستگی درغیاب تقریب موج چرخان می‌شود. همچنین مشاهده می‌شود که درغیاب و در حضور تقریب موج چرخان، نوفه سفید خواهد بود. حضورتابع دیراک $\delta_{\mu\nu}$ برای حفظ تقریب سکولار لازم است. بنابراین در غیاب تقریب، موج چرخان به معادلهٔ اتلافی زیر برای مدهای حمام غیر تعادلی می‌رسیم.

$$\dot{\hat{C}}_\mu(t)=-i\Omega_\mu\hat{C}_\mu(t)-ig_\mu\hat{a}(t)+\hat{f}_\mu(t), \qquad (۲۳)$$

در حضور تقریب موج چرخان به معادلهٔ نوسانی- اتلافی زیر برای مدهای حمام غیر تعادلی می‌رسیم.

$$\dot{\hat{C}}_\mu(t)=-i\Omega_\mu\hat{C}_\mu(t)-ig_\mu\hat{a}(t)-\gamma_{\mu\mu}^c\hat{C}_\mu(t)+\hat{f}_\mu(t), \qquad (۲۴)$$

عملگرنوفه به واسطهٔ جفت شدگی نوسانگر هماهنگ ساده با حمام حرارتی ایجاد می‌شود. همچنین عملگر $\hat{C}_\mu(t)$ درحضورتقریب موج چرخان زمان واهلش $\left(\frac{1}{\gamma_{\mu\mu}^c}\right)$ دارد که از مقیاس زمانی همبستگی نوفه کوچک‌تراست. استفاده ازتقریب موج چرخان در هامیلتونی برهم‌کنش بین نوسانگر و حمام به مفهوم استفاده از مدل جفت شدگی خطی است. فورد و لویز [۵۰] نشان دادند که استفاده از تقریب موج چرخان باعث غیر واقعی شدن هامیلتونی می‌شود (به عنوان مثال طیفی از ویژه مقدار تا $-\infty$ خواهیم داشت). در واقع نکتهٔ اساسی، وابستگی ثابت جفت شدگی درمخرج به یک بسامد خاص است. (به عنوان مثال همان طور که در مرجع [۵۰] اشاره شده است یک تبدیل مناسب جایگزینی g_j با عبارت $\frac{1}{\sqrt{\omega_0\omega_j}}$ است). با این وجود یک روش استاندارد درکوانتم اپتیک تبدیل جمع روی مدها به انتگرال روی چگالی مدها $D(\omega_j)$ است (درفضای آزاد برابر $\frac{V\,\omega_k^2}{c^2\pi^2}$ می‌شود). برای مثال $\sum_j\left|g_j\right|^2\to\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega D(\omega)g^2(\omega)$. بنابراین دیگر مشکل وابستگی به یک بسامد خاص درمخرج ثابت جفت شدگی نخواهیم داشت. در اینجا ما معادلهٔ لانژون را برای سیستم شامل حمام - نوسانگر درحضور و درغیاب تقریب موج چرخان به دست آوردیم. اساس این مدل جایگزینی یک جملهٔ اتلافی به جای حمام حرارتی درمعادلات هایزنبرگ است که در نهایت یک نیروی نوفه درمعادلات لانژون ظاهر می‌شود. این نیروها خواص زیر را دارند:

- ویژگی‌های آماری صحیحی دارند که با حد کلاسیکی نیزدر توافق است.
- این جملات برای حفظ رابطهٔ عدم قطعیت هایزنبرگ لازم هستند.

در ادامهٔ بحث موارد فوق را به طور کامل تجزیه و تحلیل می‌کنیم. درواقع ریشهٔ اصلی رویکرد آمارکوانتومی در نظریهٔ اتلاف، معادل نوسانی- اتلافی است که نمایش تعادل دینامیکی

بین ورود انرژی ازحمام به نوسانگر به دلیل نوسانات (افت و خیز) و خروج انرژی از سیستم به حمام حرارتی ناشی ازاتلاف است.

۳. رابطهٔ نوسانی و نوسانی- اتلافی برای حمام غیر تعادلی

در این قسمت تحول زمانی عملگرنابودی حمام غیر تعادلی $\hat{C}_{\mu}(t)$ را بررسی می‌کنیم. وضعیت فیزیکی در نظر گرفته شده به صورت زیر است. ما فرض می‌کنیم که درلحظهٔ $t=t_{\circ}$ برانگیختگی مدهای $\left(\hat{C}_{\mu}^{+},\hat{C}_{\mu}\right)$ حمام شروع می‌شود و حالت آن به یک حالت غیر پایدار تبدیل می‌شود و حمام نیزیک حمام غیر تعادلی خواهد شد. ما فرض می‌کنیم اثرات واکنش مدهای سیستم روی مدهای حمام کوچک است به طوری که بتوان از آن صرف نظر کرد. ازحل معادلهٔ (۸) درغیاب تقریب موج چرخان داریم:

$$\hat{C}_{\mu}(t)=\hat{C}_{\mu}^{S}(t)+\hat{C}_{\mu}(t_{\circ})e^{-i\Omega_{\mu}(t-t_{\circ})}-ig_{\mu}\int_{t_{\circ}}^{t}dt'e^{-i\Omega_{\mu}(t-t_{\circ})}\hat{a}(t'), \tag{۲۵}$$

جملهٔ اول سمت راست معادلهٔ فوق درغیاب جفت شدگی مدهای سیستم نشان دهندهٔ یک جواب پایدار (برای زمان‌های بزرگ) به شکل زیر است:

$$\hat{C}_{\mu}^{s}(t)=\hat{C}_{\mu}^{S}e^{-i\left[\Omega_{\mu}(t-t_{\circ})+\varphi_{\mu}^{s}\right]}, \tag{۲۶}$$

در اینجا دامنهٔ $\hat{C}_{\mu}^{S}$ (عملگر) و فاز φ_{μ}^{s} (عدد) فرض می‌شوند که توزیع بی‌نظم دارند. ماهیت بی‌نظم بودن $\hat{C}_{\mu}^{S}$ به روش زیر قابل درک است. اولاً در غیاب جفت شدگی g_{μ} ، معادلهٔ (۲۳) جواب زیررا دارد:

$$\hat{C}_{\mu}(t)=\hat{C}_{\mu}(t_{\circ})e^{-i\Omega_{\mu}(t-t_{\circ})}+e^{-i\Omega_{\mu}(t-t_{\circ})}\int_{t_{\circ}}^{t}dt'f_{\mu}(t')e^{i\Omega_{\mu}(t'-t_{\circ})}, \tag{۲۷}$$

در حالت پایا به دلیل این که جملهٔ اول نوسانات سریع دارد از آن صرفنظر می‌کنیم. ثانیاً جملهٔ دوم به علت حضور $f_{\mu}(t)$ نوساناتی نامنظم دارد. با جایگزینی رابطهٔ (۹) در رابطهٔ بالا داریم:

$$\hat{C}_{\mu}^{S}(t)= e^{-i\Omega_{\mu}(t-t_{\circ})}\sum_{j}\left(-i\alpha_{j\mu}\right)\hat{b}_{j}(t_{\circ})\int_{t_{\circ}}^{t}dt'f_{\mu}(t')e^{\left(-i\omega_{j}+i\Omega_{\mu}\right)(t'-t_{\circ})}+ e^{-i\Omega_{\mu}(t-t_{\circ})}\sum_{j}\left(-i\alpha_{j\mu}\right)\hat{b}_{j}^{+}(t_{\circ})e^{\left(i\omega_{j}+i\Omega_{\mu}\right)(t'-t_{\circ})}, \tag{۲۸}$$

در اینجا نماد s نشان دهندهٔ حالت پایا است. جواب بالا نشان می‌دهد $\hat{C}_{\mu}^{S}(t)$ که اساساً یک برهم‌نهی از دامنه‌ها (عملگرها) و فازهای(عددها) نامشخص است (زیرا شرایط اولیه برای تعداد بی‌نهایت نوسانگرهای حمام $\hat{b}_{j}(t_{\circ})$ کاملاً نامشخص فرض شده است) و می‌تواند به شکل فشرده به صورت معادلهٔ (۲۶) نوشته شود. همچنین وقتی به شکل معادلهٔ (۲۶) نوشته شود مشخص خواهد شد که $\hat{C}_{\mu}^{S}$ و φ_{μ}^{s} توزیع کاتوره‌ای دارند. بنابراین (۲۵) یک جواب فوری برای معادلهٔ (۲۳) خواهد بود. برای بررسی سازگاری معادلهٔ (۲۵) چند نکته را یادآوری می‌کنیم:

- برای بازیابی دامنهٔ اولیهٔ $\hat{C}_{\mu}^{S}$ به دلیل این که $\bar{\hat{C}}_{\mu}^{S}(t_{\circ})=\circ$ است کافی ازمعادلهٔ (۲۴) یک متوسط انسامبلی در لحظه $t=t_{\circ}$ گرفته شود.
- همچنین مشاهده می‌شود که جملهٔ اول معادلهٔ (۲۴) پاسخی برای معادلهٔ اتلافی معمولی است؛ وقتی که مدهای حمام حرارتی در $t=\infty$ به تعادل می‌رسند. همچنین جملهٔ $\hat{C}_{\mu}^{S}$ در $\hat{C}_{\mu}$ نشان دهندهٔ حالت پایا است.
- همچنین مشاهده می‌کنیم جملهٔ $\hat{C}_{\mu}^{S}$ در $\hat{C}_{\mu}$ برای حفظ رابطهٔ جابه‌جایی بوزونی عملگر $\hat{C}_{\mu}$ و رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ لازم است.

جملهٔ دوم دررابطهٔ (۲۵) حاوی اطلاعاتی از به تعادل رسیدن حمام غیر تعادلی است که به جهت برهم کنش بین حمام غیر تعادلی و حمام تعادلی ظاهر شده است و درواقع یک جملهٔ حافظه است. جملهٔ سوم درطرف راست معادلهٔ (۲۵) اثرات جفت شدگی مدهای سیستم با حمام غیر تعادلی است. درغیاب تقریب موج چرخان معادلهٔ (۲۵) به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{C}_\mu(t)=\hat{C}^S_\mu(t)+\hat{C}_\mu(t_\circ)e^{\left(-i\Omega_\mu-\gamma^C_{\mu\mu}\right)(t-t_\circ)}-ig_\mu\int_{t_\circ}^{t}dt'e^{\left(-i\Omega_\mu-\gamma^C_{\mu\mu}\right)}\hat{a}(t'),\tag{۲۹}$$

همـان طـور کـه مشـاهده مـی‌شـود معادلـهٔ حـاکم بـر $\hat{C}_\mu$ درحضورتقریب مـوج چرخـان یـک معادلـهٔ نوسـانی- اتلافـی خواهد بود. با جـای‌گـذاری معادلـهٔ (۲۵) در معادلـهٔ (۲) بـرای عملگر کند تغییر $\hat{A}(t)$ داریم:

$$\dot{\hat{A}}(t)=-\sum_\mu g_\mu^2\int_{t_\circ}^{t}dt'e^{i\left(\omega_\circ-\Omega_\mu\right)(t-t')}A(t')+\sum_\mu g_\mu^2\int_{t_\circ}^{t}dt'e^{i\left(\omega_\circ+\Omega_\mu\right)(t-t')}\hat{A}(t')+\hat{Z}(t),\tag{۳۰}$$

که

$$\hat{Z}(t)=-i\sum_\mu g_\mu\left[\hat{C}^S_\mu+C_\mu(t_\circ)e^{-i\Omega_\mu(t-t_\circ)}\right]e^{i\omega_\circ(t-t_\circ)}-i\sum_\mu g_\mu\left[\hat{C}^{+S}_\mu+\hat{C}^{+}_\mu(t_\circ)e^{i\Omega_\mu(t-t_\circ)}\right]e^{i\omega_\circ(t-t_\circ)},\tag{۳۱}$$

معادلهٔ (۳۰) یک معادلهٔ غیرمارکوفی است که اثـرات حافظـه در عملگر سیستم $\hat{A}(t)$ ،که خود نیز وابسـته بـه زمـان t' اسـت، ظاهر شده اسـت. اگـراز تقریـب مـوج چرخـان اسـتفاده کنـیم خواهیم داشت:

$$\dot{\hat{A}}(t)=-\sum_\mu g_\mu^2\int_{t_\circ}^{t}dt'e^{i\left(\omega_\circ-\Omega_\mu\right)(t-t')}e^{-i\gamma^C_{\mu\mu}}A(t')+\hat{Z}(t),\tag{۳۲}$$

در اینجا داریم:

$$\hat{A}(t)=\hat{a}(t)e^{-i\omega_\circ(t-t_\circ)},\tag{۳۳}$$

$$\hat{Z}(t)=-i\sum_\mu g_\mu\left[\hat{C}^S_\mu+C_\mu(t_\circ)e^{\left(-i\Omega_\mu-\gamma^C_{\mu\mu}\right)(t-t_\circ)}\right]e^{i\omega_\circ(t-t_\circ)},\tag{۳۴}$$

مشـاهده مـی‌شـود کـه معادلـهٔ لانـژون حـاکم برعملگرنـابودی نوسانگر هماهنگ درحضور و در غیاب تقریـب مـوج چرخـان، یک معادلهٔ نوسانی- اتلافی خواهد بـود. همچنـین درحالـت بـا تقریـب مـوج چرخـان درحافظـه یـک جملـهٔ اضـافی بـه صورت $e^{-i\gamma^c_{\mu\mu}(t-t')}$ ظاهر می‌شود که به دلیـل واهلـش مـدهای حمام حرارتی غیر تعادلی ناشی ازجفت شدگی با حمام حرارتی تعادلی وجود می‌آید. درواقع فوتون‌های مجازی درقسـمت قبـل باعث حذف جملهٔ واهلش در حافظه می‌شـود. همچنـین $\hat{Z}(t)$ عمگرنوفه برای مدهای حمام غیر تعـادلی اسـت. بـرای جفـت شدگی‌های ضعیف، دو جملهٔ اول طرف راسـت معادلـهٔ (۳۰) را می‌توان به شکل زیر ساده کرد:

$$\hat{A}(t)\int d\Omega\rho(\Omega)g^2(\Omega)\int_{\circ}^{\infty}d\tau e^{i(\omega_\circ-\Omega)\tau},\tag{۳۵}$$

$$\hat{A}(t)\int d\Omega\rho(\Omega)g^2(\Omega)\int_{\circ}^{\infty}d\tau e^{i(\omega_\circ+\Omega)\tau},\tag{۳۶}$$

در اینجا جمع روی مدهای حمام را به انتگرال تبدیل کرده‌ایم و $\rho(\Omega)$ چگـالی مـدهای حمـام غیـر تعـادلی اسـت. بعـد ازانتگرال‌گیری روی Ω ، به معادلهٔ لانژون زیرمی‌رسیم.

$$\dot{\hat{A}}(t)=-\Gamma\hat{A}(t)+\hat{Z}(t),\tag{۳۷}$$

در اینجا داریم:

$$\Gamma=\pi g^2(\omega_\circ)\rho(\omega_\circ),\tag{۳۸}$$

که Γ ثابت اتلاف است و در حدی که $\gamma^C_{\mu\mu}$ بسیارکوچک باشد به جهت افت و خیزهای حمام غیر تعادلی به وجود می‌آید. بـا استفاده ازرابطهٔ (۳۴) می‌توان نوشت:

$$\left\langle\hat{Z}^+(t)\hat{Z}(t')\right\rangle=\sum_\mu g_\mu^2\left[\left\langle\hat{C}^{+S}_\mu C^S_\mu\right\rangle_{NR}+\left\langle\hat{C}^{+}_\mu(t_\circ)C_\mu(t_\circ)\right\rangle\right]e^{i\left(\Omega_\mu-\omega_\circ\right)(t-t')}+\sum_\mu g_\mu^2\left[\left\langle\hat{C}^{+S}_\mu C^S_\mu\right\rangle_{NR}+\left\langle\hat{C}^{+}_\mu(t_\circ)C_\mu(t_\circ)\right\rangle\right]e^{-i\left(\Omega_\mu+\omega_\circ\right)(t-t')},\tag{۳۹}$$

تعداد متوسط فوتون‌هـای غیـر تعـادلی توسـط رابطـهٔ زیـر داده می‌شود:

$$\bar{n}\left(\Omega_\mu,t_\circ\right)=\left\langle\hat{C}^{+}_\mu(t_\circ)\hat{C}_\mu(t_\circ)\right\rangle_{NR},\tag{۴۰}$$

که $t_\circ$ نشان دهندهٔ وابستگی تعداد متوسط فوتـون‌هـا بـه حالـت اولیه است. تعداد متوسط فوتون‌ها در حالت پایـا توسـط رابطـه زیر داده می‌شود:

$$\bar{n}\left(\Omega_\mu\right)=\left\langle\hat{C}^{S+}_\mu\hat{C}^S_\mu\right\rangle_{NR},\tag{۴۱}$$

در اینجا $\left\langle\hat{O}(t)\right\rangle_{NR}$ به مفهـوم $\left\langle\hat{O}(t)\right\rangle_{NR}=Tr\left\{\hat{O}(t)\hat{\rho}_C\right\}$ است که $\hat{\rho}_C$ ماتریس چگالی اولیهٔ حمام غیـر تعـادلی اسـت و

توسط رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{\rho}_C = \prod_{\mu} exp\left(\frac{-\Omega_\mu \hat{C}_\mu^{+} \hat{C}_\mu}{KT}\right)\left[1 - exp\left(\frac{\Omega_\mu}{KT}\right)\right], \qquad (۴۲)$$

اگر از تقریب موج چرخان استفاده کنیم با استفاده ازمعادلهٔ (۳۴) به دست می‌آوریم:

$$\left\langle \hat{Z}^{+}(t)\hat{Z}(t')\right\rangle_{NR} = \sum_{\mu} g_\mu^{2}\left[\begin{array}{l}\left\langle \hat{C}_\mu^{+S} C_\mu^{S}\right\rangle_{NR} e^{i(\Omega_\mu-\omega_0)(t-t')} + \\ \left\langle \hat{C}_\mu^{+}(t_0) C_\mu(t_0)\right\rangle e^{i(\Omega_\mu-\omega_0)(t-t')} e^{2\gamma_{\mu\mu}^{c}\omega_0} e^{-\mu_{\mu\mu}^{c}(t+t')}\end{array}\right], \qquad (۴۳)$$

با تبدیل جمع بـه انتگـرال درمعادلـهٔ (۳۹) بـرای حالـت بـدون تقریب موج چرخان داریم:

$$\left\langle \hat{Z}^{+}(t)\hat{Z}(t')\right\rangle_{NR} = 2\left[\Gamma\bar{n}(\omega_0) + \Gamma\bar{n}(\omega_0, t_0)\right]\delta(t-t'), \qquad (۴۴)$$

با تبدیل جمع به انتگرال درمعادلهٔ (۴۴) و جـای‌گـذاری γ بـه جای $\gamma_{\mu\mu}^{c}$، برای حالت با تقریب موج چرخان داریم:

$$\left\langle \hat{Z}^{+}(t)\hat{Z}(t')\right\rangle_{NR} = \left[\Gamma\bar{n}(\omega_0) + e^{-2\gamma(t-t_0)}\Gamma\bar{n}(\omega_0, t_0)\right]\delta(t-t'), \qquad (۴۵)$$

حال می‌توانیم $\Gamma\bar{n}(\omega_0, t_0)$ را بر حسب انحـراف ازحالـت پایـا $\Gamma\bar{n}(\omega_0)$ به صورت زیر بیان کنیم:

$$\Gamma\bar{n}(\omega_0, t_0) = D(t_0) - \Gamma\bar{n}(\omega_0), \qquad (۴۶)$$

همچنین ضریب پخش وابسته به زمان $D(t)$ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} D(t) &= \Gamma\bar{n}(\omega_0) + \left[D(t_0) - \Gamma\bar{n}(\omega_0)\right] \\ &= D(t_0), \end{aligned} \qquad (۴۷)$$

همان طور که دیده می‌شـود بـرای حالـت بـدون تقریـب مـوج چرخان، ضریب پخش در هر لحظه با مقداراولیه برابر است. در واقع فوتون‌های مجازی و جملات پاد چرخان باعـث مـی‌شـود ضریب پخش درحالت پایا باشد وهمچنین داریم:

$$\left\langle \hat{Z}^{+}(t)\hat{Z}(t')\right\rangle_{NR} = \left\{\Gamma\bar{n}(\omega_0) + \left[D(t_0) - \Gamma\bar{n}(\omega_0)\right]\right\}\delta(t-t') = D(\omega_0)\delta(t-t'), \qquad (۴۸)$$

درحضورتقریب موج چرخان برای ضریب پخش $D(t)$ داریم:

$$D(t) = \Gamma\bar{n}(\omega_0) + \left[D(t_0) - \Gamma\bar{n}(\omega_0)\right]e^{-2\gamma(t-t_0)}, \qquad (۴۹)$$

همان طور که دیده می‌شود برای حالت با تقریب موج چرخـان، ضریب پخش در هر لحظه با مقداراولیه متفاوت خواهـد بـود و نسبت به زمان متحول خواهد شد. همچنین داریم:

$$\left\langle \hat{Z}^{+}(t)\hat{Z}(t')\right\rangle_{NR} = \left\{\Gamma\bar{n}(\omega_0) + \left[D(t_0) - \Gamma\bar{n}(\omega_0)\right]e^{-2\gamma(t-t_0)}\right\}\delta(t-t'), \qquad (۵۰)$$

معادلهٔ (۴۹) بـه صـورت یـک معادلـهٔ نوسـانی- اتلافـی اسـت. نوسانات لحظه‌ای حمام غیر تعادلی به دلیل اتلاف انرژی سیستم (که به خاطر حضور Γ است) صورت مـی‌گیـرد. ماهیـت عـدم تعادل حمام به واسطهٔ شرایط اولیه در نظرگرفته شده اسـت کـه باعث ایجاد یک ضریب پخش اولیه $D(t_0)$ و یک جملـهٔ فـرو افت نمایی می‌شود. درحد زمان‌های بزرگ، معادلهٔ فـوق تبـدیل به یک معادلهٔ نوسانی- اتلافی معمولی برای حمام غیـر تعـادلی می‌شود. حال ازمعادلهٔ (۴۸) استفاده مـی‌کنـیم و چگـالی انـرژی مدهای حمام غیر تعادلی را در حالت بدون تقریب موج چرخان به دست می‌آوریم. چگالی انرژی متناسب با طیف توان متمرکـز شده حول بسامد ω_0 از رابطهٔ زیر به دست می‌آید $[\hbar = 1]$:

$$\begin{aligned} u(\Omega, t) &= \frac{\Omega}{4\Gamma}\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left\langle \hat{Z}^{+}(t)\hat{Z}(t+\tau)\right\rangle e^{i(\Omega-\omega_0)\tau} \\ &= \frac{1}{2}\Omega\bar{n}(\Omega) + \left[u(\Omega, t_0) - \frac{1}{2}\Omega\bar{n}(\Omega)\right] \\ &= u(\Omega, t_0), \end{aligned} \qquad (۵۱)$$

همان طور که مشاهده مـی‌شـود درحالـت بـدون تقریـب مـوج چرخان، چگالی انرژی در هر لحظه با مقـدار اولیـهٔ خـود برابـر است. در اثر حضورجملات پاد چرخان و فوتون‌هـای مجـازی، چگالی انرژی نسبت به زمان متحول نخواهد شد و مثل ضـریب پخش همواره درحالت پایـا اسـت. درحالـت بـا تقریـب مـوج چرخان داریم:

$$\begin{aligned} u(\Omega, t) &= \frac{\Omega}{4\Gamma}\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left\langle \hat{Z}^{+}(t)\hat{Z}(t+\tau)\right\rangle e^{i(\Omega-\omega_0)\tau} \\ &= \frac{1}{2}\Omega\bar{n}(\Omega) + e^{-2\gamma(t-t_0)}\left[u(\Omega, t_0) - \frac{1}{2}\Omega\bar{n}(\Omega)\right], \end{aligned} \qquad (۵۲)$$

نوسانات در عملگر نوفـهٔ $\hat{Z}(t)$ وابسـته بـه حالـت‌هـای غیـر تعادلی، نوسانگرهای حمام وچگالی انرژی $u(\Omega, t)$ اسـت. بـه عبارت دیگر توزیع چگالی انرژی غیر تعـادلی مـدهای نوسـانی

وابسته به ضریب اتلاف این مدها است و دیگـر در حالـت پایـا نخواهد بود ونسبت بـه زمـان متحـول خواهـد شـد. صـورت کلاسیکی معادلـهٔ بـالا درحـد دماهـای بـالا ($\bar{n}(\Omega)=\frac{1}{e^{\frac{\Omega}{KT}}-1}\cong\frac{\Omega}{KT}$) به صورت زیر خواهد بود:

$$u(\Omega,t)=\frac{1}{2}KT+e^{-2\gamma(t-t_0)}\left[u(\Omega,t_0)-\frac{1}{2}KT\right], \qquad (53)$$

به دلیل این که شکل کلاسیکی معادلـهٔ نوسـانی- اتلافـی غیـر تعادلی که ازروش‌های کلاسیکی بـه دسـت مـی‌آیـد دقیقاً بـا معادلهٔ (۵۳) یکسان است بنابراین معادلهٔ (۵۳) دلیلی بر صحت معادلهٔ (۵۲) است. نکتهٔ دیگری که باید درمعادلـهٔ (۵۲) بـه آن تأکید کنیم مفهوم یک حمام غیر تعادلی است که تـابع توزیـع بسامدی مدهای حمام تابعی از زمـان اسـت واصـولاً بایـد بـه دنبال یک روش سـازگار بـا نظریـهٔ دینامیـک کوانتـومی بـود. دراینجا ما یک روش جایگزین را دنبال کرده‌ایم. به دلیـل ایـن که ما درتصویر هایزنبرگ کار می‌کنیم دانستن ماتریس چگـالی کل اولیهٔ محیط (شامل حمام حرارتـی تعـادلی وغیـر تعـادلی) برای توصیف کامل دینامیک سیستم و محاسبهٔ تابع همبسـتگی کافی است. دلیل اساسی طبیعت غیر تعادلی حمـام نوسـانات، توزیع چگالی انرژی وابسته به زمـان $u(\Omega,t)$ اسـت. اثـرات برانگیختگی اولیه باعث یک تابع چگالی انرژی اولیه $u(\Omega,0)$ می‌شود که با مقدارتعادلی آن متفاوت است. درواقع ایـن یـک انحراف ازحالت تعادل است. همه موارد بالا در مـورد معادلـهٔ نوسانگر - اتلافی غیر تعادلی کلاسیکی نیزصـادق اسـت. قبـل ازاین که این قسمت را به پایان ببریم چند نکتـهٔ مهـم را بیـان می‌کنیم. اولاً در به دست آوردن رابطهٔ (۴۸) فـرض کـرده‌ایـم $\hat{Z}(t)$ درمحدودهٔ زمانی همبسـتگی مـدهای حمـام حرارتـی ثابت است. ثانیاً نظریهٔ ارائه شـده دربـالا بـر اسـاس موقعیـت کوانتوم اپتیکی خاص در نظر گرفته شده است. به طـور کلـی همان طور که درمراجع [۵۱ و ۵۲] نشان داده شده است نوفـهٔ یک حمام حرارتی دردمای پایین، یک نوفهٔ سفید نخواهد بود. اغلب با چنین حالتی درفیزیک مـادهٔ چگـال و فیزیـک شـیمی درسیستم‌های پیچیـده روبـرو مـی‌شـویم. همچنـین درمسـائل کوانتوم اپتیک، حمام حرارتی که شامل تعداد زیادی نوسـانگر هماهنگ است یک الگوی مناسب برای میدان اپتیکی اسـت و به طور گسترده از طیف نوفهٔ سفید استفاده می‌شود. به عـلاوه به دلیل این که $\sum_{\mu}g_{\mu}^{2}\bar{n}_{\mu}$ کنـد تغییراسـت وجمـع درمعادلـهٔ (۴۳) یـک بیشـینه در $\Omega_{\mu}=\omega_0$ دارد مـی‌تـوانیم جمـع رابـه انتگرال تبدیل کنیم ومعادلهٔ (۵۰) را به دست آوریم. از مباحث فوق می‌توان در به دست آوردن ضریب نشـرخود بـه خـودی انشتین یا نسبت فرو افت ویگنر- ویسکوف که مدهای سیستم یک بسامد مشخصهٔ ω_0 دارند استفاده کرد. بنا براین اگرچه مـا می‌توانیم طیف نوفـه را رنگـی در نظـر بگیـریم کـه پیامـد آن وابستگی بسامد به یک ثابت نرخ است با ایـن وجـود هماننـد قبل فرض می‌کنیم حمام گرمـایی پهـن شـدگی طیفـی دارد و زمان واهلش آن $\frac{1}{\gamma}$ است. درواقع یکی ازاهـداف اصـلی ایـن تحقیق بررسی واهلش ثانویهٔ سیستم روی جنبش اولیهٔ مدهای سیستم است. دراین قسمت براسـاس روابـط کوانتـوم اپتیـک، کلی‌ترین شکل معادلهٔ نوسانی- اتلافی برای سیستم‌هـای غیـر تعادلی را به دست آوردیم.

۴. فرو افت مدهای سیستم، تقریب ویگنر- ویسکوف

در ایـن قسـمت جـوابی بـرای معادلـهٔ دیفرانسـیل- انتگـرال هایزنبرگ- لانژون (معادلهٔ۲۸) برای مدهای سیستم که با حمـام غیر تعادلی جفت شده‌اند، تحت تقریب ویگنـر- ویسـکوف بـه دست مـی‌آوریـم. اگرازدوطـرف معادلـهٔ (۲۸) تبـدیل لاپـلاس بگیریم در غیاب تقریب موج چرخان داریم.

$$\bar{\hat{A}}(s)=\frac{\hat{a}(0)+\bar{\hat{Z}}(s)}{s+\sum_{\mu}\frac{g_{\mu}^{2}}{s+i\left(\Omega_{\mu}-\omega_0\right)}-\sum_{\mu}\frac{g_{\mu}^{2}}{s-i\left(\Omega_{\mu}+\omega_0\right)}}, \qquad (54)$$

که

$$\bar{\hat{A}}(s)=\int_0^{\infty}dt\hat{A}(t)e^{-st}, \qquad (55)$$

$$\bar{\hat{Z}}(s)=\int_0^{\infty}dt\hat{Z}(t)e^{-st}, \qquad (56)$$

یا می‌توان نوشت:

$$\bar{\hat{Z}}(s) = -i\sum_{\mu} g_{\mu} C_{\mu}(0)\left[\frac{1}{s+i\left(\Omega_{\mu}-\omega_{0}\right)}+\frac{1}{s-i\left(\Omega_{\mu}+\omega_{0}\right)}\right], \tag{۵۷}$$

از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که دامنه و فاز $\hat{C}^{s}_{\mu}(0)$ کاتوره‌ای است. همچنین از $\hat{A}(0)=\hat{a}(0)$ استفاده کرده‌ایم و فرض کرده‌ایم $t_{0}=0$. حال تابع Δ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\frac{1}{\Delta} = \left(s+\sum_{\mu}\frac{g_{\mu}^{2}}{s+i\left(\Omega_{\mu}-\omega_{0}\right)}+\sum_{\mu}\frac{g_{\mu}^{2}}{s+i\left(\Omega_{\mu}+\omega_{0}\right)}\right)^{-1}, \tag{۵۸}$$

برای بر همکنش ضعیف، تقریب صفرم به این صورت است که اگر $s=0$ باشد داشته باشیم $\Delta=0$. تقریب بعدی قرار دادن $s=0$ در مخرج جملات مجموع یابی در رابطهٔ (۵۸) است. به عبارت دیگر تحت تقریب ویگنر- ویسکوف اولین جابه‌جایی درقطب‌های ساده را محاسبه می‌کنیم که تقریباً توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$\Delta(0)-s \cong Lim_{s\to 0}\left(\sum_{\mu}\frac{g_{\mu}^{2}}{s+i\left(\Omega_{\mu}-\omega_{0}\right)}+\sum_{\mu}\frac{g_{\mu}^{2}}{s+i\left(\Omega_{\mu}+\omega_{0}\right)}\right)= \gamma^{W}+i\,\delta\omega, \tag{۵۹}$$

که γ^{W} و $\delta\omega$ کمیت‌های حقیقی هستند وداریم:

$$\gamma^{W}=0, \tag{۶۰}$$

$$\delta\omega=\int\frac{d\,\Omega\rho(\Omega)\,g^{2}(\Omega)}{\Omega-\omega_{0}}, \tag{۶۱}$$

همان طورکه مشاهده می‌شود درغیاب تقریب موج چرخان، پهنای خط صفراست ($\gamma^{W}=0$) وپهن‌شدگی طیفی نخواهیم داشت ولی جابه‌جایی بسامد $\delta\omega$ غیرصفراست. در واقع فوتون‌های مجازی باعث صفر شدن پهنای خط می‌شود و ثابت اتلاف γ دراینجا نقشی ندارد. درحضورتقریب موج چرخان، با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف معادلهٔ (۳۳) داریم:

$$\bar{\hat{A}}(s)=\frac{\hat{a}(0)+\bar{\hat{Z}}(s)}{s+\sum_{\mu}\frac{g_{\mu}^{2}}{s+i\left(\Omega_{\mu}-\omega_{0}\right)+\gamma_{\mu\mu}^{c}}}, \tag{۶۲}$$

که

$$\bar{\hat{Z}}(s)=-i\sum_{\mu} g_{\mu} C_{\mu}(0)\frac{1}{s+i\left(\Omega_{\mu}-\omega_{0}\right)+\gamma_{\mu\mu}^{c}}, \tag{۶۳}$$

در این حالت معادلهٔ (۵۸) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{\Delta}=\left(s+\sum_{\mu}\frac{g_{\mu}^{2}}{s+i\left(\Omega_{\mu}-\omega_{0}\right)+\gamma_{\mu\mu}^{c}}\right)^{-1}, \tag{۶۴}$$

با استفاده از تقریب ویگنر- ویسکوف داریم:

$$\Delta(0)-s \cong Lim_{s\to 0}\sum_{\mu}\frac{g_{\mu}^{2}}{s+i\left(\Omega_{\mu}-\omega_{0}\right)+\gamma_{\mu\mu}^{c}}= \gamma^{W}+i\,\delta\omega, \tag{۶۵}$$

که

$$\gamma^{W}=\int d\,\Omega\rho(\Omega)g^{2}(\Omega)\frac{\gamma}{\left(\Omega-\omega_{0}\right)^{2}+\gamma^{2}}, \tag{۶۶}$$

$$\delta\omega=\int d\,\Omega\rho(\Omega)g^{2}(\Omega)\frac{\Omega-\omega_{0}}{\left(\Omega-\omega_{0}\right)^{2}+\gamma^{2}}, \tag{۶۷}$$

بر خلاف مورد بدون تقریب موج چرخان، پهنای خط $\gamma^{W}\neq 0$. وابستگی پهنای خط و جابه‌جایی بسامد به ثابت اتلاف γ نشان می‌دهد که این دو پارامتربه دلیل واهلش حمام غیر تعادلی ناشی از برهم‌کنش با حمام حرارتی تعادلی ایجاد می‌شوند. درحد $\gamma\to 0$ معادلات فوق به ثابت فرو افت معمولی وجابه‌جایی ترازها تبدیل می‌شود. برای مثال داریم:

$$\underset{\mu\to 0}{Lim}=\gamma^{W}=\Gamma, \tag{۶۸}$$

با تبدیل معکوس لاپلاس از دو طرف معادلهٔ (۵۴) درحالت بدون تقریب موج چرخان، به دست می‌آوریم:

$$\hat{A}(t)=\hat{a}(t)e^{-i\,\delta\omega t}-\sum_{\mu} g_{\mu}\hat{C}_{\mu}(t)\frac{e^{-i\left(\Omega_{\mu}-\omega_{0}\right)t}\left[1-e^{i\left(\Omega_{\mu}-\omega_{0}-\delta\omega\right)}\right]}{\omega_{0}-\Omega_{\mu}+\delta\omega}, \tag{۶۹}$$

با تبدیل معکوس لاپلاس از دو طرف معادلهٔ (۶۲) درحضور تقریب موج چرخان به دست می‌آوریم:

$$\hat{A}(t)=\hat{a}(t)e^{-\left(\gamma^{w}+i\,\delta\omega\right)t}-\sum_{\mu}g_{\mu}\hat{C}_{\mu}(t)\frac{e^{-\gamma t}e^{-i\left(\Omega_{\mu}-\omega_{\circ}\right)t}\left[1-e^{-\left(\gamma^{w}-\gamma\right)t}e^{i\left(\Omega_{\mu}-\omega_{\circ}-\delta\omega\right)}\right]}{\left(\omega_{\circ}-\Omega_{\mu}+\delta\omega\right)-i\left(\gamma^{w}-\gamma\right)},\tag{۷۰}$$

توجه داریم که در به دست آوردن γ^{W} و $\delta\omega$ فرض کردیم برهم‌کنش ضعیف باشد و چگالی مدهای حمام غیر تعادلی $\rho(\Omega)$ یک تابع هموار است. درواقع روابط فوق نشان می‌دهند حتی هنگامی که برهم‌کنش ضعیف است و می‌توان ازتقریب موج چرخان استفاده کرد جملات پاد چرخان اثرات مهمی روی پهنای خط طیفی وجابه‌جایی بسامد دارند. به دلایل مشابه و فرض این که جملات تصحیحی درمعادلهٔ (۶۹) کوچک باشد می‌توان $\hat{A}(t)$ را به صورت زیر نوشت:

$$\hat{A}(t)=\hat{a}(t)e^{-\left(\gamma^{w}+i\,\delta\omega\right)t}+\chi(\omega_{\circ})\hat{C}_{\omega_{\circ}}(\circ)\left[e^{-\gamma t}-e^{-\left(\gamma^{w}+i\,\delta\omega\right)t}\right],\tag{۷۱}$$

که $\chi(\omega_{\circ})$ توسط رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$\chi(\omega_{\circ})=\left[\frac{g(\omega_{\circ})\rho(\omega_{\circ})}{\delta\omega-i\left(\gamma^{w}-\gamma\right)}\right],\tag{۷۲}$$

بنابراین تحول اولیهٔ مدهای سیستم (نوسانگر هماهنگ) به واهلش ثانویه نوسانگرهای حمام غیر تعادلی وابسته است. معادلهٔ (۶۶) برای γ^{w} در واقع اصلاح دینامیکی ثابت فرو افت ویگنر- ویسکوف است؛ زیرا به دلیل وابستگی به γ نشان دهنده اثرات جفت شدگی حمام‌های غیر تعادلی و تعادلی است. در مرجع [۵۳] اصلاح ثابت نشرخود به خودی ازطریق تغییرات مناسب در مدهای خلأ در کاواک انجام شده است. در حالی که درمسائل الکترودینامیکی هفتاد و هفت شرایط مرزی متفاوت درنظرگرفته می‌شود اصلاح معرفی شده در اینجا تغییر در رفتار دینامیکی سیستم است؛ زیرا که اثرات واهلش حمام غیر تعادلی را ناشی از برهم‌کنش با مدهای سیستم را نشان می‌دهد. همچنین این انتظاروجود دارد که دراین شرایط جدید به طور همزمان نرخ فرو افت اتمی نیز تغییر کند. قبل از این که این بحث را به پایان ببریم به این نکته اشاره می‌کنیم که درنظریهٔ کوانتومی اتلاف که دراین قسمت مطرح شد، ما بحث را به طیف بسامد مدهای میدان تابشی محدود کرده‌ایم. در فیزیک حالت جامد چگالی حالت‌ها را از نوع دبی که یک بسامد قطع ω_c دارد درنظرمی‌گیرند. در الکترودینامیک کوانتومی به دلیل وجود شرایط مرزی، چگالی حالت‌ها متفاوت خواهد بود.

۵. طیف وابسته به زمان مدهای کاواک در حضور حمام غیر تعادلی

یک پیامد مهم رابطهٔ نوسانی- اتلافی غیر تعادلی (۴۸) وابستگی زمانی ثابت پخش است. بنابراین این انتظار وجود دارد که این وابستگی زمانی در طیف نوفهٔ مدهای سیستم ظاهر شود. به این منظور در این قسمت وابستگی زمانی طیف مدهای کاواک را که با یک حمام غیر تعادلی جفت شده است بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این وابستگی باعث فرو افت مدهای سیستم با ثابت فرو افت Γ می‌شود. به طور کلی ما طیف را با استفاده ازمعادلهٔ لانژون برای مدهای میدان کوانتومی که با یک محیط با بهره $\alpha(t)$ در حال تراکنش است به دست می‌آوریم. به طور کلی بهرهٔ $\alpha(t)$ عملگری است که با عملگر تعداد $\hat{A}^{+}(t)\hat{A}(t)$ اشباع می‌شود [صفحه ۴۶۷ مرجع۵۴]. معادلهٔ لانژون دراین حالت به صورت زیر است:

$$\dot{\hat{A}}(t)=-(\Gamma+i\,\delta-\alpha)\hat{A}(t)+\hat{Z}(t),\tag{۷۳}$$

$\hat{A}(t)$ و $\hat{Z}(t)$ به ترتیب عملگرهای کند تغییر نابودی و نوفه هستند. به طور کلی از معادلهٔ (۷۰) می‌توان برای اشباع یک لیزرکه شامل یک اتم دو ترازی و یک محیط نیمه هادی است استفاده کرد. در اینجا $\delta(=\omega_{\circ}-\upsilon)$ وادنیدگی[۱] است که درواقع اختلاف بین بسامد مدهای نوسانگر υ و بسامد تشدید کاواک $\omega_{\circ}$ است و α نیز ضریب بهره است که فرض می‌کنیم یک عدد حقیقی باشد $(\Gamma\succ\alpha)$. $\hat{Z}(t)$ عملگر نوفه است که در حالت بدون تقریب موج چرخان به صورت زیر است:

$$\hat{Z}(t)=-i\sum_{\mu}g_{\mu}\left[\hat{C}_{\mu}^{S}+C_{\mu}(t_{\circ})e^{\left(-i\,\Omega_{\mu}-i\,\upsilon\right)\left(t-t_{\circ}\right)}\right]-$$

۱. Detuning

$$i\sum_{\mu} g_{\mu}\left[\hat{C}_{\mu}^{+S}+\hat{C}_{\mu}^{+}\left(t_{\circ}\right)e^{\left(i\Omega_{\mu}-i\upsilon\right)\left(t-t_{\circ}\right)}\right], \qquad (۷۴)$$

عملگر نوفه خواص زیر را دارد:

$$\left\langle \hat{Z}\left(t\right)\right\rangle_{NR}=\circ, \qquad (۷۵)$$

$$\left\langle \hat{Z}^{+}\left(t\right)\hat{Z}\left(t'\right)\right\rangle_{NR}=D\left(t_{\circ}\right)\delta\left(t-t'\right), \qquad (۷۶)$$

اگراز تقریب موج چرخان استفاده کنیم داریم:

$$\hat{Z}\left(t\right)=-i\sum_{\mu} g_{\mu}\left[\hat{C}_{\mu}^{S}+C_{\mu}\left(t_{\circ}\right)e^{\left(-i\Omega_{\mu}-i\upsilon-\gamma_{\mu\mu}^{C}\right)\left(t-t_{\circ}\right)}\right], \qquad (۷۷)$$

در اینجا رابطهٔ (۷۳) برقرار است ولی رابطهٔ (۷۶) به صورت زیر در می‌آید:

$$\left\langle \hat{Z}^{+}\left(t\right)\hat{Z}\left(t'\right)\right\rangle_{NR}= \left\{\Gamma\bar{n}+\left[D\left(t_{\circ}\right)-\Gamma\bar{n}\right]e^{-۲\gamma\left(t-t_{\circ}\right)}\right\}\delta\left(t-t'\right), \qquad (۷۸)$$

در این حالت چون بـا یـک وضـعیت غیـر پایـا مواجـه هسـتیم استفاده ازیک طیف حالت استاندارد پایـا قابـل اسـتفاده نیسـت. بنابراین ما یک طیف ناپایداریا به اصطلاح یک طیف فیزیکـی را برای مدهای کاواک در نظرمی‌گیـریم و بررسـی‌مـان را متمرکـز می‌کنیم روی طیفی که حاصل برانگیختگی نزدیک تشدید است. دلیل اصلی برای مطالعهٔ طیف وابسته به زمان این است که طیف توان که درنظریهٔ وینر- کینتچین معرفـی شـده اسـت در حالـت غیر پایا قابل استفاده نیست. اگرچه در بررسی‌های قبلـی ازمـدل طیف وابسته به زمان پیچ و لمپارد به طور گسترده استفاده شـده است ولی این مدل طیف ایرادهای اساسی دارد (به عنوان مثـال می‌تواند منفی باشد). ابریلی وودکویچ نشان دادن کـه مـی‌تـوان ازآهنگ شمارش یک آشکارساز نوری برای تعریف یـک طیـف وابسته به زمان یا یک طیف فیزیکـی اسـتفاده کـرد. ایـن اجـازه می‌دهد که اثرات تجزیهٔ طیف (برای مثال تداخل سـنج فـابری- پرو) ظاهر شود به طوری کـه محـدودیت بانـد دسـتگاه انـدازه گیری به شکل مناسب گنجانده شود که این نیز باعث مـی‌شـود طیف ابهامات و خصوصیات غیر فیزیکی قبلی را نداشته باشـد. همچنین تأکید [۵۵] شده است وقتی عرض W به انـدازهٔ کـافی کوچک باشد طوری که $\Gamma >> W$، طیف ظاهر شده ازنظر کیفی کاملا مشابه وینر- خانچین خواهد بود. این طیف قبلاً در مـورد فلوئورسانس تشدیدی [۵۵] و میکرو لیـزر [۵۶] مـورد اسـتفاده قرار گرفته است. طیف وابسته بـه زمـان یـا طیـف فیزیکـی بـه صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S\left(t,\omega,W\right)= ۲W\ Re\int_{\circ}^{t}dt_{۲}e^{-W\left(t-t_{۲}\right)}\int_{\circ}^{t-t_{۲}}d\tau e^{\left(\frac{W}{۲}-i\Delta\right)\tau}\left\langle \hat{A}^{+}\left(t_{۲}+\tau\right)\hat{A}\left(t_{۲}\right)\right\rangle, \qquad (۷۹)$$

کـه t زمـان سـپری شـده بعـد ازبـرهم‌کـنش اولیـه در لحظـهٔ $t=t_{\circ}\left(=\circ\right)$ بین سیستم وحمـام حرارتـی اسـت، W پهنـای طیف تداخل سنج است و $\Delta\left(=\omega-\nu\right)$ وادنیدگی یا جابه‌جایی بسامد خط مرکزی تداخل سنج فابری- پرو ازبسـامد میـدان ω است. معادلهٔ (۷۹) یک انتگرال دو گانه است. انتگرال اولی روی زمان همبسـتگی گرفتـه مـی‌شـود وهماننـد بانـد طیـف وینـر- خانچین حدود آن به عرض وسیلهٔ اندازه‌گیری محدود می‌شـود. انتگرال دومی روی زمان $t_{۲}$ کـه درتـابع همبسـتگی ظاهرشـده است و باعث غیر پایا شدن آن شده است گرفته می‌شود. ظـاهر شـدن پهنـای دسـتگاه در انتگـرال دومـی باعـث محـدودیت در مقیاس زمانی این غیـر پایـایی مـی‌شـود. بـه دلیـل ایـن کـه تحول زمانی سیستم توسط رابطهٔ (۷۳) داده می‌شود مـی‌تـوان از نظریهٔ رگریسون کوانتومی برای تابع همبستگی دو زمانه استفاده کرد:

$$\left\langle \hat{A}^{+}\left(t+\tau\right)\hat{A}\left(t\right)\right\rangle=e^{-\left(\Gamma-i\delta-\alpha\right)}\left\langle \hat{A}^{+}\left(t\right)\hat{A}\left(t\right)\right\rangle, \qquad (۸۰)$$

تأکیـد مـی‌کنـیم کـه t در معادلـهٔ (۸۰) (یـا $t_{۲}$ در معادلـهٔ (۷۹) زمان‌های غیر ثابتی هستند. بنابراین ما بـرای دو حالـت بـدون و با تقریب موج چرخان، وابستگی زمـانی $\left\langle \hat{A}^{+}\left(t\right)\hat{A}\left(t\right)\right\rangle$ را بـا استفاده از رابطهٔ انشتین به دسـت مـی‌آوریـم (در پیوسـت الـف توضیحات آورده شـده اسـت). در حالـت بـدون تقریـب مـوج چرخان داریم:

$$\frac{d}{dt}\left\langle \hat{A}^{+}\left(t\right)\hat{A}\left(t\right)\right\rangle= -۲\left(\Gamma-\alpha\right)\left\langle \hat{A}^{+}\left(t\right)\hat{A}\left(t\right)\right\rangle+۲\Gamma\bar{n}\left(۱+r\right), \qquad (۸۱)$$

در اینجا تعریف کرده‌ایم:

$$r=\frac{D\left(\circ\right)}{D\left(\infty\right)}-۱, \qquad (۸۲)$$

از حل معادلهٔ (۸۲) داریم:

$$\left\langle \hat{A}^{+}(t)\hat{A}(t)\right\rangle = e^{-2(\Gamma-\alpha)t}\left\langle \hat{A}^{+}(0)\hat{A}(0)\right\rangle + \Gamma\bar{n}(\omega_0)\left[\frac{1}{\Gamma-\alpha}-\frac{(1+r)}{\Gamma-\alpha}e^{-2(\Gamma-\alpha)t}+\frac{r}{\Gamma-\alpha}\right], \quad (۸۳)$$

با استفاده ازمعادلهٔ (۸۱) در حالت پایا داریم:

$$(\Gamma-\alpha)\left\langle \hat{A}^{+}(\infty)\hat{A}(\infty)\right\rangle = \Gamma\bar{n}, \quad (۸۴)$$

با قراردادن $\left\langle \hat{A}^{+}(\infty)\hat{A}(\infty)\right\rangle = N$ در معادلات (۸۴ و ۸۳) به دست می‌آوریم:

$$\bar{n} = \frac{\Gamma-\alpha}{\Gamma}N, \quad (۸۵)$$

$$\left\langle \hat{A}^{+}(t)\hat{A}(t)\right\rangle = N\left(1-rke^{-2at}+r\right), \quad (۸۶)$$

که $a=\Gamma-\alpha$. ازترکیب روابط (۸۰) و(۸۶) درغیاب تقریب موج چرخان، تابع همبستگی به صورت زیر خواهد شد:

$$\left\langle \hat{A}^{+}(t_2+\tau)\hat{A}(t_2)\right\rangle = e^{-(\Gamma-i\delta-\alpha)\tau}N\left(1-rke^{-2at_2}+r\right), \quad (۸۷)$$

با قراردادن رابطهٔ فوق درمعادلهٔ (۸۰) و انتگرال‌گیری روی متغییرهای زمانی τ, t_2 وسپس محاسبهٔ قسمت حقیقی آن به دست می‌آوریم:

$$S(t,\Delta,W) = \frac{2NW}{W_-^2+\Delta^2}\times \left[\begin{array}{l} \frac{W_-}{W_+}\left\{(1+r)e^{-4Wt}-\frac{1}{2}re^{-2(W+a)t}-\left(1+\frac{1}{2}r\right)e^{-Wt}\right\}+ \\ \frac{W_+W_-+\Delta^2}{W_+^2+\Delta^2}\{1+r\}+re^{-2at}-\frac{(1+r)2a\Delta}{W_+^2+\Delta^2}e^{W_+t}\sin\Delta t+ \\ \frac{2ar-\left(W_+W_-+\Delta^2\right)}{W_+^2+\Delta^2}e^{-W_+t}\cos\Delta t \end{array}\right], \quad (۸۸)$$

در اینجا $W_+=\frac{W}{2}+(\Gamma-\alpha)$ و $W_-=\frac{W}{2}-(\Gamma-\alpha)$ است و وادندیگی را صفر فرض کرده ایم $(\delta=0)$.

در حد زمان‌های بزرگ $(t\to\infty)$ طیف به مقدار پایای زیر می‌رسد:

$$S(\Delta,W) = \frac{2NW}{\left\{\frac{W}{2}-(\Gamma-\alpha)\right\}^2+\Delta^2}\left[\frac{\left(\frac{W}{2}\right)^2-(\Gamma-\alpha)^2+\Delta^2}{\left\{\frac{W}{2}+(\Gamma-\alpha)\right\}^2+\Delta^2}\right], \quad (۸۹)$$

اگراز تقریب موج چرخان استفاده کنیم معادلات (۸۸)، (۸۶)، (۸۳) و (۸۱) به ترتیب صورت زیر در می‌آیند:

$$\frac{d}{dt}\left\langle \hat{A}^{+}(t)\hat{A}(t)\right\rangle = -2(\Gamma-\alpha)\left\langle \hat{A}^{+}(t)\hat{A}(t)\right\rangle + 2\Gamma\bar{n}\left(1+re^{-2\gamma t}\right), \quad (۹۰)$$

$$\left\langle \hat{A}^{+}(t)\hat{A}(t)\right\rangle = e^{-2(\Gamma-\alpha)t}\left\langle \hat{A}^{+}(0)\hat{A}(0)\right\rangle + \Gamma\bar{n}(\omega_0)\left[\frac{1}{\Gamma-\alpha}-\frac{(1+r)(\Gamma-\alpha)-r}{(\Gamma-\alpha)(\Gamma-\alpha-\gamma)}e^{-2(\Gamma-\alpha)t}+\frac{re^{-2\gamma t}}{(\Gamma-\alpha-\gamma)}\right], \quad (۹۱)$$

$$\left\langle \hat{A}^{+}(t)\hat{A}(t)\right\rangle = N\left(1-rke^{-2at}+rke^{-2\gamma t}\right), \quad (۹۲)$$

که $k=\frac{a}{a-\gamma}$.

$$S(t,\Delta,W) = \frac{2NW}{W_-^2+\Delta^2}\times \left[\begin{array}{l} \frac{W_-}{W_+}\left\{(1+kr)e^{-4Wt}-\frac{1}{2}kre^{-2(W+a)t}-\left(1+\frac{1}{2}kr\right)e^{-Wt}\right\}+ \\ \frac{W_+W_-+\Delta^2}{W_+^2+\Delta^2}\left\{1+kre^{-2\gamma t}\right\}+kre^{-2at}- \\ \frac{(1+kr)2a\Delta}{W_+^2+\Delta^2}e^{W_+t}\sin\Delta t+ \\ \frac{2kar-\left(W_+W_-+\Delta^2\right)}{W_+^2+\Delta^2}e^{-W_+t}\cos\Delta t \end{array}\right], \quad (۹۳)$$

در حد زمان‌های بزرگ $(t\to\infty)$ طیف به همان مقدار پایای معادلهٔ (۸۸) خواهد رسید. درواقع برای زمان‌های بزرگ، طیف برای هر دو مورد درحضور و در غیاب تقریب موج چرخان نتیجهٔ یکسانی خواهد داشت. اثر حمام حرارتی غیر تعادلی درزمان‌های کوچک روی طیف به واسطهٔ حضور جملات r و γ بسیار مهم است. $r=\left(\frac{D(0)}{D(\infty)}-1\right)$ اثرات شرایط اولیهٔ حمام حرارتی را روی طیف نشان می‌دهد زیرا نشان دهندهٔ اختلاف ضریب پخش دراولیهٔ $D(0)$ و ضریب پخش درزمان‌های طویل $D(\infty)$ است و γ حاوی اطاعات واهلش است. همان طور که انتظار می‌رود، درحالت پایا طیف مستقل از r و γ است. دلیلش این که درحد زمان‌های طویل وقتی که

حمام غیر تعادلی به حالت تعادل می‌رسد، سیستم گذشته خود را فراموش کرده و وابستگی به زمان در ضریب پخش حذف می‌شود و طیف به حالت پایا می‌رسد.

۶. نتیجه‌گیری

دراین مقاله به بررسی خواص دینامیکی یک نوسانگر هماهنگ در حضور حمام غیر تعادلی درغیاب تقریب موج پرداختیم. مشاهده کردیم در غیاب تقریب موج چرخان، معادلهٔ حاکم بر عملگر نابودی حمام حرارت غیر تعادلی یک معادلهٔ نوسانی است درحالی که درحالت درحضورتقریب موج چرخان، معادلهٔ حاکم بر عملگر نابودی حمام غیر تعادلی یک معادلهٔ نوسانی-اتلافی است. درواقع جملات پادچرخان و فوتون‌های مجازی باعث حذف اتلاف ازمعادلهٔ حاکم برعملگر نابودی حمام غیر تعادلی می‌شود. همچنین درغیاب و در حضور تقریب موج چرخان، مقدارمتوسط نوفه نسبت به درجات آزادی حمام حرارتی تعادلی صفر می‌شود. به علاوه مشاهده کردیم که تابع همبستگی نوفه دردمای صفرمطلق $(\bar{N}(\Omega_\nu)=0)$ درغیاب موج چرخان غیرصفرخواهد بود ولی درحضورتقریب موج چرخان صفر خواهد شد. ملاحظه کردیم که با افزایش دما، تابع همبستگی هم درغیاب وهم درحضور تقریب موج چرخان بزرگ‌تر خواهد شد. به علاوه مشاهده شد به دلیل این که متوسط حرارتی عملگر تعداد همواره یک تابع مثبت است $(\bar{N}(\Omega_\nu)\succ 0)$، تابع همبستگی نوفه درغیاب تقریب موج چرخان نسبت به در حضور تقریب موج چرخان بزرگ‌تر است. درواقع فوتون‌های مجازی باعث بزرگ‌تر شدن تابع همبستگی درغیاب موج چرخان می‌شود. مشاهده کردیم که عملگر نوفه که درمعادلهٔ حاکم برعملگر نابودی حمام حرارتی غیر تعادلی $(\hat{C}_\mu(t))$ ظاهرمی‌شود درغیاب و درحضور تقریب موج چرخان نوفهٔ سفید خواهد داشت. همچنین مشاهده کردیم عملگر $\hat{C}_\mu(t)$ در حضور تقریب موج چرخان زمان واهلش $\left(\frac{1}{\gamma^c_{\mu\mu}}\right)$ دارد که ازمقیاس زمانی همبستگی نوفه کوچک‌تر است. مشاهده کردیم درغیاب تقریب موج چرخان، معادلهٔ حاکم برعملگر کند تغییر $\hat{A}(t)$ یک معادلهٔ غیرمارکوفی است که اثرات حافظه درعملگر سیستم $\hat{A}(t)$ که خود نیز وابسته به زمان t' است، ظاهر شده است. به علاوه مشاهده کردیم که معادلهٔ لانژون حاکم بر عملگر نابودی نوسانگر هماهنگ ساده در حضور و درغیاب تقریب موج چرخان یک معادلهٔ نوسانی-اتلافی خواهد بود. همچنین درغیاب موج چرخان مشاهده شد که درحافظه یک جملهٔ اضافی به صورت $e^{-i\gamma^c_{\mu\mu}(t-t')}$ ظاهر می‌شود که به دلیل واهلش مدهای حمام حرارتی غیر تعادلی ناشی ازجفت شدگی با حمام حرارتی وجود می‌آید. مشاهده کردیم که معادلهٔ حاکم بر عملگر کند تغییر در غیاب و در حضور تقریب موج چرخان به شکل میرایی با ضریب اتلاف (Γ) یکسان خواهد بود ولی توابع نوفهٔ آنها متفاوت است. همان طور ملاحظه کردیم که درغیاب تقریب موج چرخان، ضریب پخش درهر لحظه با مقداراولیه برابراست در حالی که درحضورتقریب موج چرخان، ضریب پخش در هر لحظه با مقدار اولیه متفاوت خواهد بود و فرو افت نمایی خواهد داشت و دلیل اساسی، طبیعت غیر تعادلی حمام نوسانات توزیع چگالی انرژی وابسته به زمان $u(\Omega,t)$ است. مشاهده کردیم در غیاب تقریب موج چرخان، چگالی انرژی درهرلحظه با مقدار اولیه خود برابر است در حالی که در حضور تقریب موج چرخان، چگالی انرژی فرو افت نمایی خواهد داشت و حد دماهای بالا $\left(\bar{n}(\Omega)=\frac{1}{e^{\frac{\Omega}{KT}}-1}\cong\frac{\Omega}{KT}\right)$، نتایج دقیقاً با نتایج کلاسیکی توافق دارد. درواقع فوتون‌های مجازی و جملات پاد چرخان باعث می‌شوند ضریب پخش وچگالی انرژی همواره درحالت پایا باشند. دیده شد درغیاب تقریب موج چرخان، پهنای خط تبدیل لاپلاس عملگر نوفه $(\bar{\hat{Z}}(s))$ صفر است $(\gamma^W=0)$ ولی جابه‌جایی بسامد $\delta\omega$ غیر صفراست درواقع فوتون‌های مجازی باعث صفر شدن پهنای خط می‌شوند وثابت اتلاف γ در اینجا نقشی ندارد. مشاهده کردیم درغیاب تقریب موج چرخان، تبدیل لاپلاس عملگر نوفه $(\bar{\hat{Z}}(s))$ غیر صفر است $(\gamma^W\neq 0)$ و وابستگی پهنای خط وجابه‌جایی بسامد به ثابت اتلاف γ نشان می‌دهد که این دو پارامتر به دلیل واهلش حمام

غیر تعادلی ناشی ازهم کنش با حمام حرارتی ایجاد می‌شوند. همچنین مشاهده کردیم درحد $\gamma \to 0$ معادلات فوق به ثابت فرو افت معمولی و جابه‌جایی ترازها تبدیل می‌شوند. ملاحظه کردیم حتی هنگامی که برهم‌کنش ضعیف است و می‌توان ازتقریب موج چرخان استفاده کرد جملات پاد چرخان اثرات مهمی روی پهنای خط طیفی و جابه‌جایی بسامد دارند. مشاهده کردیم درحضور تقریب موج چرخان، تحول اولیۀ مدهای سیستم (نوسانگر هماهنگ) به تعادل ثانویۀ نوسانگرهای حمام غیر تعادلی وابسته است و γ^{w} در واقع اصلاح دینامیکی ویگنر -ویسکوف برای ثابت فرو افت است زیرا به دلیل وابستگی به γ نشان دهندۀ اثرات جفت شدگی حمام‌های حرارتی غیر تعادلی و تعادلی است. دیده شد که درحد زمان‌های بزرگ، طیف برای هر دو مورد در حضور و درغیاب تقریب موج چرخان نتیجه یکسانی خواهد داشت ولی درزمان‌های دیگر متفاوت هستند. همچنین مشاهده کردیم که درغیاب تقریب موج چرخان اثرات حمام حرارتی غیر تعادلی درزمان‌های کوچک روی طیف به واسطه حضور جملات r و γ بسیار مهم است. r اثرات شرایط اولیۀ حمام حرارتی را روی طیف نشان می‌دهد؛ زیرا r نشان دهندۀ اختلاف ضریب پخش در اولیۀ $D(0)$ و ضریب پخش درزمان‌های طویل $D(\infty)$ است و γ به خاطربه واهلش سیستم است. مشاهده کردیم که درحالت پایا، طیف مستقل از r و γ است. این بدان دلیل است که درحد زمان‌های طویل، وقتی که حمام غیر تعادلی به حالت تعادل می‌رسد سیستم گذشتۀ خود را فراموش کرده و وابستگی به زمان در ضریب پخش حذف می‌شود و طیف به حالت پایا می‌رسد.

پیوست (الف): رابطۀ انشتین تعمیم یافته

در این قسمت به اثبات رابطۀ تعمیم یافته انشتین یعنی معادلۀ (۸۰) می‌پردازیم. عملگرهای سیستم از معادلۀ لانژون (۷۱) پیروی می‌کنند.

$$\dot{\hat{A}}(t) = -(\Gamma + i\delta - \alpha)\hat{A}(t) + \hat{Z}(t), \qquad \text{(الف-۱)}$$

دررابطۀ بالا جملۀ اول داخل پرانتز جملۀ رانشی و $\hat{Z}(t)$ عملگر نوفه غیر تعادلی است [معادلۀ (۷۷)]. با استفاده از رابطه زیر:

$$\hat{A}^{+}(t) = \hat{A}^{+}(t-\Delta t) + \int_{t-\Delta t}^{t} dt'\dot{\hat{A}}^{+}(t'), \qquad \text{(الف-۲)}$$

ابتدا تابع همبستگی سیستم وعملگرنوفه را به دست می‌آوریم.

$$\left\langle \hat{A}^{+}(t)\hat{Z}(t)\right\rangle = \left\langle \hat{A}^{+}(t-\Delta t)\hat{Z}(t)\right\rangle + \int_{t-\Delta t}^{t} dt'\left\langle\left[-(\Gamma - i\delta - \alpha)\hat{A}^{+}(t') + \hat{Z}(t')\right]\hat{Z}(t)\right\rangle, \qquad \text{(الف-۳)}$$

به دلیل این که عملگر $\hat{A}^{+}(t')$ در لحظۀ t' تحت تأثیر افت وخیزهای بعدی زمان t قرارنمی‌گیرد جملۀ اول سمت راست معادلۀ بالا صفراست. به طورمشابه تابع همبستگی $\left\langle \hat{A}^{+}(t')\hat{Z}(t)\right\rangle$ در همه زمان‌ها به جز $t'=t$ صفر است ولی بازهم انتگرال آن صفر خواهد بود. بنا براین داریم:

$$\left\langle \hat{A}^{+}(t)\hat{Z}(t)\right\rangle = \int_{t-\Delta t}^{t} dt'\left\langle \hat{Z}^{+}(t')\hat{Z}(t)\right\rangle, \qquad \text{(الف-۴)}$$

حال معادلۀ حرکت متوسط را $\left\langle \hat{A}^{+}(t)\hat{A}(t)\right\rangle$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{d}{dt}\left\langle \hat{A}^{+}(t)\hat{A}(t)\right\rangle = \left\langle \dot{\hat{A}}(t)\hat{A}(t)\right\rangle + \left\langle \hat{A}(t)\dot{\hat{A}}(t)\right\rangle, \qquad \text{(الف-۵)}$$

با استفاده از رابطۀ (۵۰) می‌توان نوشت:

$$\frac{d}{dt}\left\langle \hat{A}^{+}(t)\hat{A}(t)\right\rangle = -2(\Gamma - \alpha)\left\langle \hat{A}^{+}(t)\hat{A}(t)\right\rangle + \left\langle \hat{Z}(t)\hat{A}(t)\right\rangle + \left\langle \hat{A}(t)\hat{Z}(t)\right\rangle, \qquad \text{(الف-۶)}$$

با جای‌گذاری (الف-۳) در رابطۀ (الف-۶) واستفاده از رابطۀ (۷۶) و انتگرال‌گیری روی زمان t'، در حالت بدون تقریب موج چرخان به دست می‌آوریم:

$$\frac{d}{dt}\left\langle \hat{A}^{+}(t)\hat{A}(t)\right\rangle = -2(\Gamma - \alpha)\left\langle \hat{A}^{+}(t)\hat{A}(t)\right\rangle + 2, \qquad \text{(الف-۷)}$$

اگردرانتگرال‌گیری روی زمان t' از رابطۀ (۷۸) استفاده کنیم در حضور تقریب موج چرخان به دست می‌آوریم.

$$\frac{d}{dt}\left\langle \hat{A}^{+}(t)\hat{A}(t)\right\rangle = -2(\Gamma - \alpha)\left\langle \hat{A}^{+}(t)\hat{A}(t)\right\rangle + 2\Gamma\bar{n}(\omega_0)\left[1 + \left\{\frac{D(t_0)}{D(\infty)} - 1\right\}e^{-2\gamma(t-t_0)}\right], \qquad \text{(الف-۸)}$$

مراجع

1. H Dekker, *Phys. Rep.* **80** (1981) 1.
2. C I Um, K H Yeon, and T F George, *Phys. Rep.* **362** (2002) 63.
3. U Weiss,"*Quantum Dissipative Systems*", 3rd ed, Singapore:World Scientific (2008).
4. H Bateman, *Phys. Rev.* **38** (1931) 815.
5. H Grabert and U Weiss, *Z Phys.* B **55** (1984) 87.
6. M Blasone and P Jizba, *Can. J. Phys.* **80** (2002) 645; *Ann. Phys.* **312** (2004) 354.
7. D C Latimer, *J. Phys. A* **38** (2005) 2021.
8. M C Baldiotti, R Fresneda, and D M Gitman, *Phys. Lett.* A **375** (2011) 1630.
9. H Majima and A Suzuki, *Ann. Phys.* **326** (2011) 3000.
10. V B Magalinskii, *Sov .Phys .JETP* **9** (1959) 1381.
11. R P Feynman and F L Vernon, *Ann. Phys.* **24** (1963) 118.
12. A O Caldeira and A J Leggett, *Physica* A **121** (1983) 587.
13. V P Tatarskii, *Sov .Phys .Usp.* **30** (1987)134.
14. M C Smith and A O Caldeira, *Phys. Rev.* A **41** (1990) 3103.
15. P Hanggi and G L Ingold, *Chaos* **15** (2005) 026105.
16. P Hanggi, G L Ingold, and P Talkner, *New J. Phys.* **10** (2008) 115008.
17. G L Inglod, P Hanggi, and P Talkner, *Phys. Rev.* E **79** (2009) 061105.
18. G L Ingold, A Lambrecht, and S Reynaud, *Phys. Rev.* E **80** (2009) 041113.
19. S Dattagupta, *et al., Phys. Rev.* E **81** (2010) 031136.
20. Ingold G L, *Eur. Phys. J* B **85** (2012) 30.
21. T G Philbin, *New J. Phys.* **14** (2012) 083043.
22. A D O'Connell, *et all.*, *Nature* **46** (2010) 4697.
23. J D Teufel, *et al.*, *Nature* **475** (2011) 359.
24. J Chan, *et al.*, *Nature* **478** (2011) 89.
25. M Aspelmeyer, *et al.*, *J. Opt. Soc. Am.* B **27** (2010) A189.
26. M Poot and H S Zant, *Phys. Rep.* **511** (2012) 273.
27. B Huttner and S M Barnet, *Phys. Rev.* A **46** (1992) 4306.
28. R Landauer, *J. Stat. Phys.* **9** (1973) 351.
29. D L Stein, *et al.*, *Phys. Letts. A* **136** (1989) 353.
30. M Millonas and C Ray, *Phys. Rev. Letts.* **75** (1995) 1110.
31. M Daeimohammad, F Kheirandish, and M R Abolhasany, *Int. J. Theor. Phys.* **48** (2009) 693.
32. M Daeimohammad, F Kheirandish, and K Saeedi, *Int. J. Theor. Phys.* **50** (2011) 171.
33. I I Rabi, *Phys. Rev.* **49** (1937) 324; Rabi I I, *Phys. Rev.* **51** (1937) 652.
34. C Emary, *Int. Mod. Phys.* B **17** (2003) 5477.
35. V Fessatidis, *et al.*, *Phys. Lett.* A **297** (2002) 100.
36. A Pereverzer and E R Bitnet, *Phys. Chem. Phys.* **8** (2006) 1378.
37. E K Irish, *Phys .Rev. Lett.* **99** (2007) 173601.
38. H G Reik and M Doucha, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 787.
39. Reik H G, *et al.*, *J. Phys.* A **20** (1999) 6327.
40. E T Jaynes and F W Cummings, *Proc IEEE* **51** (1963) 89.
41. B W Shore and P L Knight, *J. Mod. Opt.* **40** (1993) 1195.
42. H Grinberg, *Phys. Lett.* A **344** (2005) 170.
43. H Grinberg, *J. Phys. Chem.* B **112** (2008) 16140.
44. S J D Phoenix and P L Knight, *Phys. Rev.* A **44** (1991) 6023.
45. M A Nielsen and I L Chuang, "*Quantum computation and Quantum Information*", Cambridge Univ, *Press Cambridge* (2000).
46. J Larson, *Phys. Scr.* **76** (2007) 146.
47. A B Klimov, J L Romero, and C Saavedra, *Phys. Rev. A* **64** (2001) 063802.
48. T Werlang, *et al.*, *Phys. Rev.* A **31** (1985) 3093.
49. W H Louisell," *Quantum Statistical Properties of Radiation*" Wiley New York (1973); M Lax, *Phys. Rev.* **145** (1966) 110; M Lax and H Yuen, *Phys. Rev.* **172** (1968) 362; G S Agarwal, *Phys. Rev. A* **2** (1970) 2038; R Graham and H Haken, *Z Phys.* **235** (1970) 166; M Sergent III M, M O Schully, and W E Jr Lamb, "*Laser Physics*", Addison-Wesley Massachusetts (1974).
50. G W Ford, R F O'Connell, and J T Lewis, *Phys. Rev. A* **37** (1988) 4419.
51. A Caldeira and A J Leggett, *Ann. Phys.* **149** (1983) 374.
52. A Schmid and J Low Temp, *Phys.* **49** (1982) 609.

53. S Haroche and D Kleppner, *Phys. Today* **42** (1989) 24, E A Hinds, *In Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics* **28** (1991) 237, D Meschede, *Phys. Reps.* **219** (1992) 263, S Haroche and D Kleppner, "*Cavity Quantum Electrodynamics*", edited by P R Berman, Academic Press (1994).
54. P Meystre and M Sargent, "Elements of Quantum Optics", *Springer-Verlag* Berlin (1990).
55. J H Eberly, C V Kunasz, and K Wodkiewicz, *Phys. B* **13** (1980) 217.
56. B Deb and D S Ray, *Phys. Rev.* A **49** (1994) 5015.