



## ریسمان‌های سیاه چرخان در گرانش اینشتینی مرتبه سه با الکترودینامیک بورن-اینفلد

حمیدرضا بختیاری زاده<sup>۱\*</sup> و حنیف گلچین<sup>۲</sup>

۱. گروه آموزشی نانو فناوری، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، کرمان

۲. دانشکده فیزیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان

پست الکترونیکی: h.bakhtiarizadeh@kgut.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۳/۹؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۱/۴/۱۲)

### چکیده

در این مقاله جواب‌های ریسمان سیاه چرخان به طور مجانبی پاد-دوسیه را برای گرانش اینشتینی مرتبه سه در حضور الکترودینامیک غیرخطی بورن-اینفلد مورد بررسی قرار می‌دهیم. با این فرض که جواب‌ها روی افق به طور کامل منظم هستند و نیز مطالعه رفتار مجانبی و نزدیک افق جواب‌ها، دمای هاوکینگ، آنتروپی والد، جرم، اندازه حرکت زاویه‌ای، بار و پتانسیل الکترواستاتیکی را به طور مستقل محاسبه کرده و نشان می‌دهیم قانون اول ترمودینامیک برای ریسمان‌های سیاه چرخان باردار با چشمه غیرخطی بورن-اینفلد برای گرانش اینشتینی مرتبه سه به شکل دقیق برقرار است. همچنین نشان خواهیم داد هنگامی که پارامتر غیرخطی به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، جواب‌ها به سمت جواب‌های به دست آمده از الکترودینامیک ماکسول میل می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: ریسمان سیاه چرخان، گرانش اینشتینی مرتبه سه، الکترودینامیک بورن-اینفلد.

### ۱. مقدمه

سه خمش گرانش شبه توپولوژیک تعمیم یافته نامیده می‌شود [۸-۴]، که در این نظریه برای زمینه‌های خالص و با تقارن کروی، معادلات حرکت به یک معادله یکتا کاهش می‌یابند. همچنین معادلات خطی شده حول یک پس‌زمینه با تقارن بیشینه از مرتبه دوم هستند [۶ و ۸-۱۲]. در این نظریه، گرانش‌های لاولاک و شبه توپولوژیک را که با یک معادله جبری مشخص می‌شوند می‌توان به شکل حالت‌های خاص در چهار بعد بازیابی کرد.

یکی از رایج‌ترین رهیافت‌ها در تصحیح نظریه نسبیت عام، در نظر گرفتن جملات مرتبه بالاتر خمش است. علاوه بر چگالی‌های لاولاک [۱]، که در چهار بعد توپولوژیک و بدیهی هستند، دسته دیگری از نظریه‌ها موسوم به گرانش‌های شبه توپولوژیک [۲ و ۳] وجود دارند که جواب‌های سیاه‌چاله‌ای ایستای تحلیلی در ابعاد بالاتر از چهار دارند. کلی‌ترین نظریه گرانش تا مرتبه

گرانشی حتی ممکن است کنش مؤثر انرژی پایین یک نظریه گرانش کوانتومی از جمله نظریه ریسمان باشد. به طور کلی کنش نظریه گرانش ممکن است شامل جملات مرتبه بالاتر خمش یا جملات مرتبه بالاتر پتانسیل پیمان‌های باشد. مطالعه حاضر به ما این امکان را می‌دهد که هر دو مورد را بررسی کنیم. مزیت الکترودینامیک غیرخطی در قیاس با الکترودینامیک خطی ماکسول این است که از بروز واگرایی‌ها در مبدأ جلوگیری می‌کند و به یک میدان الکتریکی متناهی بر روی ذرات نقطه‌ای می‌انجامد.

ساختار مقاله به شرحی است که در ادامه می‌آید. در ابتدا کنش گرانش اینشتینی مرتبه سه را در فضا-زمان به طور مجانبی پاد-دوسیه و در حضور چشمه بورن-اینفلد نوشته و سپس معادلات حرکت را با وردش کنش نسبت به توابع متریک استخراج می‌کنیم. سپس جواب مجانبی برای فواصل دور دست را برای معادلات حرکت می‌یابیم. با استفاده از بسط تیلور تابع متریک حول شعاع افق و جایگذاری آن در معادله حرکت و در نظر گرفتن دو معادله اول پایین‌ترین مرتبه بسط و حل آنها، عبارات‌های دقیقی برای جرم ریسمان سیاه و نیز گرانش سطحی می‌یابیم. سپس آنروپی والد، جرم و اندازه حرکت زاویه‌ای کل را محاسبه کرده و با محاسبه بار کل و پتانسیل الکترواستاتیکی برای جواب‌ها، به عنوان یک آزمون سازگاری روی جواب‌ها، نشان می‌دهیم که جواب‌ها در قانون اول ترمودینامیک برای سیاه‌چاله‌ها صدق می‌کنند. قسمت آخر مقاله نیز به بحث و نتیجه‌گیری در مورد جواب‌ها اختصاص داده شده است.

## ۲. کنش و معادلات حرکت

کنش گرانش اینشتینی مرتبه سه [۱۳] در حضور الکترودینامیک غیرخطی بورن-اینفلد به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda - \gamma G^{\lambda\mu} \lambda P) + L(F) \right], \quad (1)$$

که در آن  $G$  ثابت گرانش نیوتن،  $R$  نرد‌های ریچی، و  $\Lambda = -3/l^2$  ثابت کیهانشناسی منفی فضای پاد-دوسیه است.

اخیراً نشان داده شده است که تا مرتبه سه خمش نظریه‌ای موسوم به گرانش اینشتینی مرتبه سه، به عنوان کلی‌ترین تصحیح خمش بالاتر از گرانش اینشتین وجود دارد که تنها گراویتون بدون رد و عرضی معمول را روی پس‌زمینه‌های به شکل بیشینه متقارن و در ابعاد کلی انتشار می‌دهد [۱۳]. این نظریه تعمیم تک-تابعی از سیاه‌چاله شوارزشیلد، مشابه با نظریه‌های لاولاک و شبه توپولوژیک، را در ابعاد بیشتر از چهار به خود می‌گیرد [۱۴ و ۱۵].

اندکی پس از کشف نظریه گرانش اینشتینی مرتبه سه، نظریه‌های شامل جملات مرتبه چهار خمش معرفی شدند [۶] و همچنین نشان داده شد که نظریه‌های شبه‌توپولوژیک تعمیم‌یافته می‌توانند از توان‌های دلخواه خمش و در بعد دلخواه ساخته شوند [۸]. به عنوان مثال در [۷] رفتار ترمودینامیکی جواب‌های سیاه‌چاله‌ای به طور مجانبی پاد-دوسیه در گرانش شبه-توپولوژیک تعمیم‌یافته شامل جملات مرتبه سه و چهار خمش مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به عنوان یک آزمون پدیده‌شناختی، اثرات لنز گرانشی سیاه‌چاله‌های متقارن کروی در گرانش اینشتینی مرتبه چهار در [۱۶] بررسی شده‌اند. همچنین در [۱۷] نویسندگان یک تقریب تحلیلی برای جواب سیاه‌چاله‌ای متقارن کروی به دست آورده‌اند.

جواب‌های ریسمان‌های سیاه چرخان، که در واقع همان سیاه‌چاله‌های با تقارن استوانه‌ای هستند، در [۱۸ و ۱۹] مورد بررسی قرار گرفته‌اند. خواص ترمودینامیکی این جواب‌ها نیز در [۲۰ و ۲۱] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. همچنین جواب‌های ریسمان سیاه چرخان در حضور یک چشمه غیرخطی در [۲۲ و ۲۳] مورد کاوش قرار گرفته‌اند. در این مقاله قصد داریم جواب‌های ریسمان سیاه چرخان به طور مجانبی پاد-دوسیه را در گرانش اینشتینی مرتبه سه خمش و در حضور الکترودینامیک بورن-اینفلد مورد بررسی قرار دهیم. این جواب‌ها در حقیقت تعمیم کار انجام شده در [۲۴] است به نحوی که الکترودینامیک بورن-اینفلد را در بر گیرد. اضافه کردن جملات مرتبه بالاتر خمش به کنش هیلبرت-اینشتین می‌تواند به یک نظریه بازهنجار بینجامد. کنش این نظریات

که در آن پرایم بر مشتق گیری نسبت به  $r$  دلالت می کند در معادله بالا،  $F_1(a, b; c; z)$  تابع فوق هندسی گوسی است و ثابت انتگرال گیری  $r_0$  نیز با جرم ریسمان به شکل  $r_0 = GM$  متناسب است.

از طرفی پتانسیل برداری و مؤلفه های غیر صفر تانسور شدت میدان الکترومغناطیسی نیز با روابط زیر داده می شوند:

$$\begin{aligned} A_a &= h(r) (\Xi \delta_a^t - a \delta_a^t); \\ F_{tr} &= -F_{rt} = -\Xi h'(r), \\ F_{\phi r} &= -F_{r\phi} = ah'(r), \end{aligned} \quad (8)$$

با در دست داشتن تانسور شدت میدان الکترومغناطیسی می توان نشان داد که وردش کنش (۱) نسبت به  $h(r)$  یا به طور معادل مؤلفه های  $t$  و  $\phi$  معادله ماکسول  $\nabla_a F^{ab} = 0$ ، به معادله زیر می انجامند:

$$2h'^3 - b^2(2h' + rh'') = 0, \quad (9)$$

در نوشتن رابطه بالا از جواب  $g = 1$  استفاده شده است. حل این معادله، به مقدار زیر برای  $h(r)$  می انجامند:

$$h(r) = -\frac{q}{r} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{5}{2}; -\frac{q^2}{b^2 r^4}\right), \quad (10)$$

که در آن ثابت انتگرال گیری  $q$  در حقیقت همان بار ریسمان سیاه است.

### جواب مجانبی

همان طور که از معادله (۷) دیده می شود، هنگامی که  $\lambda = 0$ ، عبارت زیر را برای تابع متریک  $f$  به دست می آوریم:

$$f = \frac{r^2}{l^2} - \frac{GM}{r} + \frac{1}{3} G \left[ b \left( br^2 - \sqrt{q^2 + b^2 r^4} \right) + \frac{2q^2}{r^2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{5}{2}; -\frac{q^2}{b^2 r^4}\right) \right], \quad (11)$$

که در نوشتن آن از  $\Lambda = -3/l^2$  و  $r_0 = GM$  استفاده کرده ایم. همان طور که انتظار می رفت، این جواب چیزی جز جواب ریسمان سیاه باردار چرخان در حضور الکترومغناطیک بورن-اینفلد برای گرانش اینشتینی نیست [۲۲]. همچنین می توانیم رفتار جواب در  $r$  های بزرگ را مورد بررسی قرار دهیم. بدین منظور فرض می کنیم بتوان  $f$  را به شکل یک جواب خصوصی به شکل بسط  $\frac{1}{r}$  به علاوه جواب عمومی معادله همگن متناظر نوشت:

در کنش بالا تصحیحات مرتبه سه خمش به کنش اینشتین-هیبرت با رابطه زیر داده می شوند:

$$P = 12R_a^c b^d R_c^e d^f R_e^a f^b + R_{ab}{}^{cd} R_{cd}{}^{ef} R_{ef}{}^{ab} - 12R_{abcd} R^{ac} R^{bd} + 8R_a^b R_b^c R_c^a, \quad (2)$$

همچنین لاگرانژی الکترومغناطیک غیرخطی بورن-اینفلد با

$$L(F) = b^2 \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{F}{2b^2}} \right), \quad (3)$$

داده می شود. در اینجا  $b$  یک پارامتر غیرخطی و  $F = F_{ab} F^{ab}$  که در آن  $F_{ab} = 2\partial_{[a} A_{b]}$  تانسور شدت میدان الکترومغناطیسی و  $A_a$  پتانسیل پیمانه ای است. هنگامی که  $b$  به سمت بی نهایت میل می کند،  $L(F)$  به لاگرانژی معمول خطی ماکسول، یعنی  $-F/4$  میل می کند. در این مقاله فرض می کنیم ثابت جفت شدگی گرانش اینشتینی مرتبه سه یعنی  $\lambda$  غیرمنفی باشد. همچنین فرض زیر را برای فضا زمان متقارن استوانه ای در نظر می گیریم:

$$ds^2 = -f(r) g^t(r) (\Xi dt - ad\phi)^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + \quad (4)$$

$$\frac{r^2}{l^2} (adt - \Xi l^2 d\phi)^2 + \frac{r^2}{l^2} dz^2,$$

که در آن

$$\Xi = \sqrt{1 + a^2/l^2}, \quad (5)$$

در متریک (۴) ثابت  $a$  و  $l$  بعد طول دارند و به ترتیب به عنوان پارامتر چرخش و شعاع پادوسیته تعبیر می شوند. محدوده تغییر مختصه های زمانی و شعاعی عبارت است از  $-\infty < t < \infty, 0 \leq r < \infty$  و  $\mathbb{R} \times S^1$  با حدود  $0 \leq \phi < 2\pi, -\infty < z < \infty$  است که یک ریسمان سیاه پایا را توصیف می کند.

برای یافتن معادلات حرکت، از رهیافت به کار رفته در [۱۴] و [۱۵] برای فضا-زمان های متقارن کروی بهره می بریم. در نظر گرفتن کنش به عنوان تابعی از  $f$  و  $g$  و وردش آن نسبت به این دو تابع، به معادلات حرکت به شکل (۶) و (۷) می انجامد

$$g'(r) = 0, \quad (6)$$

که می توان جواب آن را به شکل  $g = 1$  در نظر گرفت.

$$-rf - G^2 \lambda \left[ 2ff'^2 - 12fff'' - 22 \frac{f'(f' - rf'')}{r^2} \right] = \frac{1}{3} \Lambda r^2 + r_0 - \frac{2}{3} G \quad (7)$$

$$\left[ br \left( br^2 - \sqrt{q^2 + b^2 r^4} \right) + \frac{2q^2}{r} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{5}{2}; -\frac{q^2}{b^2 r^4}\right) \right],$$

و  $a_n = f^{(n)}(r_h)/n!$  که در آن  $f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (r-r_h)^n$  جایگذاری آن در معادله (۷) و سپس حل مرتبه به مرتبه برحسب توان‌های  $(r-r_h)$ ، دو معادله مربوط به پایین‌ترین مرتبه داده می‌شوند:

$$\frac{r_h^{\gamma}}{l^{\gamma}} - GM - \gamma G^{\gamma} \lambda \kappa_g^{\gamma} \Xi^{\gamma} + \frac{\gamma}{3} G \left[ \frac{br_h \left( br_h^{\gamma} - \sqrt{q^{\gamma} + b^{\gamma} r_h^{\gamma}} \right) + \frac{\gamma q^{\gamma}}{rh} {}_2F_1 \left( \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}; \frac{5}{\gamma}; -\frac{q^{\gamma}}{b^{\gamma} r_h^{\gamma}} \right) \right] = 0, \quad (16)$$

و

$$\frac{\gamma r_h^{\gamma}}{l^{\gamma}} - \gamma \kappa_g \Xi r_h + \gamma G b \left( br_h^{\gamma} - \sqrt{q^{\gamma} + b^{\gamma} r_h^{\gamma}} \right) = 0, \quad (17)$$

که می‌توان با استفاده از آنها جرم و گرانش سطحی  $\kappa_g = f'(r_h)/2\Xi$  را به دست آورد و به ترتیب جواب‌های زیر را دارند:

$$\kappa_g = \frac{1}{2\Xi r_h} \left[ r_h^{\gamma} \left( \gamma b^{\gamma} G + \frac{\gamma}{l^{\gamma}} \right) - \gamma b G \sqrt{q^{\gamma} + b^{\gamma} r_h^{\gamma}} \right], \quad (18)$$

$$M = \frac{r_h^{\gamma}}{G l^{\gamma}} - \frac{\gamma G \lambda}{r_h^{\gamma}} \left[ r_h^{\gamma} \left( \gamma b^{\gamma} G + \frac{\gamma}{l^{\gamma}} \right) - \gamma b G \sqrt{q^{\gamma} + b^{\gamma} r_h^{\gamma}} \right]^{\gamma} + \frac{\gamma q^{\gamma}}{\gamma r_h} {}_2F_1 \left( \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}; \frac{5}{\gamma}; -\frac{q^{\gamma}}{b^{\gamma} r_h^{\gamma}} \right) + \frac{\gamma}{3} br_h \left( br_h^{\gamma} - \sqrt{q^{\gamma} + b^{\gamma} r_h^{\gamma}} \right). \quad (19)$$

این مقادیر در استخراج ترمودینامیک سیستم در بخش بعدی نقشی اساسی ایفا می‌کنند. از حل معادلات در مرتبه‌های بالاتر می‌توان سایر مقادیر  $a_n$  به ازای  $n > 2$  را بر حسب  $a_2$  به دست آورد. به عنوان یک بررسی سازگاری می‌توان دید که روابط بالا به ازای  $b \rightarrow \infty$  به نتایج متناظر به دست آمده در [۲۴] برای الکتروپدینامیک خطی ماکسول میل می‌کنند.

### ترمودینامیک

آنتروپی بکنشتاین-هاوکینگ در یک نظریه گرانشی خمش مرتبه بالاتر با جملات اضافی تصحیح می‌شود. این تصحیحات را می‌توان از رابطه آنتروپی والد [۲۶] و [۲۷] به شکل

$$S = -\gamma \pi \int_H d^{\gamma} x \sqrt{\gamma} \frac{\delta L}{\delta R_{abcd}} \varepsilon^{abcd}, \quad (20)$$

به دست آورد. در این رابطه، مشتق اویلر-

لاگرانژ لاگرانژی گرانشی، و  $\gamma$  دترمینان متریک القا شده روی

$$f = f_{\sqrt{r}} + f_h, \quad f_{\sqrt{r}}(r) = \frac{r^{\gamma}}{l_{eff}^{\gamma}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{r^n}, \quad (12)$$

که در آن  $l_{eff}$  شعاع مؤثر فضای پاد-دوسیه است که ریشه حقیقی و مثبت معادله‌ای است که در ادامه می‌آید. با جایگذاری عبارت بالا در معادله (۷) می‌توان دید که بسط  $r$  بزرگ به شکل زیر در می‌آید:

$$f_{\sqrt{r}}(r) = \frac{r^{\gamma}}{l_{eff}^{\gamma}} - \frac{G_{eff} M}{r} + \frac{G_{eff} q^{\gamma}}{r^{\gamma}} - \frac{G_{eff} q^{\gamma}}{2 \cdot b^{\gamma} r^{\gamma}}, \quad (13)$$

که در آن از این حقیقت بهره برده‌ایم که تابع فوق هندسی  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  به ازای  $|z| < 1$  یک بسط سری همگرا دارد [۲۵]. می‌توان دید که در حد  $b \rightarrow \infty$ ، نتیجه همان است که در [۲۴] برای الکتروپدینامیک خطی ماکسول به دست آمد. همچنین با جایگذاری عبارت (۱۲) در معادله (۷) و بسط معادله در حد  $r$  های بزرگ می‌توان دید شعاع مؤثر فضای پاد-دوسیه که در معادله بالا ظاهر می‌شود ریشه حقیقی و مثبت معادله زیر است [۲۴]:

$$\frac{16 G^{\gamma} \lambda}{l_{eff}^{\gamma}} - \frac{1}{l_{eff}^{\gamma}} + \frac{1}{l^{\gamma}} = 0, \quad (14)$$

همچنین ثابت گرانشی مؤثر نیز با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$G_{eff} = \frac{G}{1 - \frac{4\lambda}{l_{eff}^{\gamma}}}, \quad (15)$$

از طرفی در حد  $r$  های بزرگ سهم جواب معادله همگن در مقایسه با سهم جواب معادله غیرهمگن، قابل چشم‌پوشی است و در نتیجه معادله (۱۳) به تنهایی جواب مجانبی را به دست می‌دهد [۲۴].

### جواب نزدیک افق

با فرض این که تابع متریک  $f$  روی افق کاملاً منظم باشد<sup>۱</sup> و بسط تیلور آن حول شعاع افق به صورت

۱. همان طور که از معادله (۷) دیده می‌شود روی افق رویداد، یعنی هنگامی که  $f = 0$ ، جمله‌ای که در  $f$  ضرب شده، صفر می‌شود. این امر باعث مشتق‌ناپذیر بودن برخی جواب‌ها روی افق رویداد می‌شود. بنابراین اعمال این فرض که افق منظم باشد یک محدودیت ضروری است.

$$S_b = \frac{C(l_{eff}^\gamma)}{\lambda\pi G} \int_{\partial M} d^3x \sqrt{-\gamma} \Theta, \quad (27)$$

که در آن  $\gamma$  دترمینان متریک القا شده روی مرز،  $\Theta$  رد خمش خارجی<sup>۱</sup> مرز یعنی  $\Theta_{ab}$  و  $C(l_{eff}^\gamma)$  ثابتی است که به خمش زمینه بستگی دارد و با عبارت زیر داده می شود:

$$C(l_{eff}^\gamma) = -\frac{l_{eff}^\gamma}{\epsilon} L|_{AdS}, \quad (28)$$

که در آن  $L|_{AdS}$  لاگرانژی نظریه متناظر محاسبه شده روی پس-زمینه  $AdS_\epsilon$  با مقیاس خمش  $l_{eff}$  است. ما از رهیافت کانترترم<sup>۲</sup> برای حذف واگرایی های کنش استفاده می کنیم. برای کنش گرانش اینشتینی مرتبه سه، جملاتی که در چهار بعد کنش را متناهی می سازند چنین اند:

$$S_{ct} = \frac{C(l_{eff}^\gamma)}{\lambda\pi G} \int_{\partial M} d^3x \sqrt{-\gamma} \left( \frac{\gamma}{l_{eff}} - \frac{l_{eff}}{\gamma} \mathfrak{R} \right), \quad (29)$$

که در آن  $\mathfrak{R}$  نرده ای ریچی برای متریک مرزی  $\gamma$  است. کنش کل به شکل ترکیب خطی کنش حجمی، سطحی و جملات اضافی نوشته می شود

$$S_{total} = S + S_b + S_{ct}. \quad (30)$$

با در دست داشتن کنش کل متناهی، می توان از تعریف براون-یورک برای تانسور تنش استفاده کرد و با وردش کنش نسبت به متریک مرزی  $\gamma_{ab}$ ، تانسور تنش همگرای

$$T^{ab} = \frac{1}{\lambda\pi G_{eff}} \left( \Theta^{ab} - \Theta \gamma^{ab} + \frac{\gamma}{l_{eff}} \gamma^{ab} - \frac{l_{eff}}{\gamma} G^{ab} \right), \quad (31)$$

را یافت که در آن  $G_{ab} = \mathfrak{R}_{ab} - \mathfrak{R} \gamma_{ab} / 2$  تانسور اینشتین برای متریک مرزی  $\gamma_{ab}$  است. برای جواب های به طور مجانبی پاد-دوسیه با افق تخت  $\mathfrak{R}_{abcd}(\gamma) = 0$  تنها جمله اضافی غیرصفر، جمله اول در (۲۹) است، که به تانسور تنش تا حد جمله سوم در (۳۱) می انجامد. با استفاده از این تانسور تنش می توان کمیت های پایسته شبه موضعی را برای فضا زمان های به طور مجانبی پاد-دوسیه به شکل زیر تعریف کرد:

$$Q_\xi = \int_\Sigma d^3x \sqrt{\sigma} u^a T_{ab} \xi^b, \quad (32)$$

در رابطه بالا  $u^a = -N \delta_a^0$  و  $N$  و  $\sigma$  به ترتیب تابع گذار<sup>۳</sup> و

افق است. تانسور پادمتقارن  $\mathcal{E}_{ab}$  نیز که در شرط بهنجارش  $\mathcal{E}_{ab} \mathcal{E}^{ab} = -2$  صدق می کند از رابطه زیر به دست می آید:

$$\nabla_a \chi_b = \kappa_g \mathcal{E}_{ab}, \quad (21)$$

که در آن مولد نورگونه افق ریسمان با رابطه

$$\chi = \partial_t + \Omega \partial_\phi, \quad (22)$$

داده می شود. در رابطه بالا،  $\Omega = a/l^\gamma \Xi$  سرعت زاویه ای افق است. با استفاده از رابطه (۲۱) می توان مؤلفه های غیرصفر تانسور پادمتقارن  $\mathcal{E}_{ab}$  را به شکل زیر یافت:

$$\epsilon_{tr} = -\epsilon_{rt} = -\Xi, \quad \epsilon_{r\phi} = -\epsilon_{\phi r} = -a, \quad (23)$$

آنتروپی (۲۰) برای گرانش اینشتینی مرتبه سه به شکل زیر در می آید:

$$S = \frac{1}{\gamma G} \int_H d^3x \sqrt{\gamma} \left[ 1 + G^\gamma \lambda \left( \frac{\gamma \epsilon R b^e d^f R_{ae f} + \gamma R_{ab} \epsilon^f R_{c d e f} - \gamma \epsilon R_{ac} R_{db} - \gamma \epsilon R_{ef} R_{a f c} g_{bd} + \gamma \epsilon g_{bd} R_{ce} R^e_a}{\gamma} \right) \epsilon^{ab} \epsilon^{cd} \right], \quad (24)$$

برای متریک (۴) با یک افق استوانه ای، نتیجه زیر را برای آنتروپی بر واحد طول ریسمان سیاه چرخان بدون بار به دست می آوریم:

$$S = \frac{\pi r_h^\gamma \Xi}{\gamma G l} \left[ 1 - \frac{\gamma G^\gamma \lambda}{r_h^\gamma} \left[ r_h^\gamma \left( \gamma b^\gamma G + \frac{\gamma}{l^\gamma} \right) - \gamma b G \sqrt{q^\gamma + b^\gamma r_h^\gamma} \right]^2 \right], \quad (25)$$

که در آن از رابطه  $f'(r_h) = \gamma \kappa_g \Xi$  و همچنین رابطه (۱۸) برای نوشتن فرمول نهایی برحسب شعاع افق استفاده شده است. مشاهده می شود هنگامی که  $b$  به سمت بی نهایت میل می کند، عبارت بالا به نتیجه به دست آمده برای آنتروپی در [۲۴] یعنی آنتروپی در حضور میدان ماکسول میل می کند. دمای هاوکینگ برحسب شعاع افق با رابطه زیر داده می شود:

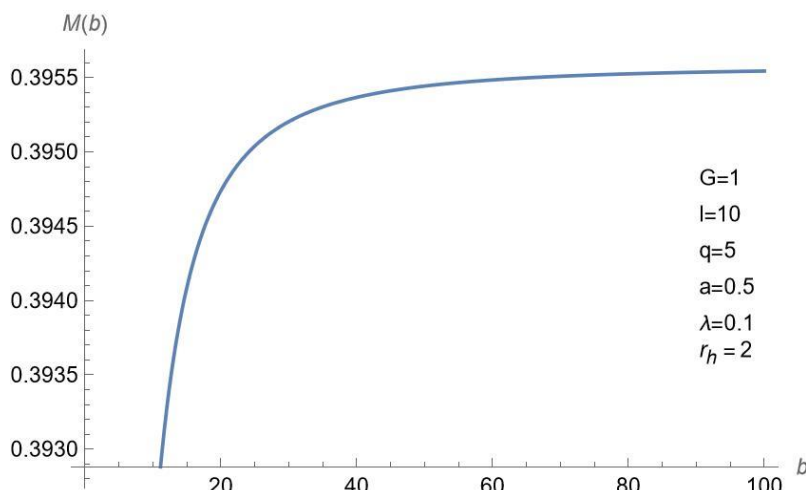
$$T = \frac{\kappa_g}{\gamma \pi} = \frac{1}{\gamma \pi \Xi r_h} \left[ r_h^\gamma \left( \gamma b^\gamma G + \frac{\gamma}{l^\gamma} \right) - \gamma b G \sqrt{q^\gamma + b^\gamma r_h^\gamma} \right]. \quad (26)$$

این بخش را با محاسبه جرم و اندازه حرکت زاویه ای ریسمان سیاه به پایان می بریم. بدین منظور جمله مرزی گیونز-هاوکینگ را، که واگرایی های کنش (۱) را حذف می کند، به کنش اضافه می کنیم. در اینجا کنش مرزی مناسب با عبارت زیر داده می شود:

۱. Extrinsic curvature

۲. Counterterm

۳. Lapse function



شکل ۱. نمودار تغییرات جرم  $M$  برحسب پارامتر غیرخطی  $b$ . با جایگذاری مقادیر داده شده در نمودار برای سایر پارامترها در رابطه (۳.۱۹) مرجع [۲۴]، مقدار  $M = 0.395578$  به دست می‌آید که مقدار مجانبی منحنی بالا است.

$$M = \frac{1}{\lambda} (\sqrt{\Xi^2} - 1) \left\{ \frac{\frac{r_h^2}{Gl^2} - \frac{\sqrt{G\lambda}}{r_h} \left[ r_h^2 \left( \frac{2b^2 G + \frac{3}{l^2}}{r_h^2} \right) \right]}{\frac{2bG\sqrt{q^2 + b^2 r_h^2}}{r_h}} \right\} \quad (36)$$

$$J = \frac{3}{\lambda} \sqrt{\Xi^2} - 1 \left\{ \frac{\frac{r_h^2}{Gl^2} - \frac{\sqrt{G\lambda}}{r_h} \left[ r_h^2 \left( \frac{2b^2 G + \frac{3}{l^2}}{r_h^2} \right) \right]}{\frac{2bG\sqrt{q^2 + b^2 r_h^2}}{r_h}} \right\} + \left\{ \frac{\frac{q^2}{r_h} F_1 \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}; -\frac{q^2}{b^2 r_h^2} \right) + \frac{2}{3} br_h \left( br_h^2 - \sqrt{q^2 + b^2 r_h^2} \right)}{\frac{2bG\sqrt{q^2 + b^2 r_h^2}}{r_h}} \right\} \quad (37)$$

که در آنها از رابطه (۱۴) برای نوشتن نتیجه نهایی برحسب شعاع افق استفاده شده است (برای جزئیات بیشتر شکل‌های ۱ و ۲ را ببینید).

پتانسیل الکتریکی اندازه‌گیری شده در بی‌نهایت نسبت به افق با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi = Aa\chi^a \Big|_{r \rightarrow \infty} - Aa\chi^a \Big|_{r=r_h} \quad (38)$$

محاسبه عبارت بالا به مقدار زیر برای پتانسیل الکتریکی می‌انجامد:

$$\Phi = \frac{q}{\Xi r_h} F_1 \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}; -\frac{q^2}{r_h^2 b^2} \right) \quad (39)$$

متریک سطح فضاگونه  $\Sigma$  هستند که در تجزیه ADM-گونه متریک مرزی ظاهر می‌شوند

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = -N^2 dt^2 + \sigma_{ab} (dx^a + V^a dt) (dx^b + V^b dt) \quad (33)$$

که در آن  $V^a$  بردار انتقال است. برای به دست آوردن جرم کل بایستی قرار دهیم  $\xi = \partial_t$ ، یعنی بردار کیلینگ<sup>۱</sup> متناظر با مختصه زمانی  $t$  و برای به دست آوردن اندازه حرکت زاویه‌ای کل بایستی قرار دهیم  $\xi = \partial_\phi$ ، یعنی بردار کیلینگ متناظر با مختصه زاویه‌ای  $\phi$ . با استفاده از تعریف (۳۲)، جرم و اندازه حرکت زاویه‌ای کل بر واحد طول ریسمان نیز به ترتیب با

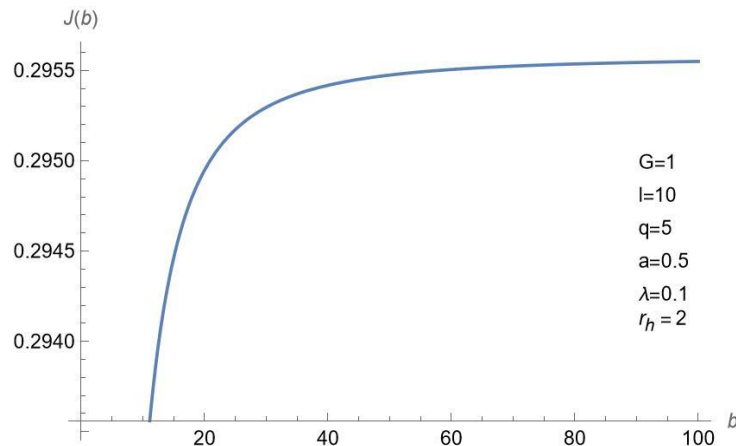
$$M = \frac{1}{\lambda} (\sqrt{\Xi^2} - 1) M, \quad (34)$$

و

$$J = \frac{3}{\lambda} \Xi a M = \frac{3}{\lambda} \sqrt{\Xi^2} - 1 M, \quad (35)$$

داده می‌شوند که در نوشتن تساوی آخر از رابطه (۵) استفاده کرده‌ایم. جایگذاری جرم در معادلات فوق به معادلات زیر می‌انجامد:

۱. Killing vector



شکل ۲. نمودار تغییرات انداز حرکت زاویه‌ای  $J$  بر حسب پارامتر غیرخطی  $b$ . با جایگذاری مقادیر داده شده در نمودار برای سایر پارامترها در رابطه (۳۰) [۲۴]، مقدار  $J = 0.295575$  به دست می‌آید که مقدار مجانبی منحنی بالا است.

بنابراین می‌توان دریافت که قانون اول ترمودینامیک به شکل زیر برقرار است:

$$dM = TdS + \Omega dJ + \Phi dQ, \quad (43)$$

### ۳. بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله تعمیم‌هایی از ریسمان‌های سیاه چرخان باردار در گرانش اینشتینی مرتبه سه خمش، که به طور مجانبی پاد-دوسیه هستند، را در حضور چشمه غیرخطی بورن-اینفلد ساخته‌ایم و برخی خواص آنها را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. نشان داده‌ایم که نظریه جواب‌هایی با یک تابع یکتا دارد که با یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم غیرخطی داده می‌شود. همچنین با استفاده از بسط تیلور تابع متریک و جایگذاری آن در معادله دیفرانسیل، برخی خواص ترمودینامیکی جواب‌ها را به طور تحلیلی به دست آورده‌ایم. از جمله این کمیت‌ها می‌توان به آنتروپی والد و دمای هاوکینگ اشاره کرد که با روابط (۲۵) و (۲۶) داده می‌شوند. در حد  $b \rightarrow \infty$ ، این کمیت‌ها به عبارات زیر می‌انجامند:

$$S = \frac{\pi r_h^2 \Xi}{2Gl} \left( 1 - \frac{108G^2 \lambda}{l^2} \right), \quad T = \frac{1}{2\pi r_h^2 \Xi} \left( \frac{3r_h^4}{l^2} - Gq^2 \right), \quad (44)$$

که دقیقاً همان نتایج به دست آمده در [۲۴] در حضور میدان ماکسول هستند. از طرفی در حد  $\lambda \rightarrow 0$  و  $b \rightarrow \infty$ ، نیز این کمیت‌ها به:

در پایان بار الکتریکی کل ریسمان سیاه را محاسبه می‌کنیم. بدین منظور، ابتدا میدان الکتریکی را با تصویر تانسور شدت میدان الکترومغناطیسی روی یک ابرسطح خاص تعیین می‌کنیم. بردارهای نرمال روی چنین سطحی با

$$u^\circ = \frac{1}{N}, u^r = 0, \quad u^i = -\frac{V^i}{N}, \quad (40)$$

داده می‌شوند. که در آن  $N$  و  $V^i$  به ترتیب تابع گذار و بردار انتقال هستند. میدان الکتریکی نیز با  $E^\mu = g^{\mu\nu} F_{\rho\nu} u^\rho$  داده می‌شود. بار الکتریکی بر واحد طول ریسمان سیاه با محاسبه شار میدان الکتریکی در بی‌نهایت به دست می‌آید

$$Q = \frac{q\Xi}{l}, \quad (41)$$

اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم صحت قانون اول ترمودینامیک برای ریسمان‌های سیاه باردار چرخان را در گرانش اینشتینی مرتبه سه خمش بیازماییم. برقراری این قانون از این نظر اهمیت دارد که یک آزمون سازگاری بسیار قوی برای محاسبات فراهم می‌کند. با استفاده از فرمول اسمارگونه می‌توان دما، سرعت زاویه‌ای و پتانسیل الکتریکی را به شکل زیر محاسبه کرد:

$$T = \left( \frac{\partial M}{\partial S} \right)_{J,Q}, \quad \Omega = \left( \frac{\partial M}{\partial J} \right)_{S,Q}, \quad \Phi = \left( \frac{\partial M}{\partial Q} \right)_{S,J}, \quad (42)$$

مشاهده می‌شود که کمیت‌های محاسبه شده در رابطه (۴۲) دقیقاً به ترتیب با معادلات (۲۶)،  $\Omega = a/l^2 \Xi$ ، و (۳۹) منطبق هستند.

نشان داده‌ایم که قانون اول ترمودینامیک برای ریسمان‌های سیاه چرخان باردار در گرانش اینشتینی مرتبه سه و در حضور الکتروودینامیک غیرخطی بورن-اینفلد به شکل دقیق برقرار است. روابط (۴۳) تا (۴۶) یک ارزیابی قوی برای صحت محاسبات را به دست می‌دهند. همچنین به عنوان یک مطالعه در آینده می‌توان جواب‌های سیاه شامه‌ای چرخان باردار را در گرانش تعمیم‌یافته شبه‌توپولوژیک مرتبه سه خمش در حضور چشمه ماکسول و بورن-اینفلد مورد بررسی قرار داد.

$$s = \frac{\pi r_h^2 \Xi}{\sqrt{Gl}}, \quad T = \frac{1}{4\pi r_h^2 \Xi} \left( \frac{r r_h^2}{l^2} - Gq^2 \right), \quad (45)$$

تقلیل می‌یابند که همان نتایج به دست آمده در [۲۰] برای جواب‌های ریسمان سیاه باردار در حضور گرانش اینشتین-ماکسول هستند. از طرف دیگر در غیاب میدان ماکسول یعنی  $Q \rightarrow 0$ ، نیز می‌توان نوشت:

$$s = \frac{\pi r_h^2 \Xi}{\sqrt{Gl}}, \quad T = \frac{r r_h}{4\pi l^2 \Xi}, \quad (46)$$

که با نتایج به دست آمده در [۲۰] برای جواب‌های ریسمان سیاه باردار در حضور گرانش اینشتین همخوانی دارد. همچنین به عنوان یک آزمون سازگاری برای جواب‌های به دست آمده،

## مراجع

1. D Lovelock, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 498.
2. R C Myers and B Robinson, *J. High Energy Phys.* **2010**, **8** (2010) 1.
3. J Oliva and S Ray, *Class. Quant. Grav.* **27** (2010) 225002.
4. R A Hennigar, D Kubiznak, and R B Mann, *Phys. Rev. D* **95**, **10** (2017) 104042.
5. P Bueno and P A Cano, *Class. Quant. Grav.* **34**, **17** (2017) 175008.
6. J Ahmed, *et al.*, *J. High Energy Phys.* **2017**, **05** (2017) 1.
7. P Bueno and P A Cano, *Phys. Rev. D* **96**, **2** (2017) 024034.
8. P Bueno, P A Cano, and R A Hennigar, *Class. Quant. Grav.* **37**, **1** (2020) 015002.
9. P Bueno, *et al.*, *J. High Energy Phys.* **11** (2019) 062.
10. R A Hennigar, *J. High Energy Phys.* **09** (2017) 082.
11. M Mir and R B Mann, *J. High Energy Phys.* **07** (2019) 012.
12. M Mir, *et al.*, *J. High Energy Phys.* **08** (2019) 068.
13. P Bueno and P A Cano, *Phys. Rev. D* **94**, **10** (2016) 104005.
14. P Bueno and P A Cano, *Phys. Rev. D* **94**, **12** (2016) 124051.
15. R A Hennigar and R B Mann, *Phys. Rev. D* **95**, **6** (2017) 064055.
16. H Khodabakhshi, A Gaiimo, and R B Mann, *Phys. Rev. D* **102**, **4** (2020) 044038.
17. H Khodabakhshi and R B Mann, *Phys. Rev. D* **103**, **2** (2021) 024017.
18. J P S Lemos, *Phys. Lett. B* **353** (1995) 46.
19. J P S Lemos and V T Zanchin, *Phys. Rev. D* **54** (1996) 3853.
20. M H Dehghani, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 044006.
21. M H Dehghani and A Khoddam Mohammadi, *Phys. Rev. D* **67** (2003) 084006.
22. S H Hendi, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 064040.
23. S H Hendi and A Sheykhi, *Phys. Rev. D* **88**, **4** (2013) 044044.
24. H R Bakhtiarizadeh, *Phys. Rev. D* **105**, **6** (2022) 064037.
25. T K Dey, *Phys. Lett. B* **595** (2004) 484.
26. R M Wald, *Phys. Rev. D* **48**, **8** (1993) R3427.
27. V Iyer and R M Wald, *Phys. Rev. D* **50** (1994) 846.