



بررسی هم‌زمانی در دو مدار الکتریکی LC غیرخطی با القای متقابل خطی و میدان خارجی با استفاده از نظریه آشوب

آمنه زمانی و حسن پهلوانی*

گروه فیزیک دانشگاه قم، قم

پست الکترونیکی: h-pahlavani@qom.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۰۳/۳۱؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۱/۰۶/۳۰)

چکیده

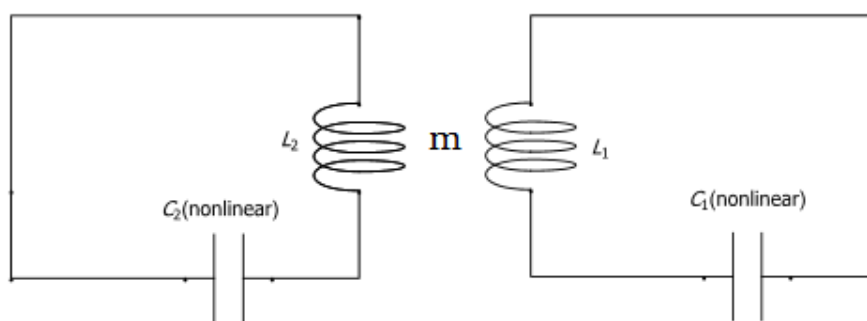
دو مدار الکتریکی غیرخطی شامل دو خازن غیرخطی را که از طریق القاگرهای خطی (القای متقابل) با یکدیگر جفت شده‌اند، تحت تأثیر میدان‌های خارجی وابسته به زمان در نظر می‌گیریم. با تحریک دو مدار الکتریکی غیرخطی آشوبناک (نوسان‌ساز آشوبناک) توسط یکدیگر به روش عددی نماهای لیاپانوف استخراج شده و هم‌زمانی دو مدار الکتریکی بدون اتصال مشاهده شد. وابستگی نماهای لیاپانوف به مقدار عددی ضریب جفت‌شدگی (القای متقابل m)، مطالعه شده و مقدار بحرانی ضریب القای متقابل مشخص شده است. همچنین تأثیر این ضریب جفت‌شدگی دو مدار الکتریکی غیرخطی (دو نوسانگر دافینگ) جفت شده بدون اتصال، به‌منظور مشاهده حالات دینامیکی مختلف بررسی شده است. نمودارهای تغییرات بار و جریان برحسب زمان به‌ازای مقدار عددی القای متقابل بحرانی مطالعه شد و هم‌زمانی دو مدار نشان داده شده است.

واژه‌های کلیدی: هم‌زمانی، آشوب، خازن غیر خطی، القای متقابل، نماهای لیاپانوف

۱. مقدمه

شاخه‌های مهم در علوم غیرخطی است که در سطح وسیعی مورد مطالعه قرار گرفته است. یکی از بارزترین ویژگی‌های سامانه‌های دینامیکی آشوبناک، داشتن حساسیت زیاد نسبت به شرایط اولیه است. این سامانه‌ها رفتار دینامیکی پیچیده‌ای دارند و به همین دلیل توجه زیادی را در زمینه‌های مختلف مانند فیزیک، شیمی، مهندسی، علوم زیستی و علوم ارتباطات به خود جلب کرده‌اند. به‌عنوان نمونه، خازن‌های غیرخطی یک نمونه از قطعات الکترونیکی غیرخطی در مدار الکتریکی است که کاربردهای مختلفی از جمله در کلیدهای الکترونیکی قدرت

یکی از مسائل قابل توجه در علوم مهندسی همگام‌سازی زمانی بین دو سامانه فیزیکی است که بتوان بسامدهای نوسان آنها را بر هم منطبق کرد [۱]. در موقعیت‌های فیزیکی می‌توان جفت‌شدگی بین دو یا چند سامانه نوسان‌کننده را ایجاد کرد؛ برای مثال، دو ساعت آونگی و یا قطعات الکترونیکی که از چندین مدار الکتریکی ساخته شده‌اند. در این مدارها بسامد یکی یا هر دوی آنها تغییر می‌یابد و انرژی می‌تواند از یکی به دیگری انتقال داده شود. همچنین تئوری آشوب، یکی از



شکل ۱. دو مدار الکتریکی جفت شده شامل القاگر خطی و خازن غیرخطی

در این مقاله تلاش ما به طور خاص در مسیری است که بتوانیم با محاسبه نماهای لیاپونوف^۱، آشوبناکی و همزمان سازی خودبه خودی مدارهای LC آشوبناک شامل خازن های غیرخطی و القاگرهای خطی جفت شده بدون اتصال تحت تأثیر عامل خارجی وابسته به زمان را مطالعه کنیم. نماهای لیاپانوف شاخصی استاندارد و قدرتمند جهت تعیین آشوبی بودن یا نبودن و یا به طور کلی آشوب همزمانی سامانه دینامیکی است. از آنجایی که همگامی نوعی همبستگی موقتی بین اجزاء مدارها است، لذا مقادیر عددی ضریب القای متقابل که به ازای آن دو مدار آشوبناک همزمان می شوند را به دست می آوریم که نقش مهمی در مطالعه دینامیک آشوب دارد.

۲. دو مدار الکتریکی غیرخطی جفت شده

دو مدار الکتریکی غیرخطی شامل دو خازن غیرخطی و دو القاگر خطی را مطابق شکل ۱ که از طریق القاگرها با یکدیگر جفت شده اند در نظر می گیریم که در آن L_1 ، L_2 ، C_1 ، C_2 به ترتیب ضرایب خطی القاگرها و ظرفیت خازن های غیرخطی و m ضریب القای متقابل است. با استفاده از قوانین کیرشهف، می توان معادلات جفت شده زیر را برای دو مدار الکتریکی غیرخطی نوشت:

$$\begin{aligned} V_{C_1} - L_1 \frac{di_1}{dt} - m \frac{di_2}{dt} &= 0, \\ V_{C_2} - L_2 \frac{di_2}{dt} - m \frac{di_1}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

[۲-۴]، لامپ های الکترونیکی [۵]، خازن های سرامیکی فروالکتریک [۶] و به طور تجربی [۷] دارند.

این قطعه الکترونیکی غیرخطی در مدار سبب ایجاد آشوب می شود به طوری که مطالعه رفتار دینامیکی آن به روش حل عددی امکان پذیر است [۸]. حال اگر دو سامانه دینامیکی آشوب زده (سامانه های غیرخطی) یکسان با شرایط اولیه متفاوت به هم متصل شوند به طوری که در نهایت به دلیل گذشت زمان، سامانه های یکسان تکامل یکسانی داشته باشند، می گوئیم که پدیده همزمان سازی (همزمانی آشوب) رخ داده است [۹ و ۱۰]. هرگاه یک نوسان ساز آشوبناک به وسیله نوسان ساز آشوبناک دیگر تحریک شود، مهم ترین اثر قابل مشاهده همزمانی دینامیک های آشوبناک سامانه تحریک شده با دینامیک های سامانه محرک است. یکی از چنین سامانه های فیزیکی یک جفت مدار الکتریکی LC است که با القای متقابل به یکدیگر جفت شده اند [۱۱]. القای متقابل در واقع انتقال توان بی سیم بین دو مدار الکتریکی است که با توجه به زمینه های کاربردی گسترده آن از جمله سامانه های شارژ باتری بدون تماس [۱۲]، دستگاه های زیست پزشکی قابل کاشت (ایمپلنت ها)، حسگرهای پزشکی بی سیم [۱۳-۱۵]، سامانه های الکترونیکی غیر قابل دسترس به خصوص در حوزه مهندسی پزشکی، مانند قلب مصنوعی برای ساخت ضربان ساز قلب و وسایل دیگری درون بدن [۱۶]، و همچنین اخیراً در شارژ اتومبیل های الکتریکی [۱۷] بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است. با توجه به اهمیت القای متقابل در صنعت و به کاربردن فریت ها در ساختمان آنها،

۱. Lyapunov Exponents

دست آورد و بایستی به صورت عددی حل شوند. هرگاه یک نوسان‌ساز آشوبناک به وسیله نوسان‌ساز آشوبناک دیگر تحریک شود، مهم‌ترین اثر قابل مشاهده هم‌زمانی دینامیک‌های آشوبناک سامانه تحریک شده با دینامیک‌های سامانه محرک است، لذا برای این هدف ابتدا باید هامیلتونی را به دست آورد. برای این منظور لاگرانژین دو مدار الکتریکی غیرخطی که توسط القاگرها به یکدیگر جفت شده‌اند را بر حسب q و مشتقات آن می‌توان به شکل زیر نوشت [۱۱]:

$$L = \frac{1}{r} (L_1 \dot{q}_1^2 + L_2 \dot{q}_2^2) + m \dot{q}_1 \dot{q}_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{q_1^2}{\mu_1} + \frac{q_2^2}{\mu_2} \right) - \frac{1}{c} (v_1 q_1^c + v_2 q_2^c) - \varepsilon_1(t) q_1 - \varepsilon_2(t) q_2, \quad (8)$$

تکانه p_1 و p_2 (متغیرهای مزدوج بار الکتریکی) توسط روابط زیر داده می‌شوند:

$$p_1(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1(t)} = L_1 \dot{q}_1 + m \dot{q}_2, \quad (9)$$

$$p_2(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2(t)} = L_2 \dot{q}_2 + m \dot{q}_1,$$

با استفاده از روابط (۸) و (۹) هامیلتونی این دو مدار جفت شده بدون میرایی را می‌توان یافت:

$$H = \frac{1}{2A} \left(\frac{p_1^2}{L_1} + \frac{p_2^2}{L_2} \right) - \frac{m}{AL_1 L_2} p_1 p_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{q_1^2}{\mu_1} + \frac{q_2^2}{\mu_2} \right) + \frac{1}{c} (v_1 q_1^c + v_2 q_2^c) + \varepsilon_1(t) q_1 + \varepsilon_2(t) q_2, \quad (10)$$

که در آن $A = 1 - m^2 / L_1 L_2$ است. با ورود مقاومت الکتریکی خطی به این دو مدار، هامیلتونی کل طبق رهیافت کالدیرولا - کانای [۱۹ و ۲۰] به صورت زیر در می‌آید:

$$H = \left(\frac{1}{2A} \frac{p_1^2}{L_1} \right) \exp\left(-\frac{R_1 t}{L_1}\right) + \left(\frac{1}{2A} \frac{p_2^2}{L_2} \right) \exp\left(-\frac{R_2 t}{L_2}\right) - \left(\frac{m}{AL_1 L_2} p_1 p_2 \right) \exp\left(-\frac{R_1 t}{L_1} - \frac{R_2 t}{L_2}\right) + \left(\frac{q_1^2}{2\mu_1} + \frac{1}{c} v_1 q_1^c + \varepsilon_1(t) q_1 \right) \exp\left(-\frac{R_1 t}{L_1}\right) + \left(\frac{q_2^2}{2\mu_2} + \frac{1}{c} v_2 q_2^c + \varepsilon_2(t) q_2 \right) \exp\left(-\frac{R_2 t}{L_2}\right), \quad (11)$$

روش‌های متنوعی برای تحلیل رفتارهای غیرخطی وجود دارد.

برای حالتی که خازن خطی باشد در مراجع [۱ و ۱۱] مطالعه شده است. در معادلات (۱)، i_1 و i_2 به ترتیب جریان عبوری از مدار ۱ و مدار ۲ و همچنین V_{C_1} و V_{C_2} اختلاف پتانسیل دو سر خازن در مدارهای ۱ و ۲ است. رابطه بین ولتاژ دو سر خازن غیرخطی و بار خازن طبق مرجع [۱۸] به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$V_{C_i} = \frac{q_i}{\mu_i} + v_i q_i^c, \quad (2)$$

که μ ظرفیت خطی خازن، v ضریب ظرفیت غیرخطی خازن و نیز q بار الکتریکی خازن است و در آن $i=1,2$ است. می‌توان معادلات (۱) را به شکل معادلات جفت شده غیرخطی مرتبه دو زیر تبدیل کرد:

$$\ddot{q}_1 + m_1 \ddot{q}_2 + \omega_1^2 q_1 + \beta_1 q_1^c = 0, \quad (3)$$

$$\ddot{q}_2 + m_2 \ddot{q}_1 + \omega_2^2 q_2 + \beta_2 q_2^c = 0,$$

که در آن

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_1 \mu_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{1}{L_2 \mu_2}$$

$$m_1 = \frac{m}{L_1}, \quad m_2 = \frac{m}{L_2}$$

$$\beta_1 = \frac{v_1}{L_1}, \quad \beta_2 = \frac{v_2}{L_2}$$

$$i_1 = -\frac{dq_1}{dt}, \quad i_2 = -\frac{dq_2}{dt}, \quad (4)$$

حال اگر فرض کنیم در مدار نیرومحرکه سینوسی وجود دارد به طوری که

$$\varepsilon_1(t) = E_1 \cos(\theta_1 t), \quad \varepsilon_2(t) = E_2 \cos(\theta_2 t), \quad (5)$$

و همچنین مقاومت خطی به عنوان بخش میرایی وارد شود، آنگاه معادلات جفت شده (۳) به شکل زیر تغییر می‌کند:

$$\ddot{q}_1 + m_1 \ddot{q}_2 + \alpha_1 \dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + \beta_1 q_1^c = A_1 \cos(\theta_1 t), \quad (6)$$

$$\ddot{q}_2 + m_2 \ddot{q}_1 + \alpha_2 \dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + \beta_2 q_2^c = A_2 \cos(\theta_2 t),$$

$$A_1 = \frac{E_1}{L_1}, \quad A_2 = \frac{E_2}{L_2}$$

$$\alpha_1 = \frac{R_1}{L_1}, \quad \alpha_2 = \frac{R_2}{L_2}, \quad (7)$$

غیرخطی بودن معادلات (۶) سبب ایجاد آشوب در مدار می‌شود، بنابراین حل تحلیلی دقیقی را نمی‌توان برای آنها به

می نویسیم:

$$H_l = \left(\frac{p_l^r}{rAL_l}\right)\exp\left(-\frac{R_l t}{L_l}\right) + \left(\frac{q_l^r}{r\mu_l} + \frac{v_l}{r} q_l^r + \varepsilon_l(t)q_l\right) \exp\left(\frac{R_l t}{L_l}\right) - \frac{1}{r} \left(\frac{m}{AL_r L_r} p_l p_r\right) \exp\left(-\frac{R_l t}{L_l} - \frac{R_r t}{L_r}\right), \quad (12)$$

که در آن می توان معادلات حرکت را با استفاده از عبارت های زیر استخراج کرد:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (13)$$

برای این که درک بهتری از توصیف دو مدار غیرخطی را که تحت تأثیر القای متقابل همدیگر قرار گرفته اند به دست آوریم، ابتدا یک مدار مستقل غیرخطی ($m=0$) که در نتیجه $A=1$ خواهد شد) را که شامل خازن غیرخطی، القاگر خطی، مقاومت خطی و نیرو محرکه است، در نظر می گیریم و طبق قانون کیرشهف جمع جبری اختلاف پتانسیل ها را مطابق زیر می نویسیم:

$$V_C + V_R + V_L = \varepsilon_l(t), \quad (14)$$

$$\frac{q_l}{\mu_l} + v_l q_l^r + R_l \dot{q}_l + L_l \frac{dq_l}{dt} = \varepsilon_l(t),$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$L_l \ddot{q}_l + R_l \dot{q}_l + \frac{q_l}{\mu_l} + v_l q_l^r = \varepsilon_l(t), \quad (15)$$

معادله (۱۵) معروف به معادله دافینگ^۱ است که در بسیاری از سامانه های واقعی کاربرد داشته و رفتار دینامیکی آن را می توان به سامانه های واقعی تعمیم داد. اشکال مختلف این معادله دیفرانسیل اغلب توسط روش های تحلیلی و یا عددی حل شده اند [۲۷]. اکنون با خطی سازی بدون در نظر گرفتن قسمت برهم کنش هامیلتونی، یعنی با فرض مستقل بودن یکی از مدارها، در فضای حالت معادلاتی به شکل زیر خواهیم داشت:

$$\frac{dq_l}{dt} = \frac{1}{L_l} p_l \exp\left(-\frac{R_l}{L_l} t\right),$$

$$\frac{dp_l}{dt} = -\left(\frac{q_l}{\mu_l} + v_l q_l^r + E_l \cos[\theta_l t]\right) \exp\left(\frac{R_l}{L_l} t\right), \quad (16)$$

$$\frac{dz_l}{dt} = \theta_l,$$

که در آن $z_l = \theta_l t$ به عنوان بعد سوم فضای حالت تعریف شده است. حال با استفاده از مجموعه معادلات (۱۶) و الگوریتم

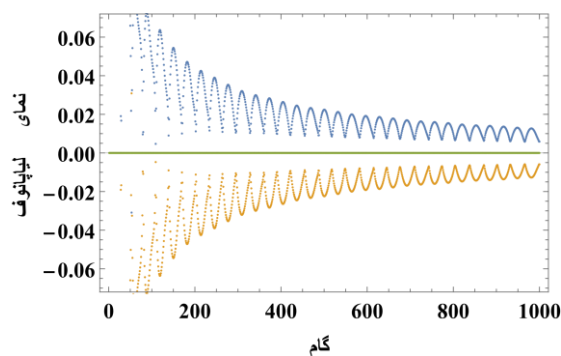
یکی از مهم ترین آنها، محاسبه نماهای لیپانوف است که در این پژوهش ابتدا به محاسبه نماهای لیپانوف یک مدار الکتریکی غیرخطی که تحت القای متقابل میدان مدار دیگر قرار گرفته خواهیم پرداخت و سپس دینامیک آشوبی بودن یا نبودن مدار مطالعه می شود.

۳. محاسبه نماهای لیپانوف و نتایج عددی

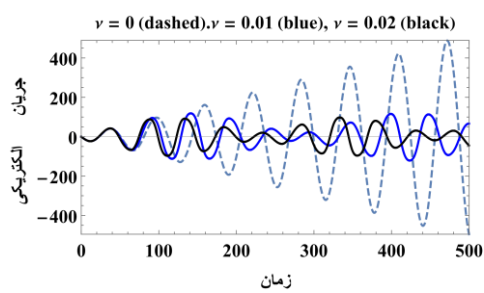
در واقع نمای لیپانوف توصیف کننده دینامیک تحول سامانه است. در دینامیک غیر آشوبناک، مسیرهای مجاور در فضای فاز به یکدیگر همگرا می شوند، اما در حرکت آشوبناک مسیرهای نزدیک به هم با سرعتی نمایی از یکدیگر دور یا به عبارتی دیگر واگرا می شوند. وابستگی سرعت همگرایی یا واگرایی مسیرهای مجاور در فضای فاز، در نظریه آشوب توسط معیاری به نام نمای لیپانوف سنجیده می شود. تعداد نماهای لیپانوف، با بعد فضای فاز برابر است، اگر حداقل یک نمای لیپانوف مثبت وجود داشته باشد، واگرایی نمایی مسیرهای مجاور در فضای فاز وجود دارد و سامانه آشوبناک است (هر سامانه ای که شامل حداقل یک نمای مثبت باشد، آشوبناک تعریف می شود). بنابراین دانستن علامت بزرگ ترین نمای لیپانوف کافی است برای این که نشان دهیم یک سامانه آشوبناک است یا نه [۲۱]. نمای لیپانوف منفی، بیانگر رفتاری غیر آشوبناک و دوره ای و در نتیجه پیش بینی پذیرتر است. یعنی در چنین سامانه ای می توان از اطلاعات گذشته برای پیش بینی رفتار آینده استفاده کرد. نمای لیپانوف صفر هم در نقاط دوشاخه شدگی و یا رفتارهای شبه تناوبی دیده می شود. با این اوصاف، نمای لیپانوف معیاری برای شناسایی آشوب در سامانه مورد مطالعه است [۹]. در این کار برای محاسبه نمای لیپانوف از روش مرجع های [۲۲-۲۵] استفاده کردیم که در آن نمای لیپانوف شاخص خوبی برای تشخیص حرکات تناوبی، شبه تناوبی و آشوب گونه است [۲۶].

با استفاده از معادله (۱۱)، هامیلتونی یک مدار غیرخطی (شامل خازن غیرخطی و القاگر خطی و نیرو محرکه) که تحت برهم کنش متقابل مدار دیگر قرار گرفته را به صورت زیر

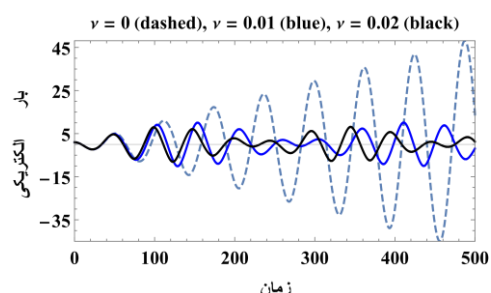
1. Duffing equation



شکل ۲. نماهای لیاپانوف مدار فرضی با مقادیر $(L=100, \mu=1, \nu=0.01, R=0.01, E=2, \theta_1=0.1)$.



(ب)



(الف)

شکل ۳. نمودار (الف) بار و (ب) جریان الکتریکی بر حسب زمان به‌ازای مقادیر $(L=100, \mu=1, R=0.01, E=2, \theta=0.1)$.

نیرو محرکه‌اند، می‌پردازیم و با حل عددی، نماهای لیاپانوف آن را استخراج می‌کنیم. با توجه به هامیلتونی معادله (۱۰) در فضای فاز شش بعدی و چشم‌پوشی از اتلاف $(R_l = R_r = 0)$ ، روابط زیر استخراج می‌شوند:

$$\begin{aligned} \frac{dq_l}{dt} &= \frac{1}{AL_l} p_l - \frac{m}{AL_l L_r} p_r, \\ \frac{dp_l}{dt} &= -\left(\frac{q_l}{\mu_l} + \nu_l q_r^2 + E_l \cos[\theta_l t]\right), \\ \frac{dz_l}{dt} &= \theta_l, \\ \frac{dq_r}{dt} &= \frac{1}{AL_r} p_r - \frac{m}{AL_l L_r} p_l, \\ \frac{dp_r}{dt} &= -\left(\frac{q_r}{\mu_r} + \nu_r q_l^2 + E_r \cos[\theta_r t]\right), \\ \frac{dz_r}{dt} &= \theta_r, \end{aligned} \quad (17)$$

نتایج عددی به‌دست‌آمده از حل مجموعه معادلات (۱۷) و الگوریتم محاسبه نمای لیاپانوف در متمتیکا، شکل ۴ حاصل می‌شود.

با توجه به داده‌های مشخص شده در شکل ۴، می‌توان

نماهای لیاپانوف را به‌صورت زیر استخراج کرد:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.020, \lambda_2 = 0.003, \lambda_3 = 0.001, \lambda_4 \\ &= 0, \lambda_5 = -0.007, \lambda_6 = -0.018 \end{aligned}$$

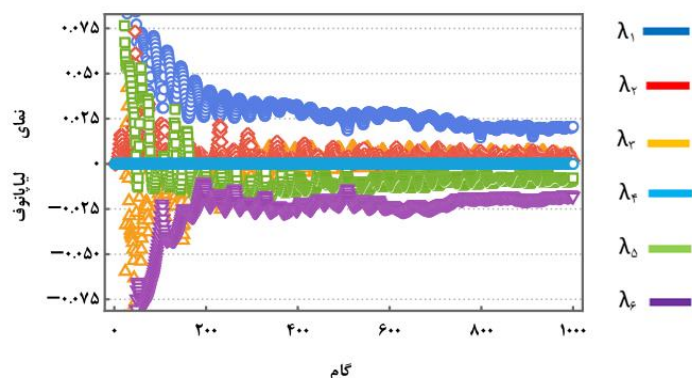
محاسبه نمای لیاپانوف در متمتیکا، می‌توان نماهای لیاپانوف یک مدار الکتریکی مستقل غیرخطی را به محاسبه کرد.

نتایج عددی به‌دست‌آمده در شکل ۲، نشان‌دهنده است. نماهای لیاپانوف که با نماد λ مشخص شده‌اند عبارت‌اند از:

$$\lambda_1 = 0.0059, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -0.0059$$

از آنجایی که یکی از نماهای لیاپانوف به‌دست‌آمده مثبت است، می‌توان نتیجه گرفت که این مدار الکتریکی مستقل غیرخطی یک سامانه آشوبناک است. همچنین در شکل ۳، نمودارهای بار و جریان الکتریکی بر حسب زمان به‌ازای مقادیر عددی ضرایب غیرخطی مختلف رسم شده است. از نمودارهای ۳. الف و ۳. ب نتایج زیر به دست می‌آید: اولاً نوسانات بار و جریان بر حسب زمان غیر هارمونیک است. ثانیاً با افزایش مقادیر عددی، ضریب غیرخطی طول قله‌های بار و جریان کم خواهد شد و همان‌طور که دیده می‌شود به‌ازای ضریب غیرخطی صفر، بیشینه جریان به وجود می‌آید.

در ادامه این مقاله به بررسی دو مدار الکتریکی غیرخطی کوانتومی جفت شده که شامل القاگر خطی و خازن غیرخطی و



شکل ۴. نمودار نماهای لیاپانوف دو مدار کوپل شده به ازای

مقادیر $(E_1 = E_2 = 3, L_1 = L_2 = 100, \mu_1 = \mu_2 = 1, \nu_1 = \nu_2 = 0.01, m = 20, \theta_1 = \theta_2 = 0.1)$.

سامانه غیرخطی، آشوبناک است.

یکی دیگر از کاربردهای بسیار مهم که از طریق تحلیل نماهای لیاپانوف به دست می‌آید مطالعه هم‌زمانی دو مدار الکتریکی غیرخطی جفت شده است. اگر همه نماهای لیاپانوف به دست آمده منفی شوند نشان‌دهنده پایداری است و یا می‌توان گفت هم‌زمانی در دو مدار اتفاق افتاده است. در این رهیافت، ملاک انتقال و گذار از وضعیت فوق آشوبناک به آشوبناک و یا رسیدن به هم‌زمانی، تعیین مقدار بحرانی ضریب القای متقابل m دو مدار است؛ بنابراین مطالعه نماهای لیاپانوف به عنوان توابعی بر حسب القای متقابل m ، مشخص می‌کند که چه موقع دو مدار الکتریکی غیرخطی جفت شده (نوسان‌ساز) به هم‌زمانی می‌رسند [۲۹ و ۳۰].

برای این منظور، در اینجا، مطابق شکل ۵ فرض می‌کنیم که یکی از مدارها نیرومحرکه (به عنوان سامانه محرک) دارد و دیگری بدون نیروی محرک (به عنوان سامانه پاسخ) است.

با فرض این که بسامد نیرومحرکه کسینوسی 0.08 باشد، با توجه به نتایج عددی به دست آمده به بررسی نماهای لیاپانوف بر حسب مقدار جفت‌شدگی (القای متقابل m) در شکل ۶ می‌پردازیم. با توجه به نمودار، به ازای برخی از مقادیر ثابت القای متقابل، سامانه از حالتی با دو نمای لیاپانوف مثبت به یک نمای لیاپانوف مثبت می‌رود یعنی به هم‌زمانی نزدیک می‌شود (مانند $m = 13$) و می‌توان گفت در این حالت سامانه از حالت فوق آشوبناک به حالت آشوبناک نزدیک شده است و هم‌زمانی

می‌توان نتیجه گرفت که این مدار الکتریکی غیرخطی جفت شده یک سامانه فوق آشوبناک است، زیرا حداقل دو نمای لیاپانوف مثبت دارد.

اگر بتوان برای این سامانه فوق آشوبناک بعد کاپلان - یورک^۱ (لیاپانوف) لحاظ کرد، با محاسبه این بعد نیز می‌توان به آشوبناکی سامانه پی برد [۲۸]. ویژگی مهم بعد کاپلان - یورک که طبق رابطه زیر داده می‌شود این است که توسط مقدار نماهای لیاپانوف قابل محاسبه است:

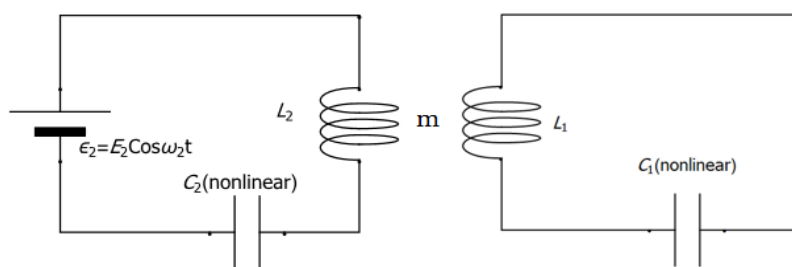
$$D_{KY} = j + \frac{1}{|\lambda_{j+1}|} \sum_{i=1}^j \lambda_i, \quad (18)$$

که در آن D_{KY} بیانگر بعد کاپلان - یورک و تعداد نماهای لیاپانوف با شاخص $i (1, 2, \dots, n)$ مشخص می‌شود. n مرتبه سامانه دینامیکی است که در این کار برابر ۶ است. برای محاسبه بعد کاپلان - یورک کافی است که نماهای لیاپانوف از بزرگ‌ترین به کوچک‌ترین مرتب شوند و شاخص j بیانگر شاخص کوچک‌ترین نمای لیاپانوف نامنفی سامانه است. حال با استفاده از نماهای لیاپانوف به دست آمده در نمودار شکل ۷ خواهیم داشت:

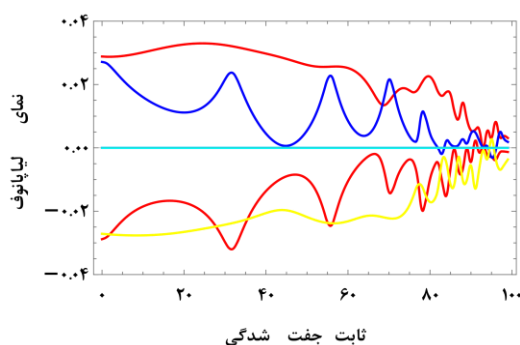
$$D_{KY} = 4 + \frac{1}{0.007} (0.02 + 0.003 + 0.001 + 0) = 7.421$$

از آنجایی که شرط داشتن سامانه آشوبناک (فوق آشوبناک)، بعد کسری و غیرصحیح کاپلان - یورک است لذا با توجه به بعد به دست آمده (یک عدد غیرصحیح) می‌توان فهمید که این

۱. Kaplan-Yorke dimension

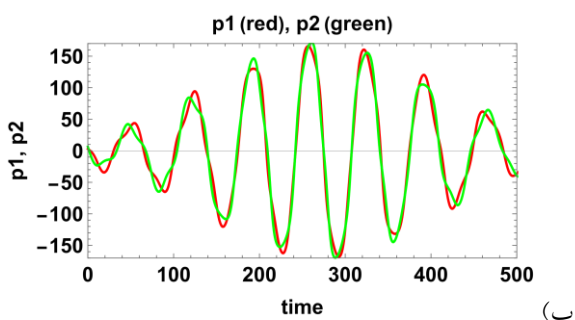


شکل ۵. دو مدار الکتریکی جفت شده شامل القاگر خطی و خازن غیرخطی که مدار ۲ به نیرو محرکه وصل شده است.

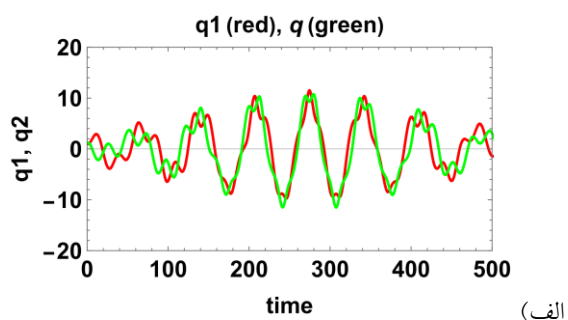


شکل ۶. نماهای لیاپانوف برحسب ثابت جفت‌شدگی را به‌ازای مقادیر

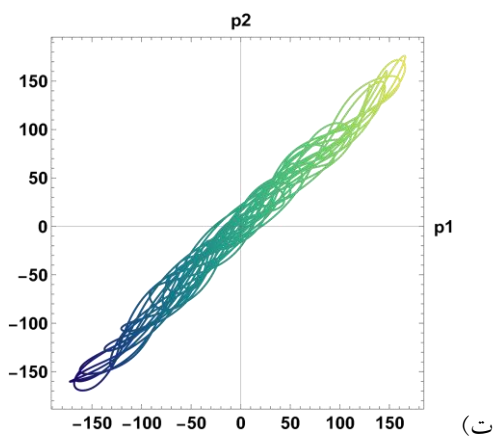
$(E_l = 0, E_r = 3, L_l = L_r = 100, \mu_l = \mu_r = 1, \nu_l = \nu_r = 0.1, \theta_l = 0, \theta_r = 0.8)$ نشان می‌دهد.



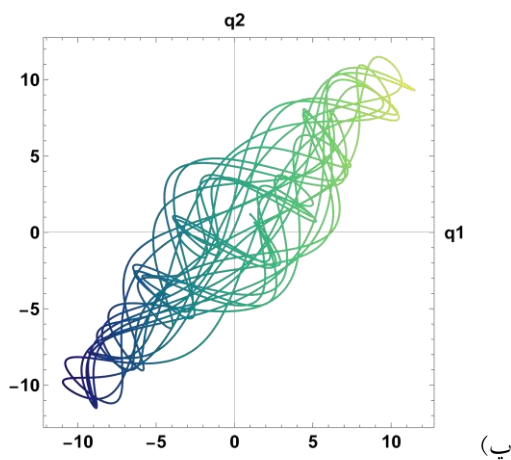
(ب)



(الف)



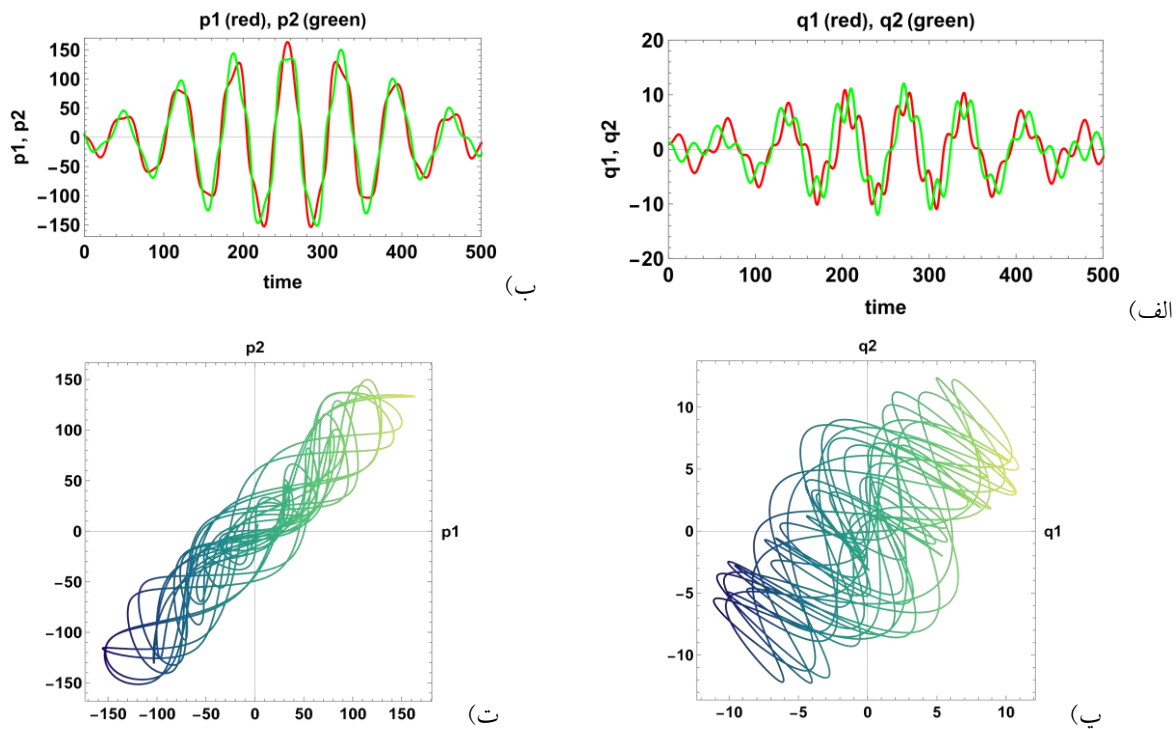
(ت)



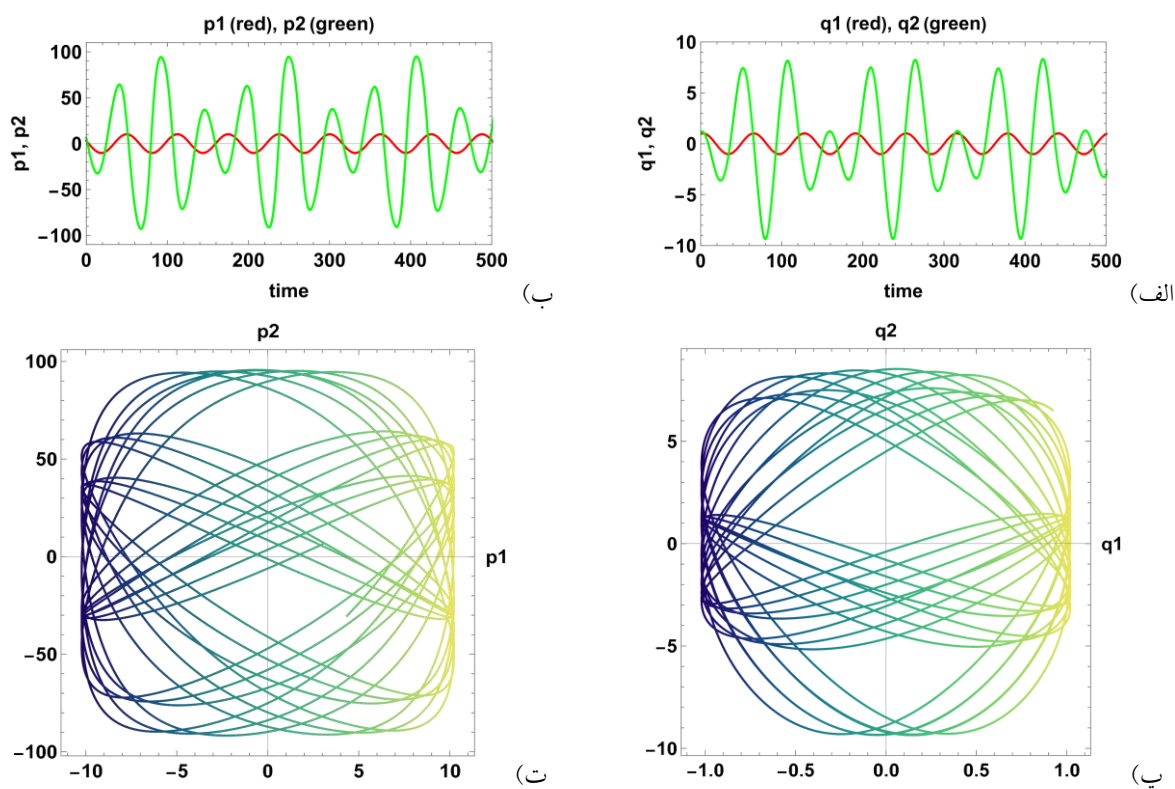
(پ)

شکل ۷. (الف)، (ب) نمودارهای هم‌زمانی q و (ب)، (ت) نمودارهای هم‌زمانی p به‌ازای $m = 83$

$(E_l = 0, E_r = 3, L_l = L_r = 100, \mu_l = \mu_r = 1, \nu_l = \nu_r = 0.1, \theta_l = 0, \theta_r = 0.8)$



شکل ۸. (الف)، (پ) نمودارهای هم‌زمانی q و (ب)، (ت) نمودارهای هم‌زمانی p به‌ازای $m=80$
 .($E_l = 0, E_r = 3, L_l = L_r = 100, \mu_l = \mu_r = 1, v_l = v_r = 0.1, \theta_l = 0, \theta_r = 0.1$)



شکل ۹. (الف)، (پ) نمودارهای هم‌زمانی q و (ب)، (ت) نمودارهای هم‌زمانی p به‌ازای $m=0$
 .($E_l = 0, E_r = 3, L_l = L_r = 100, \mu_l = \mu_r = 1, v_l = v_r = 0.1, \theta_l = 0, \theta_r = 0.1$)

را تجربه می‌کند.

در ادامه نمودار تغییرات p و q برحسب زمان (سری‌های زمانی) در دو مدار و هم‌زمانی دو مدار بررسی می‌شود. در نمودارهای شکل ۷ که به‌ازای $m=13$ رسم شده‌اند، می‌توان هم‌زمانی را با نمودارهای شکل ۸ و شکل ۹ که به‌ازای $m=10$ و $m=0$ رسم شده‌اند، مشاهده و مقایسه کرد. با مقایسه نمودارهای بار الف و جریان ب در شکل‌های ۷ و ۸ و ۹ می‌توان نتیجه گرفت: به‌ازای مقادیر $m=13$ و $m=10$ ، قله این نمودارها بر حسب زمان نسبت به حالتی که $m=0$ است انطباق بیشتری با هم دارند و این موضوع بیان می‌کند که در دو حالت فوق مدار الکتریکی جفت شده به هم‌زمانی نزدیک‌تر است. همین نتیجه را می‌توان با مقایسه نمودارهای پ و ت این اشکال (نمودارهای بار جریان دو مدار) به دست آورد. یعنی هر چه نمودار $q_2 - q_1$ و $p_2 - p_1$ به خط راست نزدیک‌تر باشد، این دو مدار الکتریکی جفت شده به هم‌زمانی نزدیک‌تر خواهند شد.

۴. نتیجه‌گیری

با توجه به این که همگام‌سازی نوسانگرها در طبیعت و فناوری گسترده هستند و نمونه‌های مختلفی از آن در علوم اعصاب،

مراجع

بیوفیزیک، الکترونیک و ... دیده می‌شود و نیز با توجه به نقش القای متقابل مدارهای الکتریکی جفت شده در پیشرفت صنایع پزشکی و ارسال و انتقال توان به‌صورت بی‌سیم، ضروری به نظر می‌رسد، بنابراین در این مقاله با اعمال یک خازن غیرخطی به مدار الکتریکی LC، آشوبناکی آن توسط نماهای لیاپانوف که شاخصی استاندارد و قدرتمند جهت تعیین آشوبی بودن یا نبودن سامانه دینامیکی است مطالعه شده است. در نهایت هم‌زمانی آشوب دو مدار الکتریکی غیرخطی LC را که توسط القای متقابل به طور خطی با یکدیگر جفت شده‌اند بر اساس نماهای لیاپانوف مطالعه کردیم. از آنجایی که در این رهیافت ملاک انتقال و گذار از وضعیت فوق آشوبناک به آشوبناک و یا رسیدن به هم‌زمانی، تعیین مقدار بحرانی ضریب القای متقابل m دو مدار است، توانستیم به مقدار مشخصی از ثابت القای متقابل که دو مدار را به هم‌زمانی نزدیک می‌کند دست یابیم. این بیانگر آن است که مدار الکتریکی جفت شده گذار از حالت فوق آشوبناک به حالت آشوبناک (گذار به هم‌زمانی) را تجربه می‌کند. همچنین در نمودارهای بار و جریان نیز به‌ازای مقدار بحرانی، ضریب القای متقابل m هم‌زمانی مطالعه شده است.

1. P L Kapitza, *Physics* **231** (1984) 1.
2. C G Steyn and J D Van Wyk, *IEEE Trans. Indust. Appl.* **3** (1986) 471.
3. G Fregien and J D van Wyk, *IEEE Trans. Power Electron.* **7**, 2 (1992) 425.
4. C G Steyn and J D Van Wyk, *Etz-Archiv* **9**, 2 (1987) 39.
5. E Gluskin, *Int. J. Electron.* **58**, 1 (1985) 63.
6. J C Burfoot and G W Taylor, "Polar Dielectrics And Their Applications", Univ of California Press (2022).
7. E Gluskin, *J. de Phys.* I **4**, 5 (1994) 801.
8. A Zamani and H Pahlavani, *International Journal of Modern Physics B* **36**, 02 (2022) 2250014.
9. S H Strogatz, "Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry and engineering", Addison-Wesley (1994).
10. G Benettin, et al., *Theory. Meccanica*, **15**, 1 (1980) 9.
11. H Pahlavani and E R Kolor, *Phys. B Condens. Matter* **495** (2016) 123.
12. X Liu and S Y Hui, *IEEE Trans. Power Electron.* **23**, 1 (2008), 455.
13. M F Mahmood, et al., *Designs* **5**, 4 (2021) 59.
14. B Choi, et al., *IEEE Trans. Indust. Electron.* **51**, 1 (2004), 140.
15. V B Gore and D H Gawali, *2016 Conference on Advances in Signal Processing (CASP)*, IEEE (2016).
16. S Y R Hui, W Zhong, and C K Lee, *IEEE Trans. Power Electron.* **29**, 9 (2013) 4500.
17. A Triviño-Cabrera, Z Lin, and J A Aguado, *Energies* **11**, 3 (2018) 538.
18. E Gluskin, *J. Frank. Inst.* **336**, 7 (1999) 1035.
19. P Caldirola, *Il Nuovo Cimento (1924-1942)*, **18**, 9 (1941) 393.

20. E Kanai, *Prog. Theor. Phys.* **3**, 4 (1984) 440.
21. F L Dubeibe, *Rev. Colomb. de Física* **45**, 1 (2013).
22. M D Hartl, *arXiv preprint physics/0303077* (2003).
23. M D Hartl, “*Dynamics of spinning compact binaries in general relativity*”, California Institute of Technology (2003).
24. M Sandri, *The Mathematica J.* (1996) 78.
25. B Koocheck Shooshtari, A M Forouzanfar, and M R Molaei. *SpringerPlus* **5** (2016) 1.
26. M Gautherie, *et al.*, *Prog. Clin. Biol. Res.* **107**(1982) 279.
27. I Kovacic and M J Brennan, “*The Duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour*”, John Wiley & Sons (2011).
28. A Abooe, H A Yaghini-Bonabi, and M R Jahed-Motlagh, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **18**, 5 (2013) 1235.
29. V S Afraimovich, N N Verichev, and M I Rabinovich, *Radiophys. Quant. Electron.* **29**, 9 (1986) 795.
30. N F Rulkov, *et al.*, *Phys. Rev. E* **51**, 2 (1995) 980.