مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۳، شمارهٔ ۳، پاییز ۱۳۹۲

کیهان‌شناسی کلاسیکی برانز- دیکی در چارچوب اینشتین و تغییر نشان متریک

حسین غفارنژاد

دانشکدهٔ فیزیک، دانشگاه سمنان، صندوق پستی ۳۶۳-۳۵۱۹۵

پست الکترونیکی: hghafarnejad@profs.semnan.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۵/۱۹ ؛ پذیرش: ۱۳۹۲/۴/۱۹)

چکیده

چارچوب همدیس پاؤلی (یا اینشتین) برای مطالعهٔ نظریهٔ گرانشی برانز- دیکی به کار رفته است که در این چارچوب میدان اسکالر برانز- دیکی با متریک برهم‌کنش ضعیف دارد. جواب‌های معادلات دینامیکی برای متریک‌های تبهگن مطالعه شدند. برای متریک تخت روبرتسون- والکر در یک جهان چهار بعدی جواب‌های تحلیلی در حضور پتانسیل نامتقارن خاصی که شامل برهم‌کنش از نوع ساین- گوردون نیز است، به دست آمدند که تغییر نشان متریک از توپولوژی اقلیدوسی (++++) به توپولوژی لورنتسی (+++-) را به دست می‌دهند. برای این پتانسیل فاکتور مقیاس جهان در هنگام تغییر نشان متریک رفتار تکین از خود نشان نمی‌دهد.

واژه‌های کلیدی: گرانش برانز- دیکی، تغییر نشان متریک، متریک روبرتسون- والکر، کیهان شناسی کلاسیکی، میدان دایلتونی، توپولوژی اقلیدوسی، توپولوژی لورنتسی، چارچوب جوردن، چارچوب پائولی

۱. مقدمه

در حالی‌که نسبیت عام ادعا می‌کند که ناوردایی لورنتسی محلی وجود دارد، هر دو گرانش کوانتومی [۱] و نظریهٔ ریسمان [۲] اظهار می‌دارند که ممکن است ناوردایی لورنتسی در حوزهٔ انرژی‌های بالا شکسته شود. به علاوه، ناوردایی لورنتسی شکسته شده به عنوان توضیح انرژی- قطع مربوط به پروتون‌های کیهانی (قطع GZK) پیشنهاد شده است [۳ و ۴]. در سال‌های اخیر چندین ایده و طرح مختلف برای مطالعهٔ نحوهٔ شکست ناوردایی لورنتس در نسبیت عام و نتایج معتبر آزمایشگاهی برای آنها داده شده است [۵ – ۷]. بنیان اصلی این مدل‌ها به کار بردن یک چارچوب مرجع است که با یک میدان برداری زمان گونه (با اندازهٔ واحد) توصیف می‌شود. به جهت ابقاء و برقراری اصل هموردایی عام، میدان برداری مذکور باید حتماً به صورت دینامیکی اختیار شود [۷ – ۱۱].

وقتی می‌گوییم که یک خمینهٔ n بعدی با یک متریک مربوطه، دارای ساختار ریمانی تکین است، یعنی که حجم n–شکل حاصل از متریک بر روی هر زیرمجموعه‌ای از خمینه، صفر است. بنابراین در یک دستگاه مختصات محلی در همسایگی این زیر– مجموعه دترمینان ماتریس مؤلفه‌های تانسور متریک هموردا صفر است. در این مقاله متریک‌هایی را در نظر خواهیم گرفت که روی هر ابر– سطح سه بعدی تبهگن بوده و خمینه را به دو ناحیه تقسیم می‌کنند. در یک ناحیه هندسه لورنتسی خواهد بود با نشان متریک (+++–) و در ناحیهٔ دیگر هندسه اقلیدوسی با نشان متریک (++++). در چنین شرایطی هیچ میدان هموار از چارچوب‌های هم ارز راست هنجار وجود نخواهد داشت که این ابر سطح را در برداشته

باشد. این مطلب استنباط‌های مهمی را برای برهم‌کنش مؤلفه‌های تانسورها در چنین ناحیه‌ای دارد. برای مثال تانسور تنش بنیادی برای یک سیال کامل، بر وجود میدان برداری زمان گونه واحد به منظور تعریف چگالی میدان و تمیز دادن آن از مؤلفه‌های فشار سیال تأکید می‌کند. چنین میدان برداری تکین است، جایی که متریک تبهگن است تعریف چگالی (یا فشار) در هندسهٔ غیر لورنتسی اختیاری است. به جهت توصیف میدان‌های تانسوری تکین بر روی یک خمینه کاملاً هموار با یک ساختار توپولوژیکی عام، لازم است که مجموعه‌ای از دستگاه‌های مختصات هموار که با یک ساختار دیفرانسیل پذیر سازگار است، اختیار کنیم. به علاوه یک سیستم چارچوب مرجع را انتخاب خواهیم نمود تا در آن ساختار تکین تانسورها را توصیف کنیم. تانسورها وقتی تکین خواهند بود که هر کدام از مؤلفه‌های آنها در پایه‌های تانسوری تعریف شده در یک چارچوب مختصات تکین باشند.

آن دسته از حل‌های معادلات گرانشی نظریهٔ برانز- دیکی را دنبال خواهیم نمود که شامل یک متریک تبهگن هستند. ساده‌ترین مدل که شامل این پدیده هستند در مدل‌های کیهان‌شناسی آشکار می‌شوند که بیشترین تقارن را دارند. الیس [۱۲ – ۱۵] پیشنهاد داد که مبتنی بر اظهارات اولیهٔ ولینکین [۱۶ – ۱۸]، سیال‌های ساده یا میدان‌های برهم‌کنش‌کننده می‌توانند چشمه‌هایی از کیهان‌شناسی همگن و همسانگرد را فراهم کنند. اغلب این مطالعات به تغییر هندسه اقلیدوسی به یک متریک روبرتسون- والکر با انحنای فضایی مثبت متمرکز می‌شوند که در آن ثابت کیهان‌شناسی نقش بسیار مهمی در دینامیک سیستم کیهانی بازی می‌کند. اغلب جواب‌ها با حل معادلات اینشتین در نواحی متمایز و با تنظیم جواب‌ها میان ابر- سطح تعویض نشان متریک، به همراه چند شرط اتصال حاصل می‌شوند. اختلاف نظر فراوانی در متون علمی فعلی بر روی چنین شرط‌های اتصال غیرطبیعی وجود دارد. از این رو در این مقاله روش اخیر را دنبال نخواهیم کرد و روش متمایزی را با پیروی از روش درلی- و همکاران به کار می‌بریم.

مطابق با پیشنهاد درلی- و همکاران [۱۹] فرآیند متفاوتی را می‌پذیریم. با تأکید بر روی یک دستگاه مختصات مرجع که تحول تغییر نشان متریک را کنترل می‌کند، جواب‌هایی به صورت توابع حقیقی هموار و پیوسته را دنبال می‌کنیم که معرف تانسورهای تکین توصیف شده در بالا باشند. در غیاب هر گونه میدان‌های مادی، تنها میدان اسکالر برانز- دیکی حقیقی را به عنوان چشمه مناسب بنیادی اختیار می‌کنیم، که در یک چارچوب مرجع اینشتین با متریک برهم‌کنش ضعیف دارد. یک پتانسیل خاص برای میدان اسکالر برانز- دیکی در نظر می‌گیریم و حل‌های تحلیلی از معادلات دینامیکی را پیدا می‌کنیم که با هندسه‌های تکین مواجه می‌شوند. به ویژه مدل‌هایی را توصیف خواهیم نمود که یک تغییر نشان متریک از اقلیدوسی به لورنتسی را برای متریک روبرتسون- والکر تخت فضایی نشان می‌دهند.

۲. گرانش برانز- دیکی در چارچوب اینشتین

با نظریهٔ گرانشی اسکالر تانسوری برانز- دیکی به شرح زیر آغاز کنیم که درآحاد $\hbar = c = 1$ به همراه پتانسیل دلخواه $V(\varphi)$ نوشته شده است [۲۰ و ۲۱].

$$I\left[\gamma_{\alpha\beta},\varphi\right] = -\int dx^{4}\sqrt{\gamma}\left\{\varphi\Re + \frac{\omega}{\varphi}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi + V(\varphi)\right\}. \qquad (1)$$

در اینجا $\gamma_{\alpha\beta}$ متریک جوردن نامیده شده است. $\Re$ اسکالر ریچی (یا اسکالر انحنا) است و میدان اسکالر غیر مادی بنیادی φ میدان اسکالر برانز- دیکی نامیده می‌شود، که وارون آن مقدار متغیر پارمتر جفت شدگی گرانشی نیوتن $\varphi\left(x^\delta\right) = 1/16\pi G\left(x^\delta\right)$ می‌باشد. از این رو بعد وارون میدان φ در آحاد $\hbar = c = 1$ به صورت مجذور طول است. ω ثابت بی بعد جفت شدگی برانز- دیکی نامیده می‌شود که به طور تجربی معادل با 4×10^{4} به دست آمده است [۲۲].

زمانی‌که خود برانز و دیکی نظریهٔ خود را به عنوان یک مدل گرانشی برتر نسبت به نسبیت عام معرفی کردند، سوال مهم این بود که کدام چارچوب باید به عنوان یک چارچوب فیزیکی اختیار شود [۲۳–۲۵]. از لحاظ مفهومی محققین

پیشنهاد دادند که این مشکل با کمک اصل هم ارزی پاسخ داده می‌شود. به راستی با تأکید بر این‌که مادهٔ معمولی نباید اصل هم ارزی ضعیف را نقض کند، آنها چارچوب جوردن را به عنوان چارچوب فیزیکی پذیرفتند. زیرا که تنها در این چارچوب است که متریک جوردن با مادهٔ معمولی برهم‌کنش ضعیف دارد و بنابراین مادهٔ معمولی اصل هم ارزی را پشتیبانی می‌کند. هر چند خیلی خوب شناخته شده است که اصل هم ارزی ضعیف نه تنها به وسیله مادهٔ معمولی و بلکه با میدان اسکالر برانز- دیکی هم شکسته می‌شود. زیرا ضعیف بودن برهم‌کنش متریک جوردن با مادهٔ معمولی نمی‌تواند پایدار باقی بماند وقتی‌که اثرات کوانتومی مادهٔ معمولی به حساب می‌آید [۲۴]. اگر چنین است پس کدام چارچوب باید به عنوان یک چارچوب فیزیکی اختیار شود. متأسفانه هیچ اصل بنیادی وجود ندارد که ما را برای انتخاب یک چارچوب همدیس مناسب راهنمایی کند. حتی خود اصل هم ارزی ضعیف نیز کمکی نمی‌کند. اما ساده‌ترین مساعدت منطقی چارچوب پاولی (اینشتین) است [۲۴-۲۶]. برای نمایش آن میدان برانز- دیکی دایلتونی ψ و متریک پاولی $g_{\alpha\beta}$ را به صورت زیر [۲۳و۲۴] تعریف می‌کنیم:

$$\varphi=\frac{1}{16\pi G}e^{\eta\psi}, \tag{۲}$$

و

$$g_{\alpha\beta}=e^{\eta\psi}\gamma_{\alpha\beta}, \tag{۳}$$

که در اینجا تعریف کردیم:

$$\eta=\frac{1}{\sqrt{2\omega+3}}. \tag{۴}$$

حال برحسب متریک پاولی لاگرانژین (۱) را می‌توان به شرح زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} Ldt=&-\frac{\sqrt{g}}{16\pi G}\\ &\times\left\{\Re+\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi+U(\psi)\right\}dt, \end{aligned} \tag{۵}$$

در اینجا داریم:

$$U(\psi)=16\pi Ge^{-2\eta\psi}V(\psi). \tag{۶}$$

در چارچوب اینشتین تنها میدان دایلتونی برانز- دیکی ψ است که با متریک برهم‌کنش ضعیف دارد و میدان‌های مادی معمولی هنوز برهم‌کنش غیرضعیف دارند. این یعنی در چارچوب همدیس اینشتین، میدان دایلتونی هنوز می‌تواند اصل هم ارزی ضعیف را حفظ کند، در حالی‌که در ماده معمولی آن اصل نقض می‌شود.

با وردش گرفتن از لاگرانژین (۵) نسبت به میدان‌های ψ و $g^{\alpha\beta}$، معادلات دینامیکی متناظر با آنها را به ترتیب چنین به دست می‌آوریم:

$$\Box.\psi-\frac{\partial U(\psi)}{\partial\psi}=0, \tag{۷}$$

در اینجا تعریف کردیم $g=\left|Detg_{\alpha\beta}\right|$ و نیز:

$$\Box=\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\alpha\left(\sqrt{g}g^{\alpha\beta}\partial_\beta\right). \tag{۸}$$

همچنین معادله گرانشی عبارت است از:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}=&-\frac{1}{2}\partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi+\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\left(g^{\sigma\rho}\partial_\sigma\psi\partial_\rho\psi\right)\\ &+\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}U(\psi). \end{aligned} \tag{۹}$$

در ادامه بحث به دنبال جواب‌هایی از این سیستم برهم‌کنشی خواهیم بود که کیهان‌شناسی روبرتسون- والکر تخت در یک حوزهٔ لورنتسی را به دست می‌دهند. یک مختصات فضا- زمانی را به صورت $\left\{\beta,x^1,x^2,x^3\right\}$ اختیار می‌کنیم که در آن ابر- سطح تعویض نشان متریک، با معادلهٔ $\beta=0$ داده می‌شود. متریک را برحسب تابع فاکتور مقیاس $\bar{R}(\beta)$ و یک تابع لغزش β به شرح زیر پارامتربندی می‌کنیم:

$$g=-\beta d\beta\otimes d\beta+\bar{R}(\beta)^2dx^i\otimes dx^j, \tag{۱۰}$$

در اینجا داریم $r^2=x^ix^i$ و اختیار می‌کنیم:

$$\psi=\bar{\psi}(\beta). \tag{۱۱}$$

بنابراین بسته به علامت β، هندسه اقلیدوسی و یا لورنتسی است. برای مقدار مثبت β زمان کیهانی t با تابع $t=\frac{2}{3}\beta^{\frac{3}{2}}$ داده می‌شود و در مختصات محلی $\left(t,x^i\right)$ فرض می‌کنیم $R(t)=\bar{R}(\beta)$ و $\psi(t)=\bar{\psi}(\beta)$.

گرچه بهتر است که فرمول‌بندی معادلات دیفرانسیل خود را در یک ناحیه‌ای انجام دهیم که شامل $\beta=0$ نیست، چرا که

جواب‌ها بر روی ابر- سطح $\beta = 0$ دارای یک ناهمواری هستند. اما خواهیم دید که رفتار جواب‌ها در حضور پتانسیل به کار رفته، در هنگام عبور از ناحیه اقلیدوسی به لورنتسی به همراه یک تغییر نشان متریک، هموار خواهند بود. با متریک (۱۰) و میدان اسکالر (۱۱) معادلات (۷) و (۹) منجر به معادلات دیفرانسیل زیر می‌شوند:

$$\ddot{\psi} + \frac{3\dot{R}}{R}\dot{\psi} + \frac{\partial U(\psi)}{\partial \psi} = 0, \tag{۱۲}$$

$$\frac{3\dot{R}^2}{R^2} = \frac{\dot{\psi}^2}{4} + \frac{U(\psi)}{2}, \tag{۱۳}$$

$$2\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{R}}{R}\right) + \frac{3\dot{R}^2}{R^2} = -\frac{\dot{\psi}^2}{4} + \frac{U(\psi)}{2}. \tag{۱۴}$$

در اینجا نقطه به معنی مشتق برحسب زمان کیهانی t است.

باید توجه نمود که سه معادله بالا در کل مستقل از هم نیستند. معادلهٔ (۱۴) می‌تواند از (۱۳) و (۱۲) و با دیفرانسیل‌گیری از (۱۳) به دست آید. این وابستگی درونی معمولاً می‌تواند از بازسازی معادلات بالا از طریق دینامیک لاگرانژی بهره‌برداری شود. با درج (۱۰) و (۱۱) به داخل لاگرانژین (۵) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} L dt = \frac{1}{16\pi G}\Bigg[& 3R^3 \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{R}}{R}\right) + 6R\dot{R}^2 \\ & + R^3 \frac{\dot{\psi}^2}{4} - R^3 \frac{U(\psi)}{2}\Bigg] dt. \end{aligned} \tag{۱۵}$$

این ما را بر می‌انگیزد که معادلات لاگرانژ حاصل از لاگرانژین زیر را بیازماییم:

$$\bar{L} dt = \frac{1}{16\pi G}\left(-3R\dot{R}^2 + R^3\frac{\dot{\psi}^2}{4} - R^3\frac{U(\psi)}{2}\right) dt. \tag{۱۶}$$

در اینجا تفاوت بین لاگرانژین $\bar{L}$ و L در یک جمله با دیورژانس کامل است، که با انتگرال‌گیری کنش برحسب زمان‌های اولیه و نهایی تحول، حذف می‌شود. برحسب یک متغیر تحول γ این لاگرانژین را با کمک تبدیل $t = F(\gamma)$ یعنی $dt = F'(\gamma) d\gamma$ باز نویسی می‌کنیم. به طوری که داریم:

$$\begin{aligned} \bar{L} dt = \tilde{L} d\gamma = \frac{1}{16\pi G}\Bigg[& \frac{1}{F'}\left(-3\bar{R}\bar{R}'^2 + \frac{\bar{\psi}'^2}{4}\bar{R}^3\right) \\ & - \frac{F'\bar{R}^3 U(\bar{\psi})}{2}\Bigg] d\gamma. \end{aligned} \tag{۱۷}$$

معادلات لاگرانژ برای متغیرهای دینامیکی $\bar{R}$ و $\bar{\psi}$ و F به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$-\frac{\bar{R}'^2}{F'} + 2\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{\bar{R}\bar{R}'}{F'}\right) + \frac{1}{4}\frac{\bar{R}'^2\bar{\psi}'^2}{F'} - \frac{F'\bar{R}^2 U(\bar{\psi})}{2} = 0, \tag{۱۸}$$

$$\left(\frac{\bar{R}^3\bar{\psi}'}{F'}\right)' + F'\bar{R}^3\frac{\partial U(\bar{\psi})}{\partial \bar{\psi}} = 0, \tag{۱۹}$$

$$\frac{1}{F'^2}\left\{2\bar{R}\bar{R}'^2 - \frac{\bar{R}^3\bar{\psi}'^2}{4}\right\} - \frac{\bar{R}^3}{2}U(\bar{\psi}) = \text{ثابت}. \tag{۲۰}$$

در طرف راست معادلهٔ (۲۰)، مقدار ثابت انتگرالی است. با انتخاب یک متغیر تحول با شرط $F' = 1$، این معادلات روابط اصلی (۱۲) و (۱۳) و (۱۴) را به دست می‌دهند و بنابراین از اصل بحرانی تقارنی پالاس [۲۷ و ۲۸] پیروی می‌کنند. اگر شرط انرژی صفر را اختیار کنیم. این مستلزم حذف مقدار ثابت در طرف راست معادلهٔ (۲۰) است. واضح است که ریشه این تطبیق مربوط به تمایز بین لاگرانژین‌های L و $\bar{L}$ است.

با استفاده از تبدیلات زیر لاگرانژین (۱۶) و بنابراین تحلیل معادلات دینامیکی بسیار آسان‌تر خواهد شد:

$$X = R^{\frac{3}{2}}\cosh(\kappa\psi), \tag{۲۱}$$

$$Y = R^{\frac{3}{2}}\sinh(\kappa\psi). \tag{۲۲}$$

در اینجا $-\infty < \psi < +\infty$ و $0 \le R < +\infty$ و $\kappa^2 = \frac{3}{16}$ است.

برحسب این متغیرهای جدید داریم:

$$\begin{aligned} -4\kappa^2 \bar{L} dt = & \frac{1}{16\pi G} \\ & \times\left\{\dot{X}^2 - \dot{Y}^2 + 2\kappa^2(X^2 - Y^2)U\left[\psi(X,Y)\right]\right\} dt. \end{aligned} \tag{۲۳}$$

در اینجا $U(\psi)$ یک پتانسیل دلخواه است و از این رو مدل کیهان‌شناسی هنوز خیلی عمومی است.

۳. پتانسیل

حال بعضی گزینه‌های خاص قابل توجه را به منظور دست‌یابی به توابع مناسب هموار $\bar{R}(\beta)$ و $\bar{\psi}(\beta)$ را اختیار می‌کنیم. به علاوه لازم است فرض کنیم که پتانسیل $U(\bar{\psi})$ دارای مشخصه‌های طبیعی برای مقادیر کوچک $\bar{\psi}$ است، به طوری که

ممکن است ضریب جملهٔ $\frac{\psi^{۲}}{۲}$ در بسط تیلور آن به عنوان مقدار مثبت $m^{۲}$ باشد و نیز مقدار $U(۰)$ برابر با یک ثابت کیهانی λ باشد. به جهت یافتن حل‌های تحلیلی معادلات (۱۸) و (۱۹)، کیهان‌شناسی‌های حاصل از مدل‌های ممکن متریک تخت روبرتسون- والکر یک فضا زمان چهار بعدی را اختیار خواهیم نمود. اگر پتانسیل را چنان تعریف کنیم که در شرط زیر صدق کند، در این صورت لاگرانژین مؤثر به طور قابل توجهی ساده خواهد شد. این فرض برای یک پتانسیل عمومی بی نهایت مشتق‌پذیر نمی‌تواند از عمومیت مسئله بکاهد.

$$۲\kappa^{۲}(X^{۲}-Y^{۲})U\left[\psi\left(X,Y\right)\right]=a_{۱}X^{۲}+a_{۲}Y^{۲}+۲bXY\,, \qquad (۲۴)$$

در اینجا $a_{۱}$ و $a_{۲}$ و b پارامتر های ثابت هستند. برای چنین پتانسیلی معادلات دینامیکی X و Y خواهند شد:

$$\ddot{\xi}=M\xi\,, \qquad (۲۵)$$

در اینجا $M=\begin{pmatrix} a_{۱} & b \\ -b & a_{۲}\end{pmatrix}$ و $\xi=\begin{pmatrix} X \\ Y\end{pmatrix}$ است. بر حسب ψ پتانسیل (۲۴) چنین می‌شود:

$$U\left(\psi\right)=\frac{\left(a_{۱}-a_{۲}\right)}{۴\kappa^{۲}}+\frac{\left(a_{۱}+a_{۲}\right)}{۴\kappa^{۲}}\cosh\left(۲\kappa\psi\right)+\frac{b}{۲\kappa^{۲}}\sinh\left(۲\kappa\psi\right). \qquad (۲۶)$$

بر حسب پارامترهای فیزیکی $\lambda=U\left(۰\right)=\frac{a_{۱}}{۲\kappa^{۲}}$ و $m^{۲}=U''\left(۰\right)=a_{۱}+a_{۲}$ داریم:

$$U\left(\psi\right)=\lambda+\frac{m^{۲}}{۲\kappa^{۲}}\sinh^{۲}\left(\kappa\psi\right)+\frac{b}{۲\kappa^{۲}}\sinh\left(۲\kappa\psi\right). \qquad (۲۷)$$

اولین دو جمله در پتانسیل بالا از نوع بر هم کنش ساین- گوردون است. جملهٔ پاد متقارن سوم که متناسب با b است برای دینامیک تغییر نشان متریک بسیار مهم و اساسی است. زیرا که با تعویض $\psi\to-\psi$ تقارن پتانسیل $U\left(\psi\right)$ شکسته می‌شود و مستقیماً برای خواص تغییر نشان متریک حل‌های تحت بررسی، می‌تواند پاسخ‌گو باشد. برای شرایط $\left|\frac{۲b}{m^{۲}}\right|<۱$ پتانسیل دارای یک کمینهٔ $\lambda+\frac{m^{۲}}{۴\kappa^{۲}}\left(\sqrt{۱-\frac{۴b^{۲}}{m^{۴}}}-۱\right)$ در محل $\psi=-\frac{۱}{۲\kappa}\tan^{-۱}\left(\frac{۲b}{m^{۲}}\right)$ است.

۴. حل‌ها

هر چند یافتن حل عمومی معادلهٔ (۲۵) به سهولت می‌تواند انجام شود، اما تنها یک زیر مجموعه از جواب‌ها در معادلات اصلی (۱۲) و (۱۳) و (۱۴) صدق خواهند نمود. بنابراین ثابت‌های انتگرال‌گیری لازم است چنان اختیار شوند که جواب‌ها در شرط انرژی صفر (۲۰) صدق کنند. برحسب متغیر $\xi\left(t\right)$ شرط سازگاری «انرژی صفر» چنین می‌شود:

$$\dot{\xi}^{T}J\dot{\xi}=\xi^{T}JM\xi \qquad (۲۸)$$

در اینجا $J=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱\end{pmatrix}$ است. چون عبارت (۲۰) یک ثابت حرکت را توصیف می‌کند، لذا رابطه (۲۸) لازم است که تنها در یک لحظه خاص t برقرار باشد. از این رو رابطهٔ (۲۵) را با انتخاب یک مد عادی پایه که ماتریس M را قطری می‌کند حل می‌کنیم. بنابراین باید بنویسیم $\xi\left(t\right)=S\delta\left(t\right)$. به طوری که در اینجا داریم:

$$S^{-۱}MS=\cancel{M}=\begin{pmatrix} \lambda_{+} & ۰ \\ ۰ & \lambda_{-}\end{pmatrix}, \qquad (۲۹)$$

و

$$S=\begin{pmatrix} \frac{b}{\sqrt{b^{۲}+\left(\lambda_{+}-a_{۱}\right)^{۲}}} & \frac{b}{\sqrt{b^{۲}+\left(\lambda_{-}-a_{۱}\right)^{۲}}} \\ \frac{\lambda_{+}-a_{۱}}{\sqrt{b^{۲}+\left(\lambda_{+}-a_{۱}\right)^{۲}}} & \frac{\lambda_{-}-a_{۱}}{\sqrt{b^{۲}+\left(\lambda_{-}-a_{۱}\right)^{۲}}}\end{pmatrix}.$$

ماتریس بالا با به کار بردن ویژه بردارهای M و ویژه مقادیر آن به شرح زیر به دست می‌آید:

$$\lambda_{\pm}=\frac{TrM}{۲}\pm\sqrt{\left(\frac{TrM}{۲}\right)^{۲}-\mathrm{Det}M}\,, \qquad (۳۰)$$

و یا

$$\lambda_{\pm}=\frac{۱}{۲}\left(a_{۱}-a_{۲}\pm\sqrt{\left(a_{۱}+a_{۲}\right)^{۲}-۴b^{۲}}\right). \qquad (۳۱)$$

حل عمومی عبارت است از:

$$\delta\left(t\right)=\Lambda_{+}\left(t\right)A+\Lambda_{-}\left(t\right)B\,, \qquad (۳۲)$$

در اینجا داریم:

جدول ۱. ویژه مقادیر برای شرایط فرضی: $\lambda=0$ و $\varepsilon=\left|\frac{b}{m^2}\right|<<1$.

λ_+	λ_-	Σ_1	Σ_2	χ_+	χ_-
$-m^2$	$-m^2\varepsilon^2$	$-\varepsilon$	$-\varepsilon^2$	3.24ε	1.24ε

$$\Lambda_\pm(t)=\begin{pmatrix}\exp\left(\pm t\sqrt{\lambda_+}\right) & 0\\ 0 & \exp\left(\pm t\sqrt{\lambda_-}\right)\end{pmatrix}, \tag{33}$$

و A و B بردارهای ثابت هستند. شرط سازگاری برحسب این حل‌ها از این قرار است:

$$\dot{\delta}^T \not{g}\, \dot{\delta}=\delta^T \not{J}\, \delta . \tag{34}$$

در اینجا تعریف می‌کنیم $\not{g}=S^T JS$ و $\not{J}=S^T JMS$. حل‌هایی را در نظر می‌گیریم که در شرط اولیهٔ $\dot{\delta}(0)=0$ صدق کنند. یعنی $A=B$. این نتیجه ایجاب می‌کند که داشته باشیم:

$$\delta_1(t)=2A_1\cosh\left(t\sqrt{\lambda_+}\right), \tag{35}$$

$$\delta_2(t)=2A_2\cosh\left(t\sqrt{\lambda_-}\right). \tag{36}$$

چنین حل‌هایی تحت تغییر فاز $t\to it$ هنوز حقیقی باقی می‌مانند. این جواب‌ها نامزدهای مناسبی برای تعیین هندسه‌های حقیقی هستند که تغییر نشان متریک را در بر دارند. هر چند تنها ثابت‌های A_1 و A_2 باقی مانده‌اند که از شرط زیر به دست آیند:

$$\delta^T(0)\not{J}\,\delta(0)=0 . \tag{37}$$

این رابطه یک معادلهٔ جبری از مرتبهٔ دوم نسبت به متغیر $x=\frac{A_1}{A_2}$ است که ریشه‌های آن $\chi_\pm$ برحسب پارامترهای فیزیکی λ و m^2 و b به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\chi_\pm=\frac{1}{2}\left[\Sigma_1\pm\sqrt{\Sigma_1^2-4\Sigma_2}\right], \tag{38}$$

در اینجا داریم:

$$\Sigma_1=\sqrt{\frac{b^2+(\lambda_+-a_1)^2}{b^2+(\lambda_--a_1)^2}}\left\{\frac{a_2\left(b^2+a_1^2\right)}{b^2(2\lambda_+-a_1)+a_2(\lambda_+-a_1)^2}\right\},$$

و

$$\Sigma_2=\left(\frac{b^2+(\lambda_+-a_1)^2}{b^2+(\lambda_--a_1)^2}\right)\left\{\frac{b^2(2\lambda_--a_1)+a_2(\lambda_--a_1)^2}{b^2(2\lambda_+-a_1)+a_2(\lambda_+-a_1)^2}\right\}.$$

بدون کاهش از عمومیت مسئله فرض می‌کنیم $A_2=1$ و بنابراین حل‌ها به دو دسته متمایز به شرح زیر منجر می‌گردند.

$$\xi^\pm(t)=S\delta^\pm(t), \tag{39}$$

$$\delta_1^\pm(t)=2A_1^\pm\cosh\left(t\sqrt{\lambda_+}\right), \tag{40}$$

$$\delta_2^\pm(t)=2\cosh\left(t\sqrt{\lambda_-}\right). \tag{41}$$

با فرض $A_2=1$ آنگاه معادلهٔ (۳۹) بر حسب میدان‌های (X,Y) خواهد شد:

$$X_\pm(t)=\frac{2b\chi_\pm\cosh\left(t\sqrt{\lambda_+}\right)}{\sqrt{b^2+(\lambda_+-a_1)^2}}+\frac{2b\cosh\left(t\sqrt{\lambda_-}\right)}{\sqrt{b^2+(\lambda_--a_1)^2}}, \tag{42}$$

$$Y_\pm(t)=\frac{2(\lambda_+-a_1)\chi_\pm\cosh\left(t\sqrt{\lambda_+}\right)}{\sqrt{b^2+(\lambda_+-a_1)^2}}+\frac{2(\lambda_--a_1)\cosh\left(t\sqrt{\lambda_-}\right)}{\sqrt{b^2+(\lambda_--a_1)^2}}. \tag{43}$$

در پایان میدان‌های فاکتور مقیاس $R(t)$ و میدان دایلتونی برانز- دیکی $\psi(t)$ را از روی جواب‌های (۴۲) و (۴۳) به شرح زیر می‌توانیم بازسازی کنیم:

$$R(t)=\left(X^2-Y^2\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{44}$$

و

$$\psi(t)=\frac{1}{\kappa}\tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right). \tag{45}$$

در اینجا جواب‌های حقیقی برای این میدان‌ها به دست می‌آیند. با فرض اینکه $\lambda=0$ و $\varepsilon=\left|\frac{b}{m^2}\right|<<1$ مقادیر پارامترهای مسئلهٔ مورد بحث مطابق با جدول ۱ به دست می‌آیند.

برای مقادیر مفروض در جدول ۱ داریم:

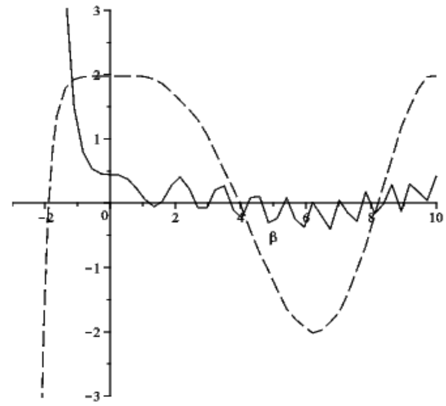
$$X_+(t)=6.48\varepsilon^2\cos mt+2\cos m\varepsilon t, \tag{46}$$

$$Y_+(t)=-6.44\varepsilon\cos mt-2\varepsilon\cos m\varepsilon t, \tag{47}$$

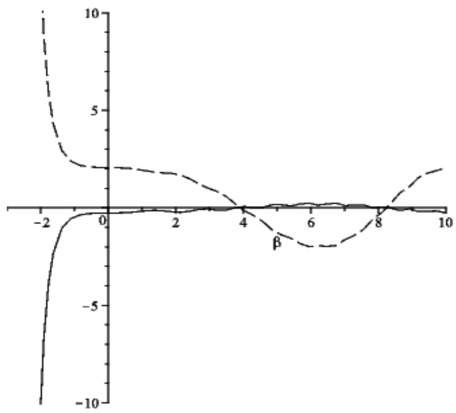
$$X_-(t)=-2.48\varepsilon^2\cos mt+2\cos m\varepsilon t, \tag{48}$$

$$Y_-(t)=2.44\varepsilon\cos mt+2\varepsilon\cos m\varepsilon t . \tag{49}$$

واضح است که اگر پارامترها در شرط $U=\frac{\partial U}{\partial\psi}=0$ صدق کنند آنگاه R و ψ ثابت خواهند بود و در نتیجه برای ماتریس M ویژه مقادیر تبهگن را به دست می‌آوریم. برای چنین

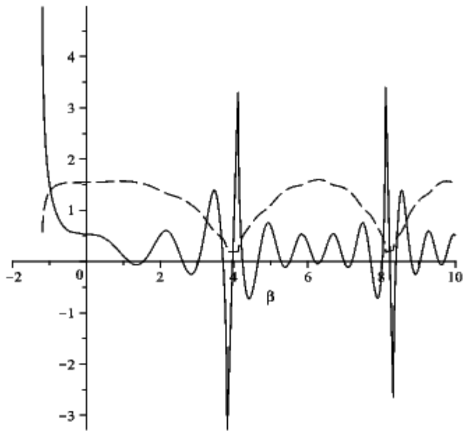


شکل ۱. تغییرات X_- (منحنی خط- چین) و تغییرات Y_- (منحنی خط پر) نسبت به β برای مقادیر عددی $\varepsilon = ۰/۱\left(b = ۰/۹\right)$ و $\lambda = ۰$ و $m = ۳$.

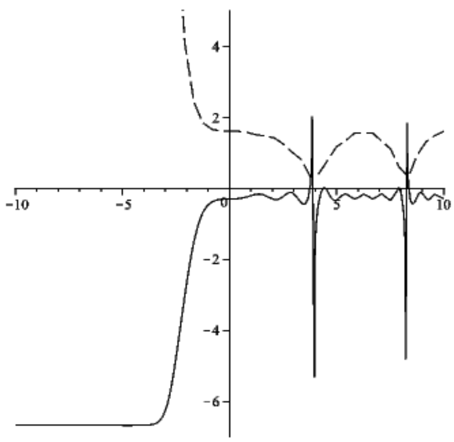


شکل ۲. تغییرات X_+ (منحنی خط-چین) و تغییرات Y_+ (منحنی خط پر) نسبت به β برای مقادیر عددی $\varepsilon = ۰/۱\left(b = ۰/۹\right)$ و $\lambda = ۰$ و $m = ۳$.

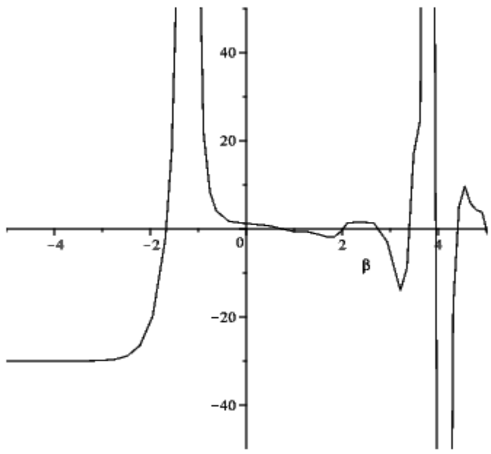
پارامترهایی مدل کیهان‌شناختی به دست آمده منجر به متریک تخت مینکوفسکی، می‌گردند و لذا آن را کنار می‌گذاریم. زیرا که مدل مناسبی برای یک جهان دینامیکی محسوب نمی‌شود. هر چند که در این وضعیت نیز هنوز یک تغییر نشان متریک در $\beta = ۰$ از حوزهٔ اقلیدوسی به لورنتسی اتفاق می‌افتد. برای مقادیر دیگر از پارامترهای فیزیکی نظریه، یعنی λ و $m^۲$ و b سیماهای کلی یک حل از معادلات دینامیکی بهترین حالت برای تحلیل رفتار متغیرهای $X\left(\beta\right)$ و $Y\left(\beta\right)$ هستند. مقادیری از β که در آن شرط $X = \pm Y$ بر قرار است، محل نقاط شاخه‌ای فاکتور مقیاس $R\left(\beta\right)$ را نشان می‌دهند. تکینگی‌های تابع $Y\left(\beta\right)$ محل تکینگی‌های میدان $\psi\left(\beta\right)$ را نشان می‌دهند (شکل‌های ۱و۲ را ببینید). اگر هر دو ویژه مقادیر ماتریس M مثبت باشند، هیچ تغییر نشان متریک از اقلیدوسی به لورنتسی اتفاق نمی‌افتد. زیرا که جواب‌ها از زمان $\beta = ۰$ عبور نمی‌کنند. اگر حاصل ضرب دو ویژه مقدار λ_+ و λ_- کمتر از صفر باشند، آن گاه پیدا می‌کنیم که شرط (۳۷) نمی‌تواند برای دامنهٔ x مقداری حقیقی به دست دهد. تنها حالت باقی مانده آن است که هر دو این ویژه مقادیر منفی باشند. دراین حالت جواب‌های $X\left(\beta\right)$ و $Y\left(\beta\right)$ برای زمان‌های $\beta > ۰$ نوسانات کوچک پایدار دارند و برای زمان‌های $\beta < ۰$ واگرا هستند (شکل‌های ۱و۲ را ببینید). چنین رفتارهایی در شکل‌های ۳ و ۴ برای توابع $R\left(\beta\right)$ و $\psi\left(\beta\right)$ مشاهده می‌شود. بنابراین ممکن است که با انتخاب مناسب پارامترها شرایطی را پیدا نمود که در آن متریک برای زمان‌های محدود منفی $\beta < ۰$ دارای نشان اقلیدوسی (++++) و برای زمان‌های بسیار طولانی دارای نشان لورنتسی (+++-) باشد. این وضعیت ایجاب می‌کند که متریک در زمان $\beta = ۰$ علامت خود را به طور پیوسته از حوزه اقلیدوسی به حوزه لورنتسی تغییر حالت دهد. رفتار برای مقادیر انتخابی عددی $\varepsilon = ۰/۱\left(b = ۰/۹\right)$ و $\lambda = ۰$ و $m = ۳$ در نمودارهای ۱ الی ۶ نشان داده شده‌اند. چنان که نمودارهای ۳ و ۴ نشان می‌دهند جهان در هنگام تغییر نشان متریک و رفتن از فاز اقلیدوسی به لورنتسی دارای مقیاسی غیر صفر است. بنابراین به نظر می‌رسد که رفتار پتانسیل به کار برده شده در این مقاله بسیار قابل توجه است و ارزش مطالعه بیشتر را می‌طلبد. در این مقاله برای یک جهان تخت روبرتسون- والکر جواب‌های تحلیلی به دست آوردیم. هر چند به عنوان کار بعدی می‌توان الگوی به کار بسته شده در این مقاله را برای جهان روبرتسون- والکر غیر تخت هم به کار برد. انتظار می‌رود که وقتی به کمک روش عددی معادلات دینامیکی حل می‌شوند نتایجی مشابه به دست آید. به عنوان یک پیشنهاد می‌توان موضوع را با به کار بستن پتانسیل‌های مختلف



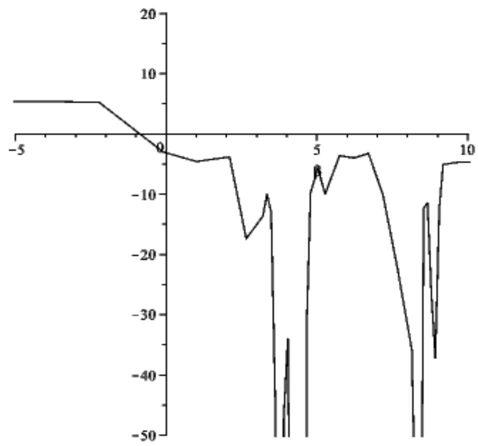
شکل ۳. تغییرات $\bar{\psi}\left(X_-,Y_-\right)$ (منحنی خط پر) و تغییرات $\bar{R}\left(X_-,Y_-\right)$ (منحنی خط چین) نسبت به β برای مقادیر عددی $\varepsilon = ۰/۱\left(b = ۰/۹\right)$ و $\lambda = ۰$ و $m = ۳$.



شکل ۴. تغییرات $\bar{\psi}\left(X_+,Y_+\right)$ (منحنی خط پر) و تغییرات $\bar{R}\left(X_+,Y_+\right)$ (منحنی خط چین) نسبت به β برای مقادیر عددی $\varepsilon = ۰/۱\left(b = ۰/۹\right)$ و $\lambda = ۰$ و $m = ۳$.



شکل ۵. تغییرات اسکار انحنا (ریچی) $\bar{\Re}\left(X_-,Y_-\right)$ نسبت به β برای مقادیر عددی $\varepsilon = ۰/۱\left(b = ۰/۹\right)$ و $\lambda = ۰$ و $m = ۳$.



شکل ۶. تغییرات اسکار انحنا (ریچی) $\bar{\Re}\left(X_+,Y_+\right)$ نسبت به β برای مقادیر عددی $\varepsilon = ۰/۱\left(b = ۰/۹\right)$ و $\lambda = ۰$ و $m = ۳$.

مثلاً پتانسیل‌های توانی و نمایی که در مسئلهٔ تورم کیهان‌شناسی آشوبناک بسیار مهم هستند، تکرار نمود و مسئلهٔ تغییر نشان متریک را جستجو کرد. همچنین از شکل‌های ۵ و ۶ مشاهده می‌گردد که رفتار تکین میدان دایلتونی برانز- دیکی در زمان خلق (شکل ۵) و نابودی جهان (شکل ۶) در رفتار منحنی‌های اسکالر انحنا (اسکار ریچی) نمایان می‌شود. همچنین از این منحنی‌ها چنین استنباط می‌گردد که در زمان انتقال نشان متریک $\beta = ۰$، رفتار اسکالر انحنا تغییرات آرام (تقریباً خط صاف) دارد. یعنی اینکه در هنگام تغییر علامت متریک، بر روی ابر- سطح تغییر علامت متریک $\beta = ۰$ رفتار انحناء جهان تقریباً تخت است.

۵. نتیجه‌گیري

جواب‌های تحلیلی برای یک دسته از متریک‌های تبهگن از نظریهٔ گرانشی برانز- دیکی تحت پتانسیل پاد متقارن خود برهم‌کنشی برانز- دیکی شامل جمله ساین- گوردن را در چارچوب مرجع مرحج اینشتین به دست آوردیم. در این چارچوب خاص، برهم‌کنش میدان برانزن- دیکی با متریک ضعیف است و لذا اصل هم ارزی ضعیف هنوز برقرار است. متریک زمینه را متریک روبرتسون- والکر تخت در یک فضا

زمان چهار بعدی اختیار کردیم. هر جواب به دست آمده هندسه‌ای را توصیف می‌کند که در آن تانسور متریک به صورت هموار یک تغییر نشان متریک را از حالت اقلیدوسی به لورنتسی نشان می‌دهد. آغاز حوزهٔ اقلیدوسی جهان (با مقیاس کراندار غیر صفر) تحت شرایط اولیهٔ معین با یک رفتار تکین از میدان برانز- دیکی دایلتونی انجام می‌شود (شکل ۳). به ویژه نتایج این مقاله نشان می‌دهند که چارچوب مرجع اینشتین نسبت به چارچوب مرجع همدیس جوردن دارای این برتری است که مطابق با ایده اشاره شده در مرجع [۲۳] میدان برانز- دیکی می‌تواند حاصل از نیروی پنجم باشد که در کیهان‌شناسی با ابعاد بالاتر از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. بنابراین در نگاه اخیر می‌توان ادعا نمود که این نیروی غیرمادی که منشا آن از ابعاد بالاتر فضا- زمان می‌آید در غیاب ماده معمولی می‌تواند نقش بسیار لازم و حیاتی در جهت پدیده تغییر نشان متریک از حوزه اقلیدوسی به لورنتسی را داشته باشد.

مراجع

1. J Alfaro, H Morales-Tecotl, and L Urrutia, *hep-th*/0108061.
2. V A Kostelecky and S Smauel, *Phys. Rev.* D **39** (1989) 683.
3. S Coleman and S Glawshow, *Phys. Rev.* D **59** (1999) 116008.
4. T Jaconson and D Mattingly, *Phys. Rev.* D **64** (2001) 024028.
5. T Jacobson, S Liberti, and D Mattingly, *gr-qc*/0303001.
6. D Mattingly and T Jacobson, *gr-qc*/0112012.
7. J F Barbero G and E D J S Villasenor, *Phys. Rev.* D **68** (2003) 087501.
8. J F Barbero, *Phys. Rev.* D **54** (1996) 1492.
9. H Ghaffarnejad, *Gen. Relativ. Gravit.* **40** (2008) 2229.
10. H Ghaffarnejad, *Gen. Relativ Gravit.* **27** (2009) 2941.
11. H Ghaffarnejad, *Class. Quantum Grav.* **27** (2010) 015008.
12. A D Sakharov, *Sov. Phys. JETP* **60** (1984) 214.
13. Ellis G F R, *Gen. Relativ. Gravit.* **24** (1992) 1047.
14. G F R Ellis A Sumruk, D Coule, and C Hellaby, *Class. Quantum Grav.* **9** (1992) 1535.
15. S A Hayward, *Class. Quantum Grav.* **9** (1992) 1851.
16. A Vilenkin, *Phys. Lett.* B **117** (1982) 25.
17. A Vilenkin, *Phys. Rev.* D **27** (1983) 2848.
18. A Vilenkin, *Phys. Rev.* D **33** (1986) 3560.
19. T Dereli and R W Tucker, *Class. Quantum Grav.* **10** (1993) 365.
20. C Brans and R Dicke, *Phys. Rev.* **124** (1961) 921.
21. R Dicke, *Phys. Rev.* **125** (1962) 2163.
22. C M Will, *arXiv:gr-qc/*9811036.
23. Y M Cho, *Class. Quantum Grav.* **10** (1997) 2963.
24. Y M Cho, *Phys. Rev. Lett.* **63** (1992) 3133.
25. P Jordan, *Ann.Phys.* (*Leipzig*) **1** (1947) 218.
26. M Fierz, *Helv. Phys. Acta.* **29** (1956) 128.
27. M E Fels and C G Torre, *Comm. Math. Phys.* **69** (2001) 19.
28. I M Anderson, M E Fels, and C G Torre, *arXiv:Math-ph/*9910014.