مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۴، شمارهٔ ۴، زمستان ۱۳۹۳

بررسی درهم‌تنیدگی و انتقال از دور حالت‌های همدوس دوتایی درهم‌تنیدهٔ نوسانگر هماهنگ

اردشیر رابعی، اردلان فتاحی زاده

دانشکدهٔ علوم، دانشگاه رازی، باغ ابریشم، کرمانشاه

پست الکترونیکی: rabeie@razi.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۳/۱۸ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۳/۵/۲۶)

چکیده

در این مقاله حالت‌های همدوس درهم‌تنیدهٔ دوتایی نوسانگر هماهنگ را با استفاده از رونوشت حالت‌های همدوس نوسانگر هماهنگ ایجاد می‌نماییم. نشان خواهیم داد که اگر این حالت‌های درهم‌تنیده، درمحیط خلاء جاسازی شود، درهم‌تنیدگی آنها کاهش می‌یابد، اما نه به طور کامل. همچنین به منظور بررسی ترارسانی، هماندهی مطلوب این حالت‌ها را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: حالت‌های همدوس، درهم‌تنیدگی کوانتومی، ترارسانی کوانتومی

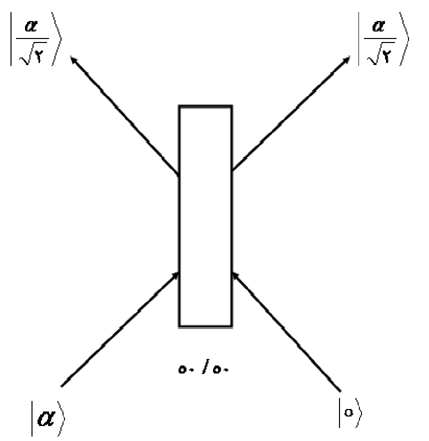
۱. مقدمه

در این مقاله به بررسی درهم‌تنیدگی[۱] و ترارسانی[۲] حالت‌های همدوس دوتایی درهم‌تنیدهٔ نوسانگر هماهنگ خواهیم پرداخت. انگیزهٔ بررسی حالت‌های همدوس[۳] این است که این حالت‌ها بسادگی ایجاد می‌شوند و برای استفاده مطمئن هستند [۱ و ۲].

درهم‌تنیدگی کوانتومی یک پدیدهٔ مکانیک کوانتومی بدون تفسیر کلاسیکی است که حالت‌های کوانتومی دو یا چند دستگاه، مجبورند با ارجاع به یکدیگر توصیف شوند، حتی اگر دستگاه‌های منفرد، جداشده باشند [۳]. درهم‌تنیدگی کوانتومی فهم پردازش اطلاعات کوانتومی شامل انتقال از دور، رمزنگاری[۴] ومحاسبات کوانتومی[۵] را ممکن می‌سازد [۴و۵]. حالت‌های همدوس درهم‌تنیده بعنوان منبع در ترارسانی کوانتومی یا در شبکه‌های کوانتومی استفاده می‌شوند [۶] .

در این کار در بخش اول، مروری کوتاه بر نسخه‌برداری ناقص حالت‌های همدوس خواهیم داشت. سپس در بخش دوم حالت‌های همدوس درهم‌تنیدهٔ دوتایی نوسانگر هماهنگ را با استفاده از رونوشت ناقص[۶] حالت‌های همدوس نوسانگر هماهنگ

۱. Entanglement
۲.Teleportation
۳.Coherent states
۴.Quantum cryptgraphy
۵.Quantum computation
۶.Imperfect cloning



شکل ۱. شکافندهٔ پرتوی ۵۰٫۵۰ که در یک روش خطی دو میدان ورودی را به دو میدان خروجی تبدیل می‌کند .

ایجاد می‌نماییم. در بخش سوم نابودی کانال بعنوان اندازه‌ای از درهم‌تنیدگی را بررسی خواهیم کرد، و نشان خواهیم داد که اگر حالت‌های درهم‌تنیدهٔ بیان شده در بخش دوم در محیط خلأ جاسازی شوند، درهم‌تنیدگی آنها کاهش می‌یابد، اما نه به طور کامل. در بخش آخر ترارسانی با یک کانال آمیخته[1] را ارزیابی می‌کنیم، و نشان خواهیم داد که حالت‌های همدوس درهم‌تنیدهٔ دوتایی نوسانگر هماهنگ ایجاد شده، همانندهی مطلوبی[2] که بزرگ‌تر از حدکلاسیکی $\frac{2}{3}$ است را به ما خواهد داد، که برای ترارسانی کوانتومی مناسب می‌باشند.

۲.رونوشت ناقص حالت‌های همدوس

در مرجع [۷] نشان داده شده است که می‌توان حالت‌های همدوس نوسانگر هماهنگ $|\alpha\rangle$ با دامنهٔ α را به طور ناقص نسخه‌برداری کرد:

$$|\alpha\rangle\otimes|0\rangle \to \left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle\otimes\left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle, \qquad (1)$$

که در آن $|0\rangle$ خلاء بهنجار شده است. اگر دوحالت همدوس $|\alpha\rangle$ و $|0\rangle$ وارد شکافندهٔ پرتوی ۵۰/۵۰ متعادل شده در شکل ۱ شوند، حالت‌های خروجی $\left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle$ و $\left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle$ را خواهیم داشت.

1.Mixed channel
2.Optimal fidelity

حال اگر دوباره دو حالت خروجی $\left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle$ و $\left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle$ وارد شکافندهٔ پرتوی ۵۰/۵۰ متعادل شدهٔ دیگری شوند، دو حالت همدوس $|\alpha\rangle$ و $|0\rangle$ اولیه، حالت‌های خروجی جدید خواهند بود، بدون این که حالت‌های اولیه مختل شده باشند. این مختل نشدن حالت‌ها نشان‌دهندهٔ جنبهٔ غیرتخریبی حالت‌های همدوس است .

۳. حالت‌های همدوس درهم‌تنیدهٔ نوسانگر هماهنگ

با استفاده از رونوشت ناقص حالت‌های همدوس برای حالت $|Q_\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}(|-\alpha\rangle \pm |\alpha\rangle)$ که N ضریب بهنجارش و $|\alpha\rangle$ و $|-\alpha\rangle$ دو حالت همدوس نوسانگر هماهنگ با دامنه‌های α و $-\alpha$ هستند، داریم:

$$|Q_\alpha\rangle\otimes|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\big(|-\alpha\rangle \pm |\alpha\rangle\big)\otimes|0\rangle$$
$$\to \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\left|-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle\left|-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle \pm \left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle\left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle\right). \qquad (2)$$

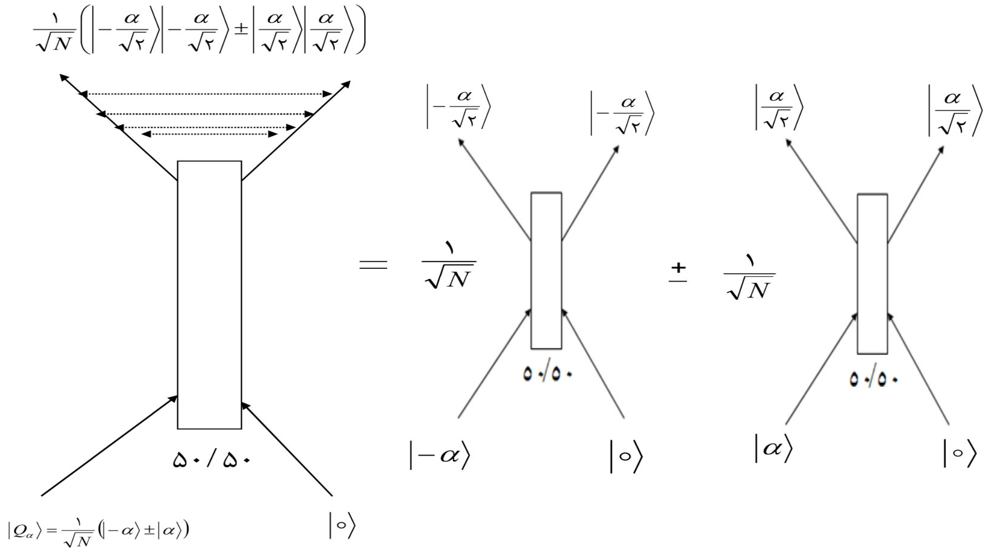
این دو حالت، حالت‌های همدوس درهم‌تنیدهٔ نوسانگر هماهنگ هستند. اگر دو حالت همدوس $|Q_\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\big(|-\alpha\rangle \pm |\alpha\rangle\big)$ و $|0\rangle$ وارد شکافندهٔ پرتوی ۵۰/۵۰ متعادل شده، مطابق شکل ۱ شوند، حالت‌های خروجی بصورت زیر خواهند بود:

۴. نابودی کانال اندازه‌ای از درهم‌تنیدگی

زمانی که کانال درهم‌تنیدهٔ $|\zeta\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\left|-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle\left|-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle + \left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle\left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle\right)$ درمحیط خلأ جاسازی[3] می‌شود، کانال‌ها نامرتبط می‌شوند و هر کدام یک حالت آمیخته با عملگر چگالی $\rho(\tau)$ (τ زمان نا ارتباطی[4] را بیان می‌کند) می‌شود. برای دانستن وابستگی زمانی $\rho(\tau)$ باید معادلهٔ اصلی زیر را حل کنیم [۸]:

$$\hat{L}_\rho = -\sum_i \frac{\gamma}{2}(a_i^\dagger a\rho + \rho a_i^\dagger a) \quad , \qquad (3)$$
$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} = \hat{J}_\rho + \hat{L}_\rho \ , \qquad \hat{J}_\rho = \gamma\sum a_i\,\rho a_i^\dagger \ ,$$

3.Embedded
4.Decoherence time



شکل ۲. شکافندهٔ پرتوی ۵۰/۵۰ متعادل شده: اثر ساده بر روی حالت‌های همدوس حالت‌های همدوس برهم‌نهیده: درهم‌تنیدگی دربین مدهای خروجی.

که در آن γ نرخ نابودی انرژی است. حل این معادله بصورت زیر می‌باشد:

$$\rho(\tau)=e^{\left[(\hat{J}_\rho+\hat{L}_\rho)\tau\right]}\rho(\circ)\ , \qquad (۴)$$

که در آن:

$$e^{\left[(\hat{J}_\rho+\hat{L}_\rho)\tau\right]}|\alpha\rangle\langle\beta|=\langle\beta|\alpha\rangle^{۱-t^{۲}}|\alpha t\rangle\langle\beta t|\ . \qquad (۵)$$

و داریم $t=e^{-(\frac{۱}{۲})\gamma\tau}$. برای قسمت‌های بعدی، زمان برهم کنش بهنجار $x=\sqrt{۱-t^{۲}}$ را معرفی می‌کنیم. با استفاده ازحل رابطهٔ (۳) برای کانال درهم‌تنیدهٔ $|\zeta\rangle=\frac{۱}{\sqrt{N}}\left(\left|-\frac{\alpha}{\sqrt{۲}}\right\rangle\left|-\frac{\alpha}{\sqrt{۲}}\right\rangle+\left|\frac{\alpha}{\sqrt{۲}}\right\rangle\left|\frac{\alpha}{\sqrt{۲}}\right\rangle\right)$، $\rho^{\zeta}(\tau)$ را محاسبهٔ کردیم که بصورت زیر درآمد:

$$\begin{aligned}\rho^{\zeta}(\tau)=\frac{۱}{N}\Bigg[&\left|-\frac{t\alpha}{\sqrt{۲}}\right\rangle\left|-\frac{t\alpha}{\sqrt{۲}}\right\rangle\left\langle-\frac{t\alpha}{\sqrt{۲}}\right|\left\langle-\frac{t\alpha}{\sqrt{۲}}\right|\\&+e^{-۲\alpha^{۲}x^{۲}}\left|\frac{t\alpha}{\sqrt{۲}}\right\rangle\left|\frac{t\alpha}{\sqrt{۲}}\right\rangle\left\langle-\frac{t\alpha}{\sqrt{۲}}\right|\left\langle-\frac{t\alpha}{\sqrt{۲}}\right|\\&+\left|\frac{t\alpha}{\sqrt{۲}}\right\rangle\left|\frac{t\alpha}{\sqrt{۲}}\right\rangle\left\langle\frac{t\alpha}{\sqrt{۲}}\right|\left\langle\frac{t\alpha}{\sqrt{۲}}\right|\\&+e^{-۲\alpha^{۲}x^{۲}}\left|-\frac{t\alpha}{\sqrt{۲}}\right\rangle\left|-\frac{t\alpha}{\sqrt{۲}}\right\rangle\left\langle\frac{t\alpha}{\sqrt{۲}}\right|\left\langle\frac{t\alpha}{\sqrt{۲}}\right|\Bigg],\end{aligned} \qquad (۶)$$

وابستگی زمانی پایه‌های متعامد را همانند مرجع [۹] ، بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|\Psi_{+}(\tau)\rangle=\frac{۱}{\sqrt{N_\Theta}}\left(\cos(\Theta)\left|\frac{t\alpha}{\sqrt{۲}}\right\rangle-\sin(\Theta)\left|-\frac{t\alpha}{\sqrt{۲}}\right\rangle\right), \qquad (۷)$$

$$|\Psi_{-}(\tau)\rangle=\frac{۱}{\sqrt{N_\Theta}}\left(-\sin(\Theta)\left|\frac{t\alpha}{\sqrt{۲}}\right\rangle+\cos(\Theta)\left|-\frac{t\alpha}{\sqrt{۲}}\right\rangle\right), \qquad (۸)$$

که:

$$N_\Theta=\cos^{۲}(۲\Theta) \quad , \quad \sin(۲\Theta)=\exp\left(-t^{۲}\alpha^{۲}\right) \qquad (۹)$$

با استفاده از رابطه‌های (۷) و (۸) می‌توان عبارات زیر را برای بیان $\rho^{\zeta}(\tau)$ برحسب پایه‌های متعامد بدست آورد:

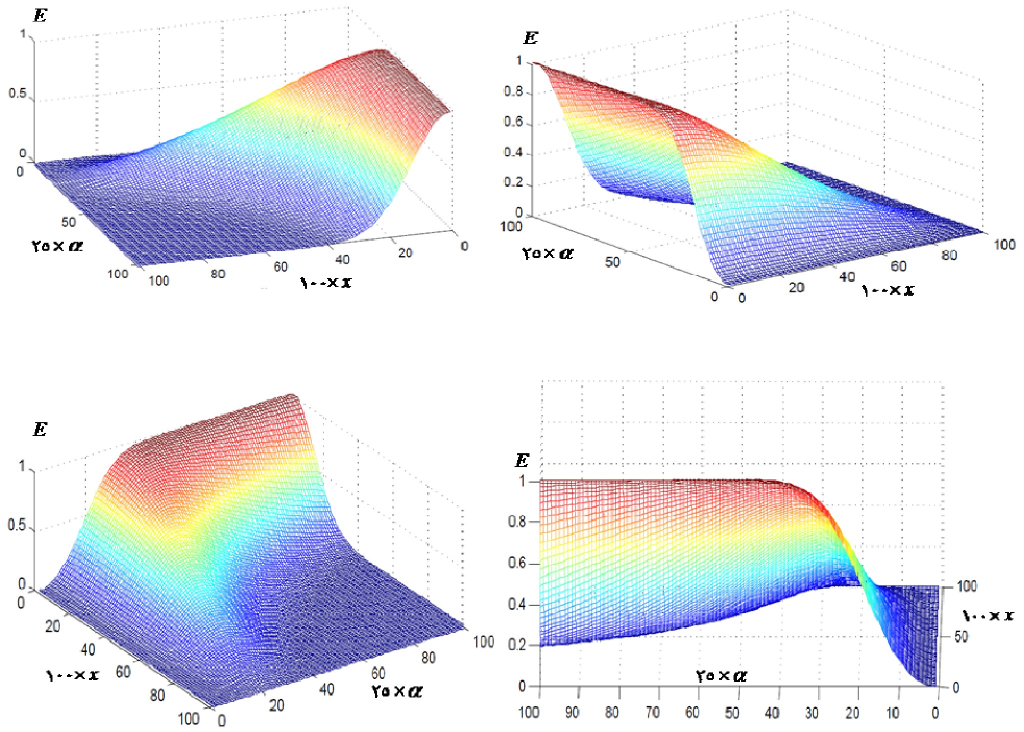
$$\left|\frac{t\alpha}{\sqrt{۲}}\right\rangle=\cos(\Theta)|\Psi_{+}(\tau)\rangle+\sin(\Theta)|\Psi_{-}(\tau)\rangle, \qquad (۱۰)$$

$$\left|-\frac{t\alpha}{\sqrt{۲}}\right\rangle=\sin(\Theta)|\Psi_{+}(\tau)\rangle+\cos(\Theta)|\Psi_{-}(\tau)\rangle, \qquad (۱۱)$$

شرط لازم و کافی جداپذیر بودن دستگاه دوقسمتی دوبعدی، مثبت بودن انتقالات پاره‌ای ماتریس چگالی $\rho^{T_{۲}}$ است [۸]، یعنی انتقالات پاره‌ای ماتریس چگالی ρ را در نظر بگیرید. ماتریس چگالی ρ جدای نشدنی است، اگر $\rho^{T_{۲}}$ یک یا چند ویژه مقدار منفی داشته باشد [۱۰]. اندازهٔ درهم‌تنیدگی E بصورت زیر تعریف می‌شود [۹]:

$$E=-۲\sum_i\lambda_i^{-}\ , \qquad (۱۲)$$

که در آن λ_i^{-} یک یا چند ویژه مقدار منفی $\rho^{T_{۲}}$ هستند و $۱\leq E\leq\circ$. با استفاده از رابطه‌های (۶)، (۱۰) و (۱۱) می‌توان



شکل ۳. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار اندازهٔ درهم‌تنیدگی E برحسب زمان بهنجارش x و دامنهٔ $0 \le \alpha \le 4$ (نمودار در چهار زاویهٔ مختلف نشان داده شده است).

$\rho^{\zeta}(\tau)$ را بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$\rho^{\zeta}(\tau)=\begin{pmatrix} A & B & B & C\\ B & D & D & B\\ B & D & D & B\\ C & B & B & A\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \left(\rho^{\zeta}(\tau)\right)^{T_2}=\begin{pmatrix} A & B & B & D\\ B & D & C & B\\ B & C & D & B\\ D & B & B & A\end{pmatrix} \qquad (13)$$

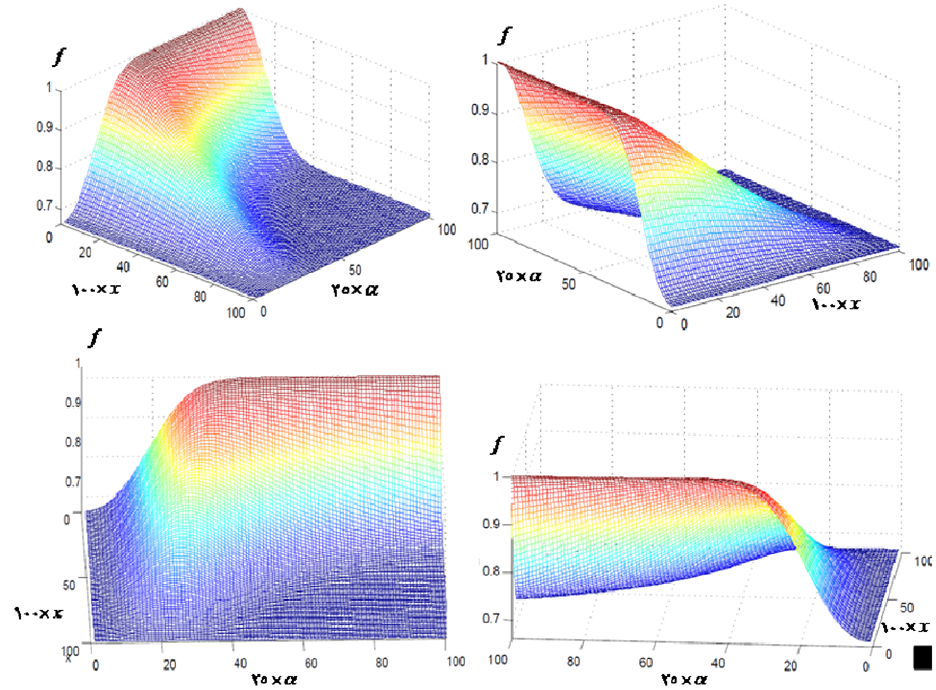
داریم:

$$N=2\left(1+e^{-2\alpha^2}\right),$$
$$\sin(\Theta)=\sqrt{\frac{1-(1-e^{-2t^2\alpha^2})^{\frac{1}{2}}}{2}},$$
$$\cos(\Theta)=\sqrt{\frac{1+(1-e^{-2t^2\alpha^2})^{\frac{1}{2}}}{2}},$$
$$A=\frac{\left(\cos^4(\Theta)+\sin^4(\Theta)+2\cos^2(\Theta)\sin^2(\Theta)e^{-2\alpha^2x^2}\right)}{N},$$
$$B=\frac{\left(\cos^3(\Theta)\sin(\Theta)+\cos(\Theta)\sin^3(\Theta)\right)\left(1+e^{-2\alpha^2x^2}\right)}{N},$$
$$C=\frac{\left(\left(\cos^4(\Theta)+\sin^4(\Theta)\right)e^{-2\alpha^2x^2}+2\cos^2(\Theta)\sin^2(\Theta)\right)}{N},$$
$$D=\frac{2\cos^2(\Theta)\sin^2(\Theta)\left(1+e^{-2\alpha^2x^2}\right)}{N}, \qquad (14)$$

اندازه‌ای از درهم‌تنیدگی با وابستگی زمانی هم به صورت زیر خواهد شد:

$$E=-2\left(D-C\right) \qquad (15)$$

همان طور که از نمودار شکل ۳ (نموداری است که در چهار زاویهٔ مختلف نشان داده شده است) آشکار است، در زمان اولیهٔ حالت $|\zeta\rangle$، با افزایش دامنه در بازهٔ $0 \le \alpha \le 4$، درهم‌تنیدگی آن افزایش می‌یابد و با بزرگ‌تر شدن بیشتر دامنه، حالت درهم‌تنیدگی بیشینه دارد $(E(\tau=0)=1)$. حالت آمیختهٔ $\rho^{\zeta}(\tau)$ در همهٔ زمان‌های برهمکنش $\tau<\infty$ و برای همهٔ دامنه‌ها در بازهٔ $0 \le \alpha \le 4$، درهم‌تنیده باقی می‌ماند.



شکل ۴. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار همانده‌ی مطلوب $f(\rho^{\zeta}(\tau))$ برحسب زمان بهنجارش x و دامنۀ $۰ \leq \alpha \leq ۴$ (نمودار در چهار زاویۀ مختلف نشان داده شده است).

۵. بررسی انتقال از دور با یک کانال آمیخته

همانـدهی مطلـوب ترارسـانی دریـک طـرح کلـی بـه وسـیلۀ نگهدارنـدۀ رد[۱] عملگرهـای کوانتـومی جایگزیـده و ارتباطـات کلاسیکی با یک کانال با نسبتی بیشینه از کانال بصورت زیر بیان می‌شود [۹و۱۱]:

$$f(\rho)=\frac{F(\rho)N'+۱}{N'+۱}\,, \qquad (۱۶)$$

که در آن $f(\rho)$ همانـدهی مطلوب بـرای کانـال کوانتـومی ρ، $F(\rho)$ نسـبت بیشـینۀ از کانـال و N' بعـد فضـای هیلبـرت $C^{N'}\otimes C^{N'}$ مربوطه اسـت. $F(\rho)$ بصـورت $\max\langle\varphi|\rho|\varphi\rangle$ تعریف می‌شود که بیشینه از میان همۀ حالـت‌هـای درهـم‌تنیـدۀ بیشینۀ $N'\times N'$ است .

هـر کانـال ۲×۲، زمـانی‌کـه همانـدهی مطلـوب $f(\rho)$ کوچک‌تر از حد کلاسـیکی ۲/۳ اسـت ($F(\rho)\leq ۱/۲$)، بـرای ترارسانی کوانتومی بی‌فایده می‌شـود. همانـدهی مطلـوب بـرای کانال کوانتومی $\rho^{\zeta}(\tau)$ به صورت زیر است:

$$f(\rho^{\zeta}(\tau))=\frac{۲(A+C)+۱}{۳}\,. \qquad (۱۷)$$

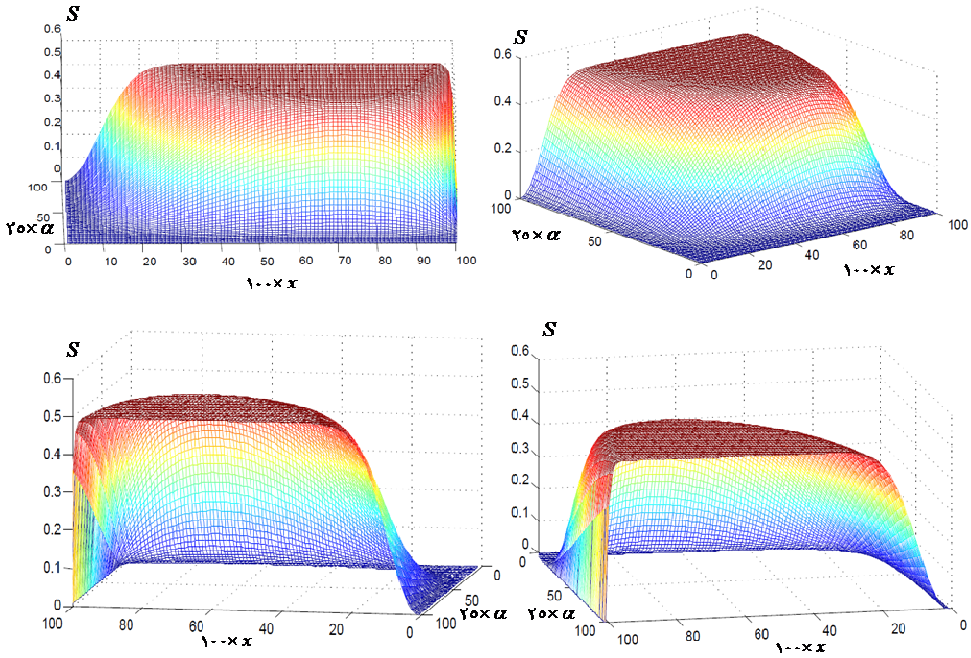
همـان طـور کـه از نمـودار شـکل ۴ آشـکار اسـت، همانـدهی مطلـوب $f(\rho^{\zeta}(\tau))$ بـرای کانـال کوانتـومی $\rho^{\zeta}(\tau)$ در همـۀ زمانهـای بـرهمکنش $\tau<\infty$ و بـرای همـۀ دامنـه هـا در بـازۀ $۰\leq\alpha\leq۴$، بزرگ‌تر از حدکلاسیکی $\frac{۲}{۳}$ است و برای انتقـال از دور کوانتومی مناسب است .

بوس و ودرال فهمیدند که نـه تنهـا درهـم‌تنیـدگی ، بلکـه آمیختگی کانال‌های کوانتومی روی ترارسانی کوانتومی تاثیر دارد [۱۲]. آمیختگـی یـک حالـت ρ بـه وسـیلۀ آنتروپـی خطـی $S(\rho)=۱-Tr(\rho^{۲})$ مـی‌توانـد کوانتیـده شـود. بـرای کانـال همدوس درهم‌تنیده داریم:

$$S(\rho^{\zeta}(\tau))=۱-۲\left(A^{۲}+۴B^{۲}+C^{۲}+۲D^{۲}\right)\,, \qquad (۱۸)$$

همان طور که از نمودار بالا آشکار است در ابتدا کانال آمیختگی کمتری دارد و سپس آمیختگی آن افزایش مـی‌یابـد درحـالی‌کـه هرچه دامنـۀ آن در بـازۀ $۰\leq\alpha\leq۴$، بزرگتـر باشـد، آمیختگـی بیشتری دارد، که سریعتر هم افزایش می‌یابـد و سـپس بـه ایـن دلیل که کانال با خلأ برهمکنش می‌کنـد، کانـال بـرای $\tau\to\infty$

۱.Trace-preserving



شکل ۵. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار آمیختگی $S(\rho^{\zeta}(\tau))$ برحسب زمان بهنجارش x و دامنهٔ $0 \le \alpha \le 4$ (نمودار در چهار زاویهٔ مختلف نشان داده شده است).

آمیختگی آن نزول می‌کند، و تبدیل به دو مد خلأ می‌شود که یک حالت خالص[1] است.

۶. نتایج

حالت‌های همدوس درهم‌تنیدهٔ دوتایی نوسانگر هماهنگ با استفاده از رونوشت حالت‌های همدوس نوسانگر هماهنگ می‌تواند ایجاد شود. این حالت‌های درهم‌تنیده اگر درمحیط خلأ جاسازی شود، درهم‌تنیدگیشان کاهش می‌یابد اما نه به طور کامل و همانده‌ی مطلوب آنها همیشه بزرگ‌تر از حدکلاسیکی ۲/۳ است که برای ترارسانی کوانتومی مناسب است. بنابراین به نظر می‌رسد که حالت‌های همدوس، نه تنها بصورت نظری بلکه به صورت تجربی، نقش مهمی را در نظریهٔ اطلاعات کوانتومی داشته باشند.

مراجع

1. D Popov, I Zahari, Vjeckoslav Sajfert, I Luminosu, and D Popov, *Int. J. Theor. Phys.* **47** (2008) 1441.
2. E Andersson, M Curty, and I Jex, *Physical Review* **A 74** (2006) 022304
3. M Le Ballac, "*A Short Introduction to Quantum Information and Quantum Computation*", Cambridge University press (2006).
4. C H Bennett, G Brassard, C Crépeau, R Jozsa, A Peres, and W K Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 1895.
5. A Barenco, D Dutch, A Ekert, and R Jozsa, *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 4085.
6. BC Sanders, *Journal of Physics* A: *Mathematical and Theoretical* **45** (24) 244002.
7. K Fujii, "*Coherent States and some Topics in Quantum Information Theory*", quant-ph/0207178
8. S J D Phoenix, *Phys. Rev.* A **41** (1990) 5132.
9. H Jeong, M S Kim, and J Lee1, *Physical Review* A **64** (2001) 052308
10. J Lee and M S Kim, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 4236; J Lee, M S Kim, Y –J Park, and S Lee, *J. Mod. Opt.* **47** (2000) 2151
11. R Horodecki, P Horodecki, and M Horodecki, *Phys. Rev.* A **60** (1999) 1888.
12. S Bose and V Vedral, *Phys. Rev.* A **61** (2000) 040101.

[1] Pure state