

محاسبه تصحیحات ترمودینامیکی ناشی از اثرات تبادلی الکترونی در مدل توماس- فرمی برای پلاسمای داغ و چگال

حسن حسین خانی^۱ و امیرحسین اسماعیلیان عراقی^۲

۱. پژوهشکده پلاسما و گداخت هسته‌ای، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، تهران

۲. گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قم

پست الکترونیکی: hhosseinkhani@aeoi.org.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۴/۲۳؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۴/۱۰/۱۳)

چکیده

در این مقاله با در نظر گرفتن اثرات برهم‌کنش تبادلی الکترونی پلاسما، ابتدا به حل عددی معادلات توماس- فرمی به طور مستقیم پرداخته و سپس با استفاده از جواب‌های به دست آمده از این معادلات، بزرگی مقدار تصحیحات تبادلی فشار و انرژی داخلی پلاسمای نوعی را (گاز اتمی با عدد اتمی معین) برحسب تغییرات چگالی و دما محاسبه کرده‌ایم. نتایج محاسبات می‌تواند در بررسی کمی و کیفی تغییرات فاز ماده در دما و چگالی بالا در تحقیقات تجربی و نظری گداخت به روش محصورسازی لختی و همچنین پدیده‌های اختریفیزیکی مورد استفاده قرار گیرد.

واژه‌های کلیدی: پلاسمای داغ و چگال، معادلات حالت، اثرات تبادلی الکترونی، مدل توماس- فرمی، گداخت محصورسازی لختی

۱. مقدمه

است. معادله حالت ماده را می‌توان بر پایه مدل دستگامی شامل الکترون‌های تبهگن و یون‌های جفت‌شده محاسبه کرد [۳-۵]. شناخت معادلات حالت پلاسمای داغ و چگال به عنوان بخشی مهم از پژوهش در زمینه گداخت لختی در چند دهه اخیر محسوب می‌شود. محاسبه فشردگی و رفتار ترمودینامیکی ماده هدف در پدیده گداخت، به روش محصورسازی لختی^۱ و همچنین در ابر نواخترها، مستلزم محاسبه دقیق معادله حالت برای ناحیه وسیعی از مقادیر دما و چگالی است [۶ و ۷]. پس از

در دست داشتن معادله حالت ماده برای فهم خواص ترمودینامیکی آن در دما و چگالی مورد نظر ضروری است [۱ و ۲]. دستیابی به تصویری صحیح از رفتار ماده در محدوده دما و چگالی بالا از طریق مدل‌های ساده ترمودینامیکی امکان‌پذیر نبوده و همچنین روش‌های تجربی نیز برای مطالعه مواد در چنین شرایطی با دشواری‌های تکنیکی متعددی مواجه است. از این روی بررسی خواص ماده چگال داغ به کمک روش‌های نظری مبتنی بر آمار کوانتومی اخیراً مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته

۱. Inertial confinement fusion

مختلف با حل معادلات تصحیح شده توماس- فرمی به روش عددی محاسبه شده است. مقادیر محاسباتی برای اعداد اتمی، چگالی و دمای دلخواه پلاسما و همچنین مقادیر مقایسه‌ای آنها برای عناصر مختلف به ازای دما و چگالی‌های متفاوت به دست آمده است.

نتایج محاسبات، بزرگی اثرات تبدالی در مقادیر به دست آمده برای انرژی و فشار پلاسمای داغ و چگال را به ازای افزایش چگالی و عدد اتمی گاز نشان می‌دهد.

۲. مدل و نظریه

دقت روش‌های محاسباتی به منظور به دست آوردن پتانسیل اتمی پلاسما، شامل ذرات با عدد اتمی دلخواه در دما و چگالی‌های معین، مبتنی بر مدل توماس- فرمی، به میزان بزرگی اثرات کوانتومی تبدالی بر روی پتانسیل اتمی بستگی دارد. در ابتدا مدل توماس- فرمی با در نظر گرفتن اثرات تبدالی برای دمای $T = 0$ تعمیم داده شد و سپس این مدل بر اساس تصحیحات کوانتومی تبدالی برای محدوده دما و چگالی‌های دلخواه به نام مدل توماس- فرمی تصحیح شده نام گرفت.

معادله تصحیح شده توماس- فرمی با اعمال اثرات تبدالی در مختصات کروی با استفاده از متغیر $x = \frac{r}{r_0}$ و شرایط مرزی

$$t(0) = 0, t'(1) = t(1) \quad [11]$$

$$t''(x) - \frac{\sqrt{2}n}{f} r_0^2 I_{1/2}' \left(\frac{W(x)}{x} \right) t(x) = \frac{\sqrt{2}n}{f} r_0^2 x Y' \left(\frac{W(x)}{x} \right). \quad (1)$$

در معادله فوق $r_0 = 1/38 \left(\frac{A}{\dots} \right)^{1/3}$ شعاع سلول اتمی، A عدد جرمی، ... چگالی ماده،

$$I_k(x) = \int_0^{+\infty} \frac{y^k}{1 + \exp(y-x)} dy \quad (k \geq -1)$$

و تابع $Y(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Y(x) = I_{1/2}(x) I_{1/2}'(x) + 6 \int_{-\infty}^x [I_{1/2}'(t)]^2 dt, \quad (2)$$

اندرکنش لیزر و یا یون‌های پر انرژی با سطح ماده هدف و شکل‌گیری پلاسما، در طی فرآیند فشردگی ماده هدف تا مرحله انفجار^۱ و احتراق^۲، آنچه که رفتار ماده تحت فشار در فرآیند انفجار به درون را مشخص می‌کند، معادلات حالت ماده است. در شرایط مختلفی از فشار، دما و چگالی مواد مختلف رفتارهای متفاوتی از خود نشان می‌دهند که این خواص با مدل‌های کلاسیکی و کوانتومی مختلفی مورد بررسی قرار می‌گیرند. مدل توماس- فرمی مبتنی بر آمار کوانتومی فرمی- دیراک را می‌توان روشی کارآمد در محاسبه معادله حالت ماده متراکم، مایعات و گازهای چگال، در محدوده $\Gamma \geq 10^6$ ، در نظر گرفت [۸]. Γ پارامتر جفت‌شدگی عبارت است از $\Gamma = \frac{Z^2 e^2}{r_0 k_B T}$ که در آن Z عدد اتمی، $r_0 = \frac{1}{a_0} \left(\frac{3}{4\pi n} \right)^{1/3}$ شعاع اتم بور و n تعداد هسته‌ها در واحد حجم ماده و T بیانگر دمای ماده است. اساس مدل توماس- فرمی بر پایه حل معادله پواسن با در نظر گرفتن برهم‌کنش الکترون- هسته به کمک آمار کوانتومی فرمی در مدل ژله‌ای^۳ الکترونی بنا شده است. این مدل از جمله مدل‌های موفق جهت بررسی رفتار و معادلات حالت ماده در شرایط حاکم بر گداخت لختی نیز محسوب می‌شود [۹ و ۱۰].

از آنجا که در روش توماس- فرمی از اثرات تبدالی بین ذرات پلاسما چشم پوشی می‌شود، نتایج به دست آمده برای پارامترهای ترمودینامیکی پلاسما نظیر فشار، انرژی و آنتروپی با تغییرات چگالی و عدد اتمی عناصر تشکیل دهنده گاز، با خطا همراه می‌باشد. معادلات حالت پلاسمای داغ و چگال با استفاده از مدل توماس- فرمی بدون در نظر گرفتن اثرات تبدالی در دمای صفر و غیر صفر قبلاً محاسبه شده و مورد بررسی قرار گرفته‌اند [۸]. از این روی در تحقیق حاضر با در نظر گرفتن پتانسیل مؤثر تبدالی الکترونی و برهم‌کنش اسپینی الکترون‌های اتم‌های تشکیل دهنده پلاسما، تصحیحات اثر تبدالی روی مقادیر فشار، انرژی پلاسمای داغ به ازای چگالی و اعداد اتمی

۱. Ignition

۲. Burning

۳. Jellium model

۴. Thomas-Fermi with Correction (TFC)

این روش‌ها با پیچیدگی‌های محاسباتی همراه بوده و در محدوده خاصی از مقادیر امکان‌پذیر است به طوری که از آنها می‌توان در حل معادله توماس-فرمی بدون در نظر گرفتن اثرات تبادلی استفاده کرد، زیرا نتیجه محاسبات از این دو روش در ناحیه دمایی بالا با در نظر گرفتن اثرات تبادلی با خطای بالایی همراه است. از این روی، به حل معادلات (۱) تا (۳) با استفاده از نرم‌افزار محاسباتی در بازه دمایی و چگالی دلخواه و با استفاده از مقادیر زیر پرداخته‌ایم

$$W(0) = \frac{Z}{n r_0} \sim \left(\frac{\dots}{AZ} \right)^{1/3} \frac{Z^{4/3}}{n}, \quad (6)$$

$$\frac{4}{f} \sqrt{r_0} r_0^2 \sim \left(\frac{AZ}{\dots} \right)^{2/3} \left(\frac{n}{Z^{4/3}} \right)^{1/2}.$$

با در دست داشتن جواب‌های معادلات (۱) و (۳)، توابع تصحیحات فشار و انرژی داخلی پلاسما، $\Delta E = \Delta E(\dots, T)$ و $\Delta P = \Delta P(\dots, T)$ را برحسب تغییرات دما و چگالی برای هر نوع گاز اتمی نوعی با Z معین محاسبه کرده‌ایم.

۳. نتایج محاسبات عددی

در این بخش به ارائه نتایج به دست آمده حاصل از حل عددی معادلات توماس-فرمی تصحیح شده با اعمال اثرات برهم‌کنش تبادلی الکترونی برای دو گاز اتمی نوعی He و Al می‌پردازیم.

در شکل ۱ تغییرات تصحیحات فشار پلاسما ناشی از برهم‌کنش تبادلی ΔP (GPa)، برحسب تغییرات چگالی پلاسما $\left(\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} \right)$... برای He به ازای دماهای ۱۰ KeV و $T = 1$ رسم شده است. از این نمودار، می‌توان افزایش تصحیحات فشار با افزایش دمای پلاسما را مشاهده کرد. همچنین می‌توان نتیجه گرفت که در دماهای بالا افزایش چگالی موجب افزایش اثرات تبادلی در فشار پلاسما خواهد شد. در شکل ۲ مقادیر فشار پلاسما بدون در نظر گرفتن اثرات تبادلی جهت مقایسه ارائه شده است.

شکل ۳ مقایسه تصحیحات فشار برحسب دمای پلاسما

برای Al و He در چگالی ثابت $\left(\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} \right) = 1000$... را نمایش

و همچنین داریم $\frac{W(x)}{x} = \frac{V_{ex}(r) + \dots}{n}$ که در آن $V_{ex}(r)$ ، \sim و $n = k_B T$ به ترتیب بیانگر پتانسیل مؤثر تبادلی، پتانسیل شیمیایی و دما بوده و تابع $W(x)$ جواب معادله همگن توماس-فرمی در دمای معین T ، بدون اعمال اثرات تبادلی الکترونی به شکل زیر است

$$\frac{d^2 W(x)}{dx^2} = \frac{4}{f} \sqrt{r_0} r_0^2 x I_{1/2} \left(\frac{W(x)}{x} \right) \quad (3)$$

که با شرایط مرزی $W'(1) = W(1)$ ، $W(0) = \frac{Z}{n r_0}$ حل می‌شود. صفر بودن پتانسیل روی دیواره سلول اتمی الزام می‌کند که داشته باشیم $W(1) = \frac{\dots}{n}$.

رابطه تقریبی $V_{ex}(r)$ به کمک بسط تابع چگالی الکترونی برحسب ثابت \hbar در تقریب هارتری-فوک به دست آمده است [۱۱]. همچنین از روش‌های مختلف دیگری نظیر درون‌یابی نیز برای محاسبه تصحیحات تبادلی پتانسیل اتمی در دمای صفر استفاده می‌شود [۱۲].

تصحیحات فشار و انرژی داخلی الکترونی پلاسما با استفاده از مدل تصحیح شده توماس-فرمی ناشی از اثرات تبادلی برابر است با [۱۳ و ۱۴]

$$\Delta p = \frac{n}{3f} \left[t(1) I_{1/2}(W(1)) + Y(W(1)) \right] \quad (4)$$

$$\Delta E = \frac{r_0^2}{3f} \left[\int_0^1 x t(x) I_{1/2}(x) dx + 2 \int_0^1 x^2 Y \left(\frac{W(x)}{x} \right) dx \right] + \frac{Z \sqrt{r_0}}{6f} t'(0) - \Delta E_0, \quad (5)$$

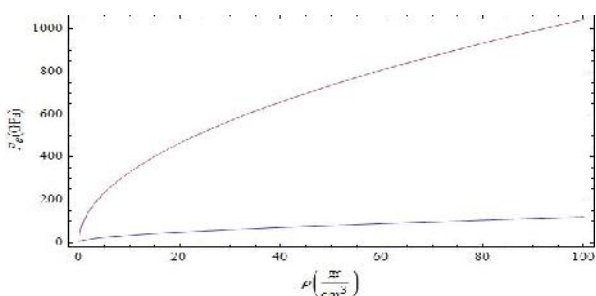
که در آن داریم [۱۰]

$$\Delta E_0 = -0.2690017 Z^{5/3}.$$

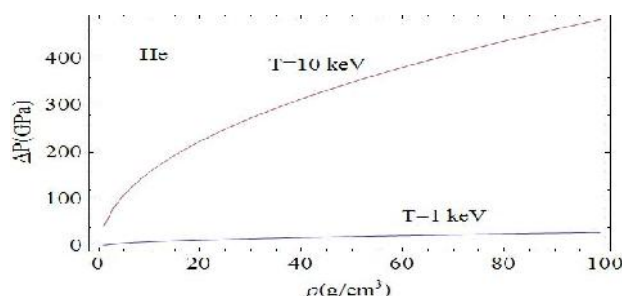
محاسبه تصحیحات تبادلی فشار و انرژی داخلی پلاسما تنها با در دست داشتن توابع $W(x)$ و $t(x)$ ، یعنی جواب معادلات (۱) و (۳)، امکان‌پذیر است. از روش‌های متداول حل معادلات (۱) و (۳) در دما و چگالی مورد نظر می‌توان دو روش پرتاب [۱۵] و روبش دوتایی [۱۶] را نام برد. استفاده از هر یک از

۱. Shooting

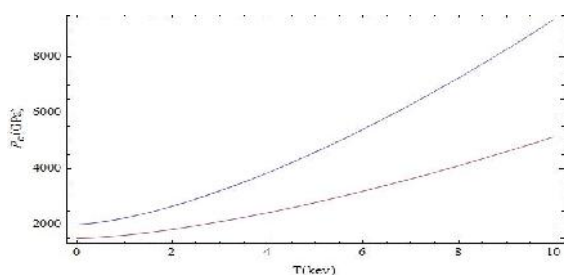
۲. Double sweep



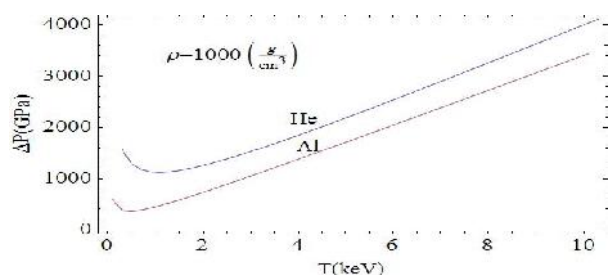
شکل ۲. مقادیر فشار پلاسما بدون در نظر گرفتن برهم کنش تبدالی برحسب تغییرات چگالی پلاسما $\left(\frac{gr}{cm^3}\right) = \dots$ برای He به ازای دمای ۱۰ KeV و $T = 1$.



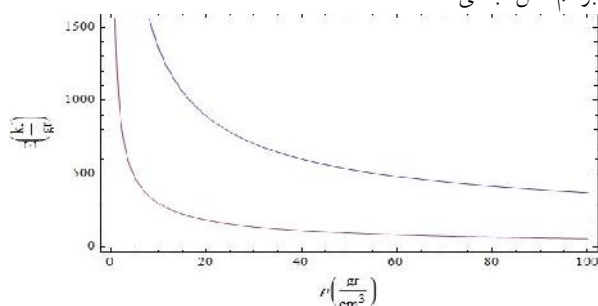
شکل ۱. مقادیر تصحیحات فشار پلاسما ناشی از برهم کنش تبدالی ΔP (GPa) برحسب تغییرات چگالی پلاسما $\left(\frac{gr}{cm^3}\right) = \dots$ برای He به ازای دمای ۱۰ KeV و $T = 1$.



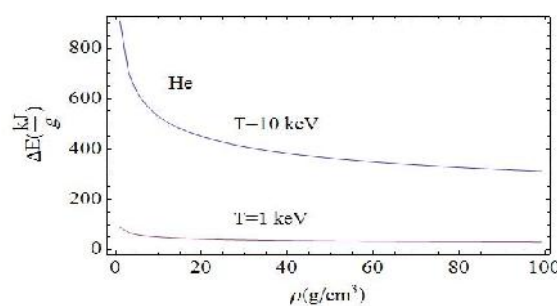
شکل ۴. مقادیر فشار برحسب دمای پلاسما T (KeV) برای Al و He به ازای چگالی $\left(\frac{gr}{cm^3}\right) = 1000 \dots$ بدون در نظر گرفتن برهم کنش تبدالی.



شکل ۳. مقایسه تصحیح فشار برحسب دمای پلاسما T (KeV) برای He و Al به ازای چگالی $\left(\frac{gr}{cm^3}\right) = 1000 \dots$.



شکل ۶. مقادیر انرژی برحسب چگالی پلاسما $\left(\frac{gr}{cm^3}\right) = \dots$ برای He به ازای دماهای ۱۰ KeV و $T = 1$ بدون در نظر گرفتن برهم کنش تبدالی.

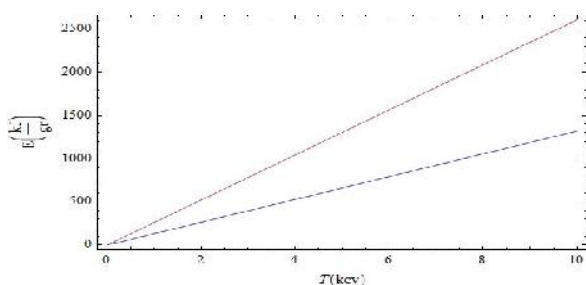


شکل ۵. نمودار تصحیح انرژی ΔE ($\frac{KJ}{g}$) برحسب چگالی پلاسما $\left(\frac{gr}{cm^3}\right) = \dots$ برای He به ازای دماهای ۱۰ KeV و $T = 1$.

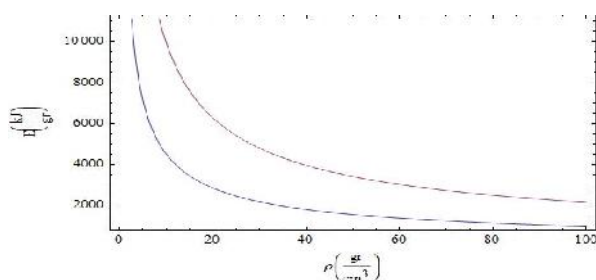
چگالی پلاسما $\left(\frac{gr}{cm^3}\right) = \dots$ برای He به ازای دماهای $T = 1$ و 10 KeV به نمایش در آمده است. با استفاده از این نمودار می توان افزایش چشمگیر مقدار تصحیحات انرژی با افزایش دما را نیز مشاهده کرد که مقدار این تصحیحات در دمای ثابت، برای چگالی های بالای دستگاه، به مقدار حدی معینی می رسد. نمودار تغییرات انرژی برای He به ازای همین دماها ولی بدون لحاظ کردن اثرات تبدالی برحسب چگالی پلاسما در شکل ۶ ارائه شده است.

می دهد. همچنین شکل ۳ بیانگر افزایش مقدار تصحیحات فشار با افزایش دما است. از این نمودار می توان نتیجه گرفت که به دلیل کوچک تر بودن عدد اتمی عنصر He نسبت به Al، بزرگی مقدار ΔP برای گاز He نسبت به Al بیشتر است. شکل ۴ نمودار تغییرات فشار را بدون در نظر گرفتن برهم کنش تبدالی برای همین عناصر در چگالی مورد اشاره نمایش می دهد.

در شکل ۵ نمودار تصحیح انرژی ΔE ($\frac{KJ}{g}$) برحسب



شکل ۸. نمودار مقادیر انرژی تبدالی برحسب تغییرات دمای پلاسما برای T (KeV) برای $\text{He} (Z=2)$ و $\text{Al} (Z=13)$ به ازای چگالی $\rho = 10^6 \left(\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}\right)$ بدون در نظر گرفتن برهم کنش تبدالی.



شکل ۹. نمودار مقادیر انرژی تبدالی برحسب تغییرات چگالی پلاسما برای He و Al برای $\rho = 10^6 \left(\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}\right)$ بدون در نظر گرفتن برهم کنش تبدالی.

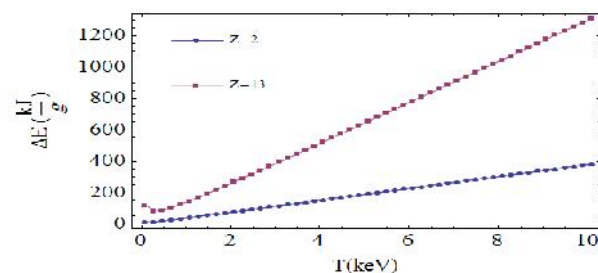
از این نمودار می توان نتیجه گرفت که در ناحیه چگالی های پایین، اثرات تبدالی الکترونی بر انرژی پلاسما با افزایش عدد اتمی افزایش می یابد و مقدار این تصحیحات برای ناحیه چگالی بالا در پلاسما به مقدار حدی معینی می رسد. همچنین در شکل ۱۰ تغییرات انرژی داخلی برحسب چگالی پلاسما برای Al و He در دمای $T = 10 \text{ KeV}$ بدون لحاظ کردن اثرات تبدالی ارائه شده است.

لازم به ذکر است که با در دست داشتن مقادیر تصحیحات عنصر (Z_1, A_1) می توان تصحیحات مربوط به هر عنصر مورد نظر دیگر (Z_2, A_2) را نیز براساس ضرائب تبدیل به شکل زیر محاسبه نمود

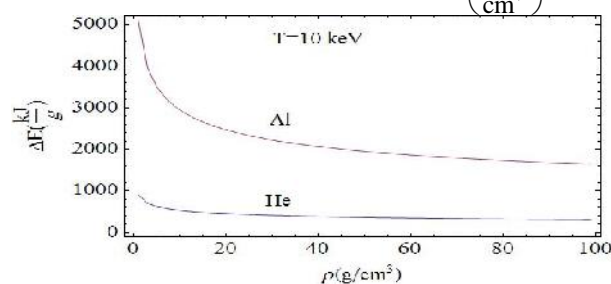
$$\Delta P \rightarrow \left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^{A_1/3} \Delta P, \Delta E \rightarrow \left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^{5/3} \Delta E.$$

۴. نتیجه گیری

با توجه به توضیحات فوق به عنوان نتیجه کلی می توان بیان کرد



شکل ۷. مقادیر تصحیح انرژی تبدالی $\Delta E \left(\frac{\text{KJ}}{\text{g}}\right)$ برحسب تغییرات دمای پلاسما T (KeV) برای $\text{He} (Z=2)$ و $\text{Al} (Z=13)$ به ازای چگالی $\rho = 10^6 \left(\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}\right)$



شکل ۱۰. مقادیر مقایسه ای تصحیح انرژی تبدالی $\Delta E \left(\frac{\text{KJ}}{\text{g}}\right)$ برحسب تغییرات چگالی پلاسما $\rho = 10^6 \left(\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}\right)$ برای He و Al به ازای دمای $T = 10 \text{ KeV}$

شکل ۷ تغییرات مقدار تصحیحات انرژی داخلی پلاسما را برحسب دما برای گازهای He و Al به ازای چگالی ثابت $\rho = 10^6 \left(\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}\right)$ نشان می دهد. با استفاده از این نمودار می توان نتیجه گرفت که تصحیحات انرژی پلاسما ناشی از اثرات تبدالی با افزایش دما چشمگیر است، هر چند که در دماهای پایین مقدار این تصحیحات مستقل از عدد اتمی گاز تشکیل دهنده پلاسما بوده و ناچیز است. افزایش چگالی پلاسما موجب کاهش مقدار ΔE می شود. این نتیجه با توجه به پیش بینی چشمگیر بودن اثرات تبدالی الکترونی در چگالی های پائین بر اساس مدل ژله ای، به خوبی قابل توجیه است. شکل ۸ نمودار مقادیر انرژی داخلی را با شرایط مشابه شکل ۷ ولی بدون در نظر گرفتن اثرات تبدالی نمایش می دهد.

در شکل ۹ مقادیر مقایسه ای تصحیح انرژی داخلی تبدالی برحسب تغییرات چگالی پلاسما $\rho = 10^6 \left(\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}\right)$ برای He و Al به ازای دمای $T = 10 \text{ KeV}$ نمایش داده شده است. با استفاده

چشم‌پوشی می‌باشد. محاسبه بزرگی این تصحیحات در بازه‌های مختلف برای دما و چگالی پلاسما در مطالعه چگونگی رفتار ترمودینامیکی پلاسما داغ و چگال نقش مهمی را ایفا می‌کند.

که تصحیحات ناشی از برهم‌کنش‌های تبادل برای فشار و انرژی داخلی پلاسما داغ و چگال، به تغییرات مقادیر چگالی، دما و همچنین عدد اتمی گاز وابسته می‌باشد به طوری که با افزایش دما مقادیر این تصحیحات قابل توجه و غیر قابل

مراجع

- Shock Waves and High Temperature Hydrodynamics Phenomena*, Academic Press, New York (1966).
11. A F Nikiforov, V G Novikov, and V B Uvarov, "Quantum Statistical Models of Hot Dense Matter", Birkhauser Verlag, Basel, Switzerland (2005).
 12. B F Rozsnyai, *Phys. Rev. A* **53** (1972) 1137.
 13. N N Kalitkin and L V Kuzmina, "Tables of Thermodynamic Functions of Matter at High Energy Densities", Keldysh Institute of Applied Mathematics Russian Academy of Sciences, Moscow (1975).
 14. D A Kirzhnits, *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics* **8**, 6 (1959) 1081.
 15. S K Godunov, and V S Ryabenkii, "The Theory of Difference Schemes – An Introduction to the Underlying Theory", NorthHolland, Amsterdam (1987).
 16. A A Samarskii, and A V Gulin, "Numerical Methods", Nauka, Moscow (1989).
 1. S Eliezer, A Ghatak, and H Hora, "Fundamental of Equation of State", World Scientific (2002).
 2. S X Hu et al., *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 185003.
 3. T Guillot, *Annu. Rev. Earth Planet Sci.* **33** (2005) 493.
 4. J J Fortney et al., *Phys. Plasmas* **16** (2009) 041003.
 5. P Dufour et al., *Nature* **450** (2007) 522.
 6. J D Lindl et al., *Phys. Plasmas* **11** (2004) 339.
 7. S X Hu et al., *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010) 235003.
 ۸. ح حسین‌خانی، م فریدفر، ن عیدیان، ا ح اسماعیلیان عراقی، «معادلات حالت پلاسما داغ و چگال در گداخت اینرسی بر اساس مدل توماس-فرمی»، مقاله نامه کنفرانس فیزیک ایران (۱۳۹۱) ۱۶۵۱.
 9. R M More in, "Laser Plasma Interactions", Proceedings of the 29th Scottish Universities Summer School in Physics, edited by M. B. Hooper, Camelot, Southampton (1986).
 10. B Ya Zel'dovich and Yu P Raizer, "Physics of