

محاسبات توماس-فرمی برای تعیین خواص بحرانی ماده هسته‌ای متقارن براساس رهیافت جرم مؤثر تعمیم یافته

مهدی غضنفری مجرد، سیده کبری موسوی خرشتمی و اعظم مستأجران گورتانی

دانشکده فیزیک، دانشگاه کاشان، کاشان

پست الکترونیکی: ghazanfari@kashanu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۸/۹؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۵/۱/۲۴)

چکیده

با به کارگیری تقریب میدان-میانگین و نیمه کلاسیکی توماس-فرمی، در چهارچوب یک مدل آماری، معادله حالت و خواص بحرانی ماده هسته‌ای متقارن بررسی می‌شود. در این مدل برهم‌کنش دوجسمی و پدیده‌شناسی مایرز و شواتکی در فضای فاز به کارگرفته می‌شود. با انجام وردش تابعی انرژی آزاد هلمهولتز کل دستگاه نسبت به تابع توزیع نوکلئونی در فضای فاز برای رسیدن به یک وضعیت تعادل طبق قانون دوم ترمودینامیک، به کمیت‌هایی نظیر جرم مؤثر که تنها تابع چگالی است و پتانسیل مؤثر تک ذره‌ای که بر اساس آن کمیت کلیدی جرم مؤثر تعمیم یافته نوکلئونی که علاوه بر چگالی به دما نیز وابستگی دارد، می‌رسیم و بر این اساس به شکل صریح تابع توزیع دست پیدا می‌کنیم. در این مدل کمیت‌های فزونور ترمودینامیکی از قبیل انرژی نهان، آنتروپی و آزاد هلمهولتز برحسب تابع توزیع به صورت تابعی در فضای فاز به ازای دما و چگالی معین به دست می‌آیند. در این تحقیق توجه خاصی به رفتار بحرانی و پایداری ماده هسته‌ای متقارن شده است. یافته‌های ما در مورد کمیت‌های توصیف کننده رفتار بحرانی ماده هسته‌ای متقارن با نتایج حاصل از مدل‌های مطرح دیگر در این زمینه در توافق است.

واژه‌های کلیدی: ماده هسته‌ای متقارن، تقریب توماس-فرمی، جرم مؤثر تعمیم یافته، تابع توزیع، گذار فاز، خواص بحرانی

۱. مقدمه

سنگین در انرژی‌های میانی و بالا، فیزیک مایعات کوانتومی و دستگاه‌های اختریفیزیکی مانند سیاه‌چاله‌ها، انفجار ابرنواخترها و مدل‌سازی بخش داخلی ستارگان نوترونی حائز اهمیت است [۱-۷]. تحقیقات در این حوزه به سال ۱۹۳۷ بر می‌گردد. زمانی که اولین بار بعد از رابطه نیمه تجربی جرم، اوپلر اولین محاسبات ماده هسته‌ای را انجام داد. اهمیت رابطه نیمه تجربی جرم باید نخستین تلاش در کار برد مدل‌های هسته‌ای برای درک قانونمند

مطالعه دستگاه‌های بس ذره‌ای را همواره می‌توان از مسائل چالش برانگیز در حوزه‌های مختلف فیزیک دانست. در این میان دستگاه ماده هسته‌ای^۱ از مباحث بنیادی و کلیدی دستگاه‌های بس ذره‌ای در حوزه فیزیک هسته‌ای و اختر فیزیک محسوب می‌شود. مطالعه ماده هسته‌ای در فهم پدیده‌هایی چون برخورد یون‌های

۱. Nuclear matter

پدیده‌شناسی) [۲۲-۳۲] تعیین می‌کنند. روش میکروسکوپی روی درجات آزادی یک نوکلئون متمرکز می‌گردد و با پتانسیل برهم‌کنشی واقعی سروکار دارد. پتانسیلی که از طریق محاسبه سطح مقطع و تغییر فاز تابع موج و برازش داده‌های پراکندگی نوکلئون- نوکلئون تعیین می‌گردد. در روش ماکروسکوپی (پدیده‌شناسی) روی درجات آزادی دسته جمعی نوکلئون‌ها متمرکز می‌گردد و پتانسیل از نوع پدیده‌شناسی می‌باشد، یعنی پتانسیل به گونه‌ای در نظر گرفته می‌شود که پارامترهای برهم‌کنش بر اساس خواص نقطه اشباع هسته‌ای تعیین گردند.

در عمل هر دو روش ذکر شده مفید، و برای تجزیه و تحلیل یک دستگاه ماده هسته‌ای لازم است. از آنجایی که معادله حالت در بررسی خواص بحرانی و گذار فاز ماده هسته‌ای نقش کلیدی ایفا می‌کند، ما به دنبال مدلی هستیم که بتوان این خواص را به نحو مطلوبی بررسی کنیم. در این تحقیق با ارائه مفهوم جرم مؤثر تعمیم یافته در چهارچوب مدل آماری توماس- فرمی که به عنوان یک مدل پدیده‌شناسی کار آمدی بالای خود را در بررسی خواص گوناگون ماده هسته‌ای نشان داده است [۲۹-۳۲]، با تعیین معادله حالت ماده هسته‌ای متقارن خواص بحرانی آن بررسی می‌شود. ترتیب مطالب بدین شرح است: در بخش دوم به تشریح مدل و سپس نحوه تعیین جرم مؤثر تعمیم یافته می‌پردازیم. در بخش سوم نتایج عددی حاصل از این مدل در بررسی خواص ترمودینامیکی به ویژه خواص بحرانی ماده هسته‌ای متقارن مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد و سرانجام در بخش آخر به جمع‌بندی و نتیجه‌گیری این بررسی‌ها پرداخته می‌شود.

۲. مدل جرم مؤثر تعمیم یافته در تقریب توماس- فرمی

دستگاه ماده هسته‌ای به دلیل چگالی بالا و در نتیجه انرژی فرمی بالایی که دارد تا دماهای چندین مگا الکترون ولت نیز به صورت یک مایع کوانتومی فرمی در نظر گرفته می‌شود. در تقریب توماس- فرمی رفتار ذرات را می‌توان به صورت شبه ذراتی تصور کرد که مانند یک گاز در فضای فاز عمل می‌کنند. بدین صورت یک دستگاه هسته‌ای را می‌توان به صورت یک دستگاه

خواص اشباع ماده هسته‌ای مانند چگالی اشباع، انرژی اشباع، تراکم‌ناپذیری و انرژی تقارنی تلقی کرد [۸ و ۹]. بنابراین فرمول نیمه تجربی جرم به منزله پل ارتباطی میان ماده هسته‌ای متناهی و ماده هسته‌ای بی‌نهایت می‌باشد. در هسته‌های متناهی، با افزایش شعاع از مرکز هسته، چگالی نوکلئونی به سمت صفر میل می‌کند. در مورد هسته‌های سنگین، فرض می‌شود که چگالی نوکلئونی تا نزدیک سطح هسته، تقریباً ثابت است، یعنی تعداد نوکلئون‌های موجود در اطراف هر نوکلئون تقریباً ثابت می‌ماند. از داده‌های تجربی پراکندگی الکترون، شعاع هسته‌های سنگین با دقت خوبی

با رابطه $R = R_0 A^{\frac{1}{3}}$ توصیف می‌شود که بر ثابت بودن چگالی ماده هسته‌ای دلالت می‌کند. این رابطه به همراه برازش داده‌های تجربی، مقدار شعاع ماده هسته‌ای در حالت اشباع $R_0 \sim 1.5 \text{ fm}$ ، را نتیجه می‌دهد. فشار برای یک دستگاه در حال تعادل صفر است. از شرط صفر شدن فشار ماده هسته‌ای (سرد و گرم)، چگالی اشباع به دست می‌آید. مقدار تجربی چگالی اشباع و انرژی اشباع ماده هسته‌ای متقارن در دمای صفر عبارت است از

$$\rho_0 = \frac{3}{4 R_0^3} \approx 0.16 \pm 0.02 (\text{fm}^{-3}), \quad (1)$$

$$(\rho_0) = -16 \pm 1 (\text{MeV}).$$

به همین دلیل مفهوم ماده هسته‌ای به عنوان یک دستگاه ایده‌آل بی‌نهایت بزرگ از نوکلئون‌ها با چگالی یکنواخت مطرح می‌شود که مشابه مرکز هسته‌های سنگین می‌باشد. با توجه به تعریف دستگاه ماده هسته‌ای خواهیم داشت $\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{A}{V} = \rho_0$ که در آن V حجم و A تعداد نوکلئون‌هاست، مسئله در حد ترمودینامیکی با چگالی یکنواخت بررسی می‌شود. مشخصه مهم دیگر در ماده هسته‌ای، پارامتر عدم تقارن می‌باشد که به شکل

$$= \frac{n^- - p}{n + p}$$

چگالی یکسان نوترون و پروتون برخوردار است، این مقدار صفر می‌شود. معادله حالت ماده هسته‌ای را که ارتباط بین مختصات ترمودینامیکی را مشخص می‌کند، بر اساس نوع برهم‌کنش‌های که در روش‌های مختلف به کار می‌برند، از طریق مدل‌های میکروسکوپی [۱۰-۲۱] و یا ماکروسکوپی (یا

حاصل جمع انرژی جنبشی و انرژی برهم‌کنشی می‌باشد. انرژی جنبشی خود شامل انرژی جنبشی ناشی از نوترون‌ها (k, n) و انرژی جنبشی ناشی از پروتون‌ها (k, p) و همچنین انرژی برهم‌کنشی نیز برابر با حاصل جمع انرژی برهم‌کنشی نوترون-نوترون (nm)، پروتون-پروتون (pp)، پروتون-نوترون (pn) و نوترون-پروتون (np) می‌باشد. چگالی نوکلئون‌ها ... برای یک ماده هسته‌ای متقارن در دمای صفر با فرض این که ماده یکنواخت باشد، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dots = \frac{N}{V} = \frac{g}{Vh^3} \int d^3x \int d^3p = \frac{g}{h^3} \int_0^{P_F} 4\pi p^2 dp \quad (4)$$

$$= \left(\frac{g}{h^3} \right)^{\frac{1}{3}} f P_F^3 \Rightarrow P_F = \left(\frac{3h^3}{4f g} \dots \right)^{\frac{1}{3}}$$

برای چگالی پرتون و نوترون و تکانه فرمی داریم:

$$u = \frac{\dots n \dots p}{\dots n + \dots p} = 0 \Rightarrow \dots n = \dots p = \dots = \frac{4f g P_F^3}{h^3} \quad (5)$$

تبهگنی هر تراز انرژی (g) برای ماده هسته‌ای متقارن که در آن تعداد نوترون‌ها و پروتون‌ها مساویند، برابر چهار است. با داشتن پتانسیل مشهور مایرز و شواتکی، انرژی به ازای هر نوکلئون در دمای صفر از طریق رابطه زیر محاسبه می‌شود [۲۸-۳۱]:

$$v = \frac{E}{N} = \frac{g}{Nh^3} \int d^3x \int_0^{P_F} \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} V_{in}(p) \right] d^3p$$

$$= \frac{1}{\dots} \left[\frac{g}{h^3} \int_0^{P_F} \frac{P^2}{2m} d^3p + \frac{g}{h^3} \int_0^{P_F} \frac{1}{2} V_{in} d^3p \right] \frac{g}{h^3} \int_0^{P_F} d^3p$$

$$= \frac{e_K + e_{V_{in}}}{\dots} \quad (6)$$

به منظور جلوگیری از دو بار شمارش برهم‌کنش هسته‌ای برای دو ذره، ضریب $\frac{1}{2}$ در کنار پتانسیل برهم‌کنشی میدان- میانگین $V_{in}(p)$ قرار می‌گیرد. برای عبارت چگالی انرژی جنبشی نوکلئون‌ها در دمای صفر داریم:

$$e_K = 2 T_b, \quad | = \left(\frac{4f g}{h^3} \frac{1}{p_b^3} \right) \frac{P_F^5}{5} \quad (7)$$

همچنین عبارت متناظر با چگالی انرژی برهم‌کنشی می‌شود:

تبهگن از فرم یون‌هایی در نظر گرفت که در هر حجم h^3 از فضای فاز، دو ذره (بدون در نظر گرفتن آیزواسپین ذرات) می‌توانند قرار داشته باشند. از آنجا که پتانسیل میدان- میانگین با تغییرات آرامی نسبت به مقدار خود در هر نقطه از فضا رفتار می‌کند، بنابراین در این تقریب با استفاده از یک چارچوب نیمه کلاسیکی، حالت ذرات توسط موقعیت و تکانه‌شان در فضای فاز شرح داده می‌شود. در این تحقیق با استفاده از برهم‌کنش مطرح ارائه شده توسط مایرز و شواتکی، به فرمول‌بندی جدیدی در حیطه تقریب توماس- فرمی برای ماده هسته‌ای متقارن دست پیدا می‌کنیم. این برهم‌کنش برای پتانسیل بین ذرات مشابه و نامشابه مطابق زیر تمایز قابل می‌شود [۲۹-۳۱]:

$$V_{like} = \left(\frac{-\gamma T_b}{a} \right) g \left(\frac{k_{\gamma}}{a} \right) \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{P_{\gamma}}{P_b} \right)^2 - 1 \frac{P_b}{|P_{\gamma}|} + 1 \left(\frac{\dots}{\dots} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}$$

$$V_{unlike} = \left(\frac{-\gamma T_b}{a} \right) g \left(\frac{k_{\gamma}}{a} \right) \left\{ r_u - \left[s_u \left(\frac{P_{\gamma}}{P_b} \right)^2 - x_u \frac{P_b}{|P_{\gamma}|} + t_u \left(\frac{\dots}{\dots} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}, \quad (2)$$

که در آن:

$$g \left(\frac{k_{\gamma}}{a} \right) = \frac{1}{4f a^3} \frac{\exp \left(-\frac{k_{\gamma}}{a} \right)}{\frac{k_{\gamma}}{a}}$$

$$\dots = \frac{1}{2} \left(\dots^{\frac{1}{2}} + \dots^{\frac{1}{2}} \right) \quad (3)$$

$$T_b = \frac{p_b^2}{2m}, \quad p_b = h \left(\frac{4f}{3} f^{\frac{1}{3}} \dots \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \dots = \left(\frac{4f}{3} f r_0^3 \right)^{-1},$$

$$r_0 = 1.37 \text{ (fm)}, \quad M = 938.903 \text{ (MeV)}.$$

در پتانسیل فوق کلیه ضرایب برهم‌کنشی برحسب خواص اشباع ماده هسته‌ای متقارن تعیین می‌گردند. تا دماهای پایین (چند ده الکترون ولت) برای ماده هسته‌ای مطابق نظریه پدیده‌شناسی لاندائو [۳۳] تابع توزیع در فضای فاز در یک تقریب خوب به وسیله تابع پله‌ای $[(P_F - p)]$ توصیف می‌شود. P_F تکانه فرمی است و بیان می‌کند که در دمای به اصطلاح صفر ذرات تا سطح فرمی توزیع می‌شوند. انرژی بر نوکلئون ماده هسته‌ای v ,

همچنین برحسب تابع توزیع آنتروپی به ازای هر نوکلئون می‌شود:

$$s = -\frac{g}{h^r} \int [f(p) \ln f(p) + (1-f(p)) \ln(1-f(p))] d^r p. \quad (14)$$

در فضای فاز برای تعیین تابع توزیع به ازای ثابت ماندن انرژی کل داخلی E و تعداد کل ذرات دستگاه N آنتروپی کل دستگاه S باید بیشینه شود. براساس بیان قانون دوم ترمودینامیک که حالت تعادل متناظر با محتمل‌ترین حالت برای احتمال توزیع است، بنابراین تابع توزیع را می‌توان از طریق وردش تابعی آنتروپی کل نسبت به تابع توزیع با ثابت نگه داشتن تعداد کل ذرات و انرژی به دست آورد. وردش $u f$ متناظر با خلق یک نوکلئون در فضای فاز است [۲۷ و ۲۹]:

$$u S + \frac{\tilde{u} N}{T} - \frac{1}{T} u E = 0, \quad P u S + \tilde{u} N - S u E = 0, \\ u f(p) = \frac{h^r}{g} u(\bar{p} - \bar{p}_0) u(\bar{r} - \bar{r}_0) = \frac{h^r}{g} \frac{u(p - p_0)}{f p^r} u(\bar{r} - \bar{r}_0). \quad (15)$$

به همین ترتیب با اعمال این وردش می‌توان پارامترهای کلیدی مهمی را به دست آورد:

$$u S + S \tilde{u} N - S u E = \int d^r r \left[\ln \left(\frac{1-f(p_0)}{f(p_0)} \right) + S \tilde{u} - S \frac{p_0^r}{\tilde{u} m} \left(1 + \frac{\tilde{u} S_l}{\dots} + \frac{\tilde{u} S_u}{\dots} \right) + U(p_0) \right] u \dots = 0. \quad (16)$$

بنابراین تابع توزیع به صورت زیر برحسب جرم مؤثر B که صرفاً تابع چگالی است و پتانسیل مؤثر $V(p_0)$ که علاوه بر چگالی به دما نیز وابسته است، مطرح می‌شود:

$$f(p_0) = \frac{1}{1 + \frac{e}{\tilde{u} m} S \left(\frac{p_0^r}{\tilde{u} B} + V(p_0) \right)}, \\ B = \frac{\tilde{u} m}{1 + \dots}, \quad V(p_0) = \left(\frac{-\tilde{u} T_b}{\dots} \right) \left(\frac{\tilde{u} g p_b}{h^r} \right) \left(1 + \dots \right) \left\{ \frac{(p_0)}{p_0} + (p_0) \right\}. \quad (17)$$

در روند محاسبه $V(p_0)$ به یک رابطه خودسازگار با خودش برحسب یک چگالی می‌رسیم. از آنجایی که طبق نظریه

$$e_{V_{1r}} = \frac{\tilde{u} T_b}{\dots} \left[-\dots \frac{\tilde{u}}{g} (r_l + r_u) + \dots \right] (S_l + S_u) - \left(\frac{\tilde{u} f g}{h^r} \right)^r p_b \frac{p_b^r}{\tilde{u}} (x_l + x_u) + \left(\frac{\tilde{u}}{\dots} \right)^r \frac{\tilde{u}}{g} (\tilde{u}_l + \tilde{u}_u)]. \quad (8)$$

محاسبات ماده هسته‌ای در دمای متناهی با استفاده از پتانسیل مشهور مایرزو شواتکی به صورت تعمیم این مدل از دمای صفر به دمای متناهی صورت می‌پذیرد. در دمای متناهی بر طبق آمار فرمی دیراک فرض می‌کنیم نوکلئون‌ها در یک فضای فازی توزیع می‌شوند که تابع توزیع فرمی دیراک به جای تابع توزیع پله‌ای ضریب اشغال حالت‌ها را توصیف می‌کند [۲۷-۲۹]:

$$f(p) = \frac{1}{1 + e^{\left(\frac{p^r}{\tilde{u} m} + V(p) - \mu \right)}}, \quad (9)$$

که در آن μ - ضریب نامعین لاگرانژ و $\frac{p^r}{\tilde{u} B} + V(p)$ انرژی مؤثر تک ذره در فضای فاز است. در دمای متناهی چگالی ... ماده هسته‌ای برحسب تابع توزیع $f(p)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\dots = \frac{g}{h^r} \int_0^\infty f(p) d^r p. \quad (10)$$

همچنین چگالی انرژی جنبشی مشخصه | نیز برحسب تابع توزیع به صورت زیر نوشته می‌شود:

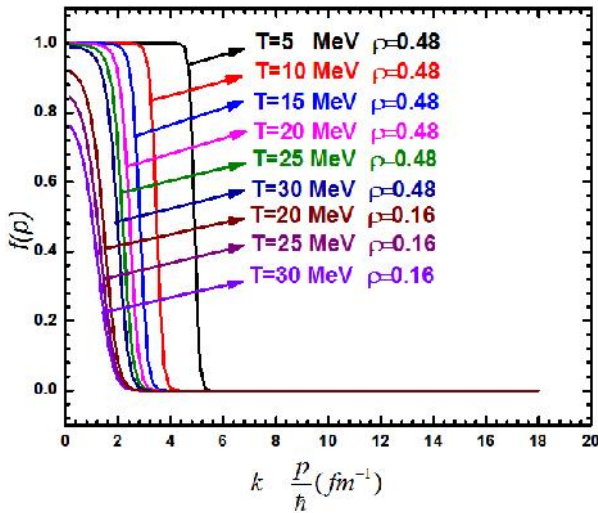
$$| = \frac{g}{h^r} \frac{1}{p_b^r} \int_0^\infty p^r f(p) d^r p. \quad (11)$$

بنابراین برای محاسبه انرژی به ازای هر نوکلئون در دمای متناهی داریم:

$$v = \frac{g}{h^r} \int_0^\infty \left[\frac{p^r}{\tilde{u} m} + \frac{1}{\tilde{u}} V_{in}(p) \right] f(p) d^r p \\ = \frac{\tilde{u} T_b}{\dots} \left[\dots \frac{\tilde{u}}{g} (r_l + r_u) + \dots \right] (S_l + S_u) - \left(\frac{\tilde{u} f g}{h^r} \right)^r p_b \left(\int_0^\infty f(p) \Psi(p) dp + \int_0^\infty f(p) p^r \Phi(p) dp \right) (x_l + x_u) + \left(\frac{\tilde{u}}{\dots} \right)^r \frac{\tilde{u}}{g} (\tilde{u}_l + \tilde{u}_u)], \quad (12)$$

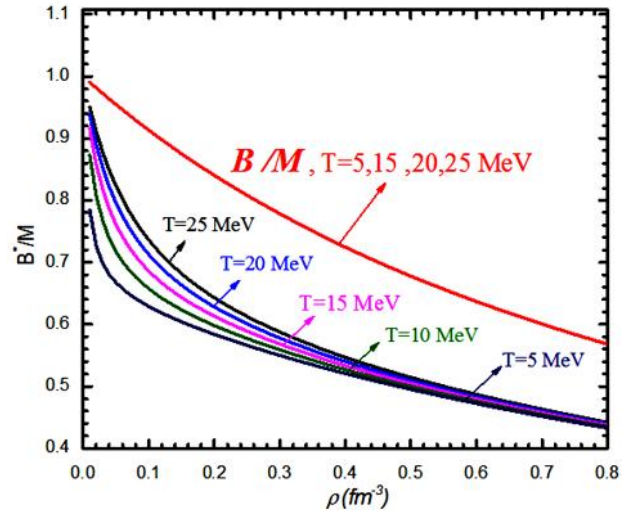
که در آن:

$$\Psi(p) = \int_0^p p^r f(p_0) dp_0, \quad \Phi(p) = \int_p^\infty p_0^r f(p_0) dp_0. \quad (13)$$



شکل ۲. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تابع توزیع در فضای فاز برحسب عدد موج در دماها و چگالی‌های مختلف.

کوچکتر از یک هستند، در چگالی‌های پایین به دلیل کاهش اثر نیروی هسته‌ای به مقدار یک نزدیک‌تر می‌شوند. با افزایش چگالی این نسبت کاهش پیدا می‌کند و دما تأثیری بر این روند نزولی ندارد. همچنین مشاهده می‌شود که جرم مؤثر تعمیم‌یافته با افزایش دما افزایش می‌یابد و به ازای دماهای مختلف و در چگالی‌های بالا، منحنی‌ها در این نمودار به همگرایی می‌رسند. این موضوع به این دلیل است که با زیاد شدن چگالی، تکانه فرمی نیز افزایش می‌یابد و در نتیجه تابع توزیع نفوذ کمتری به خارج سطح فرمی پیدا می‌کند و این به نوبه خود وابستگی دمایی را به حداقل ممکن می‌رساند. شکل ۲ رفتار تابع توزیع فرمی- دیراک برحسب عدد موج $k = \frac{p}{\hbar}$ را به ازای چگالی‌ها و دماهای مختلف نشان می‌دهد. این رفتار نزولی بوده و در فاصله کوچکی از تغییرات K تابع توزیع از مقدار بیشینه خود سریعاً به صفر میل می‌کند. چنین افتی که در حوالی تکانه فرمی ذرات رخ می‌دهد، ویژگی یک مایع کوانتومی چگال را به خوبی نمایان می‌کند که با افزایش چگالی دیرتر و با افزایش دما زودتر نمایان می‌شود. رفتار پتانسیل مؤثر $V(p)$ برحسب عدد موج در چگالی اشباع ماده هسته‌ای متقارن در شکل ۳ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش دما پتانسیل مؤثر تک‌ذره افزایش پیدا می‌کند. این افزایش به نوبه خود گسترش ناحیه



شکل ۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نسبت جرم مؤثر تعمیم‌یافته نوکلئونی به جرم متوسط نوکلئونی B^*/M . برحسب چگالی نوکلئونی در دماهای مختلف B/M جرم مؤثر نوکلئونی است.

پدیده‌شناسی لاندائو رفتار چنین پتانسیلی در تابع توزیع برای تکانه‌های حول تکانه فرمی، نقشی تعیین کننده در اشغال حالت‌ها در فضای فاز دارد، از این رو برای بالا بردن بازده محاسبات تکرار کامپیوتری عبارتی در قالب انرژی جنبشی به صورت $\frac{p_0^2}{2B_1}$ را در تابع توزیع به جای $V(p_0)$ جایگزین کنیم

$$V(p_0) = \frac{p_0^2}{2B_1} \Rightarrow \partial V(p_0) = \frac{2p_0 \partial p_0}{2B_1} \Rightarrow B_1 \quad (18)$$

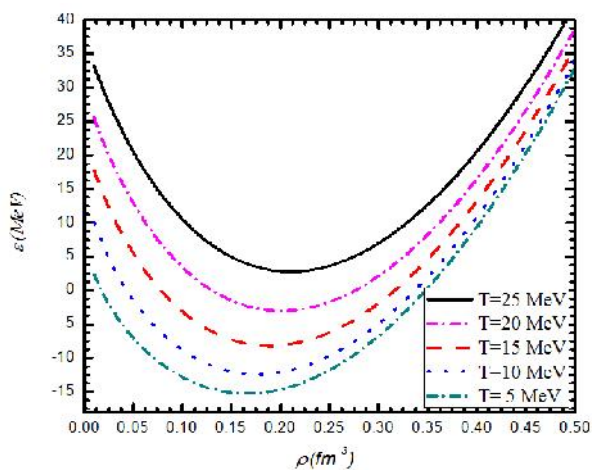
$$= \frac{p_0 \partial p_0}{\partial V(p_0)} \Rightarrow \left(\frac{1}{p_0} \frac{\partial V(p_0)}{\partial p_0} \right)_{p_F}^{-1}$$

در نتیجه شکل عبارت انرژی مؤثر تک ذره در فضای فاز به صورت زیرتبدیل خواهد شد:

$$\frac{p_0^2}{2B} + V(p_0) = \frac{p_0^2}{2B} + \frac{p_0^2}{2B_1} = \frac{p_0^2}{2B^*} \Rightarrow \frac{1}{B^*} = \frac{1}{B} + \frac{1}{B_1} \quad (19)$$

۳. نتایج عددی و بحث در مورد آنها

در شکل ۱ نسبت جرم مؤثر B و جرم مؤثر تعمیم یافته B^* به جرم متوسط نوکلئونی برحسب چگالی کل نوکلئونی، در دماهای مختلف، نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود جرم مؤثر تنها وابسته به چگالی و جرم مؤثر تعمیم یافته علاوه بر چگالی به دما نیز بستگی دارد. این کمیت‌ها که همواره



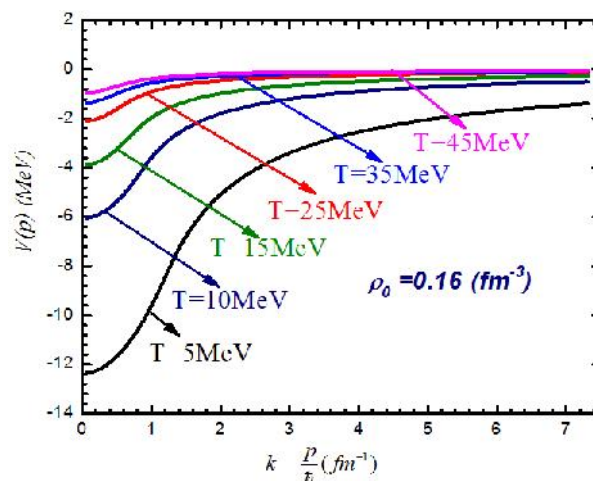
شکل ۴. (رنگی در نسخه الکترونیکی) انرژی بر نوکلئون برحسب چگالی نوکلئونی در دماهای مختلف.

مقایسه با دماهای بالا آنتروپی به ازای هر نوکلئون به آرامی کاهش پیدا می‌کند.

یکی از کمیات کلیدی در بررسی خواص دستگاه ماده هسته‌ای کمیت انرژی آزاد هلمهولتز بر نوکلئون است که از طریق رابطه زیر به وسیله کمیت‌های آنتروپی به ازای هر نوکلئون و انرژی داخلی به ازای هر نوکلئون می‌توان این کمیت را محاسبه کرد:

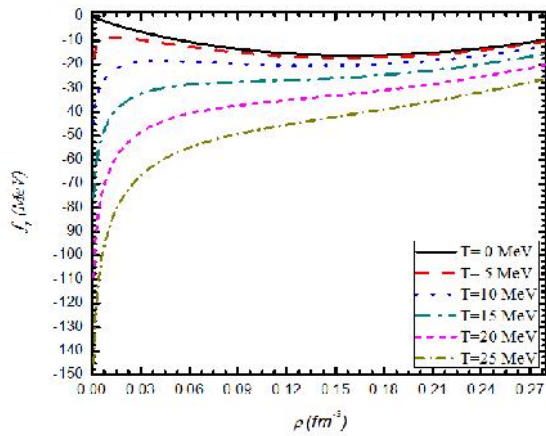
$$f_T = \nu - Ts. \quad (20)$$

نتایج حاصل برای انرژی آزاد هلمهولتز به ازای هر نوکلئون در چگالی‌های نوکلئونی در دماهای مختلف را در شکل ۶ ارائه کرده‌ایم. همان طور که در این شکل می‌بینیم به ازای افزایش دما در چگالی‌های مختلف مقدار انرژی آزاد هلمهولتز کاهش پیدا می‌کند. در چگالی‌های پایین هرچه به سمت دماهای بالاتر می‌رویم در انرژی آزاد تغییرات بیشتری مشاهده می‌شود. کمینه انرژی آزاد هلمهولتز بیانگر رسیدن به نوعی حالت تعادل در نیروهای هسته‌ای دستگاه ماده هسته‌ای متقارن است که برای مثال در دمای صفر برای چگالی اشباع. این حالت کمینه رخ می‌دهد. با داشتن کمیت کلیدی و مهم انرژی آزاد می‌توان به راحتی به تشریح خواص ترمودینامیکی دستگاه ماده هسته‌ای متقارن پرداخت. اولین گام مهم برای توصیف چنین دستگاه‌های همگنی معادله حالت دستگاه^۱



شکل ۳. (رنگی در نسخه الکترونیکی) پتانسیل مؤثر تک‌ذره‌ای در فضای فاز برحسب عدد موج در چگالی اشباع ماده هسته‌ای به ازای دماهای مختلف.

هموار منحنی‌ها را در پی دارد و مشابه تابع توزیع تغییر عمده در آنها در حوالی تکانه فرمی رخ می‌دهد. منحنی‌های هم دمای انرژی نهان به ازای هر نوکلئون در دماهای ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰ و ۲۵ (MeV) در شکل ۴ رسم شده است. در این شکل می‌بینیم که به ازای افزایش چگالی نوکلئونی، در ابتدا شاهد یک روند رو به کاهش و سپس روبه افزایش انرژی بر نوکلئون هستیم. هر چه به سمت چگالی‌های بالاتر حرکت می‌کنیم، نمودارها به همدیگر نزدیکتر می‌شوند و این یعنی انرژی نهان به ازای هر نوکلئون در دستگاه ماده هسته‌ای در چگالی‌های پایین تغییرات قابل توجهی نسبت به چگالی‌های بالا دارد. همان طور که مشاهده می‌کنیم به ازای افزایش دما، منحنی‌ها به سمت انرژی‌های بالاتر سوق پیدا می‌کند. از آنجا که هر کدام از منحنی‌ها دارای یک کمینه است، این کمینه‌ها به ازای افزایش دما به سمت چگالی‌های بالاتر می‌روند و به مقادیر مثبت می‌رسند. شکل ۵ آنتروپی بر نوکلئون را برحسب چگالی در دماهای مختلف نشان می‌دهد. همان گونه که می‌بینیم به ازای افزایش چگالی نوکلئونی، آنتروپی به ازای هر نوکلئون ماده هسته‌ای متقارن کاهش می‌یابد. عمده این تغییرات در ناحیه مربوط به چگالی‌های پایین است. آنتروپی به ازای هر نوکلئون با افزایش دما افزایش پیدا می‌کند و در چگالی‌های بالاتر منحنی‌های هم دما به هم نزدیک می‌شوند. این افزایش آنتروپی به ازای افزایش دما یک انتقال فاز را نشان می‌دهد. همچنین در دماهای پایین در



شکل ۶. (رنگی در نسخه الکترونیکی) انرژی آزاد هلمهولتز بر نوکلئون برحسب چگالی نوکلئونی در دماهای مختلف.

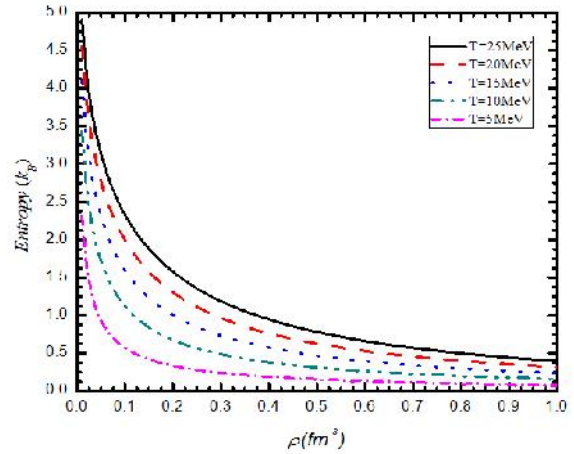
ترمودینامیکی دستگاه برخوردار است. پتانسیل شیمیایی یک کمیت ترمودینامیکی است که انتقال ذرات در بین دستگاه‌ها را در حال تعادل تنظیم می‌کند. پتانسیل شیمیایی نیز از طریق مشتق انرژی آزاد هلمهولتز نسبت به چگالی تعیین می‌شود

$$\mu_c = \left(\dots \frac{\partial f_r(\dots, T)}{\partial \dots} + f_r \right). \quad (22)$$

برای ماده هسته‌ای متقارن پتانسیل شیمیایی از طریق رابطه فوق برحسب چگالی نوکلئونی در دماهای مختلف در شکل ۸ رسم شده است. همان طور که در این شکل می‌بینیم بیشترین تغییرات پتانسیل شیمیایی در چگالی‌های پایین صورت می‌گیرد و در چگالی‌های بالا با افزایش چگالی نوکلئونی، پتانسیل شیمیایی نیز افزایش می‌یابد و منحنی‌های هم‌دما به یکدیگر نزدیک می‌شوند. همچنین در این شکل می‌بینیم که با افزایش دما در چگالی‌های مختلف مقدار پتانسیل شیمیایی منفی‌تر شده، یا به عبارتی مقدار آن کاهش پیدا کرده است. همچنین در دماهای پایین شاهد تغییرات بیشتری برای پتانسیل شیمیایی برحسب چگالی هستیم به گونه‌ای که با افزایش چگالی نوکلئونی در ابتدا یک کاهش در مقادیر پتانسیل شیمیایی و سپس یک روند صعودی را می‌بینیم.

در ادامه به بررسی کمیت تراکم‌ناپذیری هم‌دما برای ماده هسته‌ای که به شکل زیر از طریق مشتق مرتبه اول و دوم انرژی آزاد هلمهولتز برحسب چگالی به دست می‌آید، می‌پردازیم:

$$K = 9 \dots \frac{\partial^2 f_r}{\partial \dots^2} + 18 \dots \frac{\partial f_r(\dots, T)}{\partial \dots} = 9 \frac{\partial P}{\partial \dots}. \quad (23)$$



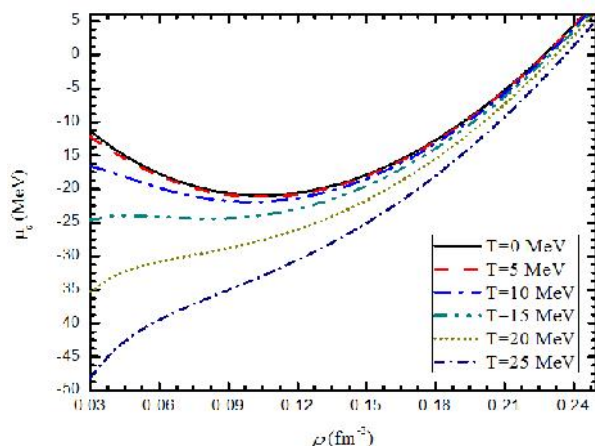
شکل ۵. (رنگی در نسخه الکترونیکی) آنتروپی بر نوکلئون برحسب چگالی نوکلئونی در دماهای مختلف.

است، که بالاخص از طریق فشار که با محاسبه مشتق انرژی آزاد نسبت به چگالی به دست می‌آید، تعیین می‌شود

$$P(\dots, T) = \dots \frac{\partial f_r(\dots, T)}{\partial \dots}. \quad (21)$$

در شکل ۷ با به دست آوردن فشار برحسب چگالی در دماهای مختلف می‌توان مشاهده کرد که رفتار کلی معادله حالت مطابق با یک رفتار واندروالسی است [۲۴]. یکی از موارد اهمیت کمیت فشار در مورد یافتن نقطه بحرانی می‌باشد، که در ادامه به آن می‌پردازیم. با توجه به این شکل می‌بینیم که قله و در، منحنی‌های هم‌دما و اندروالس‌گونه با افزایش دما به یکدیگر نزدیک‌تر می‌شوند، تا این که هر دو نقطه بر هم منطبق شده و در نهایت یک روند صعودی کامل خواهیم داشت. برای نمونه در دمای ۲۰ MeV منحنی مربوطه کاملاً از یک روند صعودی برحسب چگالی برخوردار است. همچنین می‌بینیم که از یک دمایی به بعد، فشار منفی وجود ندارد. پایین‌ترین دمایی که در آن به ازای همه مقادیر چگالی، فشار منفی وجود ندارد، دمای حدی T_{lim}^2 نامیده می‌شود [۲۷ و ۲۹]. طبق محاسباتی که به وسیله این مدل به دست آمده دمای حدی را برای ماده هسته‌ای متقارن را ۱۲/۸ MeV به دست آورده‌ایم که به مقدار ۱۲/۹ MeV از مرجع [۲۹] بسیار نزدیک است. در کنار فشار کمیت نافزونور پتانسیل شیمیایی نیز از اهمیت به سزایی در بررسی خواص

۲. Limiting temperature



شکل ۸. (رنگی در نسخه الکترونیکی) پتانسیل شیمیایی برحسب چگالی نوکلئونی در دماهای مختلف.

است که در مرحله گذار در بین دو فاز باید تعادل دمایی، تعادل مکانیکی و تعادل شیمیایی برقرار باشد. بنابراین در تحلیل فازی برای منحنی‌های هم‌دما باید دو نوع تعادل، تعادل مکانیکی و شیمیایی برقرار باشد. از این شرط به ثابت بودن فشار و پتانسیل شیمیایی برای هر دو فاز در حین گذار می‌رسیم

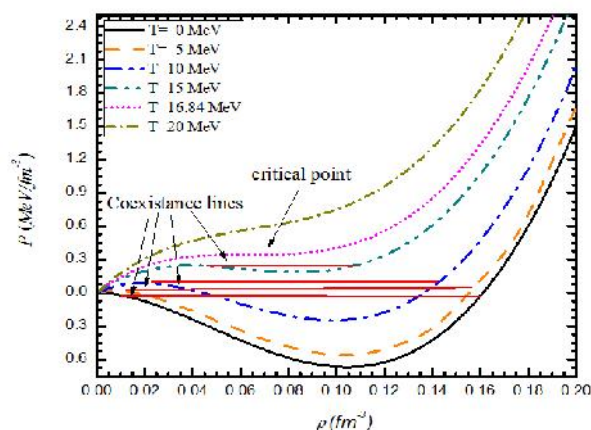
$$\begin{aligned} P_{\tau}(\dots_{\text{liquid}} T) &= P_{\tau}(\dots_{\text{gas}} T) \\ \mu_{\tau}(\dots_{\text{liquid}} T) &= \mu_{\tau}(\dots_{\text{gas}} T). \end{aligned} \quad (24)$$

\dots_{gas} و \dots_{liquid} به ترتیب چگالی مایع و گاز است. این شرایط تعادل را می‌توان از قانون فاز گیبس به دست آورد. قانون گذار فاز گیبس ارتباط میان تعداد فازهای در حال تعادل با درجات آزادی را بیان می‌کند. در گذار فاز یک ناحیه هم‌فازی وجود دارد که در طی آن هر دو فاز به صورت مخلوطی از هم وجود دارند که به وسیله تحلیل ماکسول^۳ می‌توان به تحلیل این ناحیه پرداخت. مطابق با شکل ۱۰ که منحنی فاز ماده هسته‌ای متقارن در فضای چگالی برحسب دما را نشان می‌دهد، این ناحیه را می‌توان به دو بخش اسپنودال (ناپایدار)^۴ و شبه‌پایدار^۵ تقسیم‌بندی کرد. در ناحیه ناپایدار مکانیکی تراکم‌ناپذیری منفی است $\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} < 0\right)$ [۳۴-۳۷]. بیشترین ناحیه ناپایداری را در دمای صفر داریم و هرچه به سمت دماهای بالاتر می‌رویم این

۳. Maxwell construction

۴. Spinodal instabilities

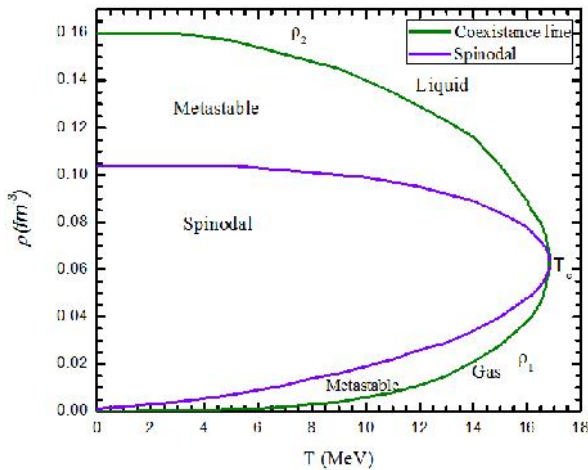
۵. Metastable



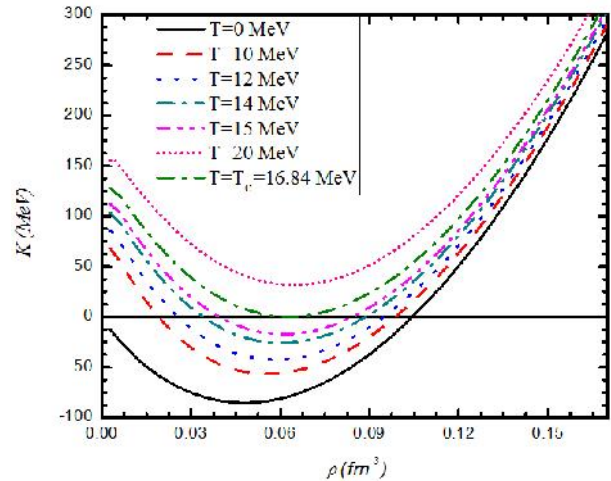
شکل ۷. (رنگی در نسخه الکترونیکی) فشار برحسب چگالی نوکلئونی در دماهای مختلف.

منحنی‌های هم‌دما تراکم‌ناپذیری به ازای هر نوکلئون در دماهای مختلف برحسب چگالی در شکل ۹ رسم شده است. مشاهده می‌شود که افزایش دما سبب افزایش تراکم‌ناپذیری می‌شود و به ازای یک دمای ثابت روند نزولی تغییرات تراکم‌ناپذیری در چگالی‌های پایین به چشم می‌خورد. همچنین منحنی‌ها دارای یک کمینه هستند، که به ازای افزایش دما نقطه کمینه به سمت مقادیر تراکم‌ناپذیری بالاتری سوق پیدا می‌کند. منحنی‌های هم‌دما تراکم‌ناپذیری حاوی اطلاعات بسیاری مهمی در مورد شرایط پایداری مکانیکی در دستگاه هستند و مقادیر منفی تراکم‌ناپذیری در آنها حکایت از ناپایداری مکانیکی در دستگاه به ازای چگالی‌های متناظر دارد.

دستگاه‌های ترمودینامیکی می‌توانند در فازهای مختلفی وجود داشته باشند. که هر کدام از این فازها نیز می‌توانند دارای رفتار ماکروسکوپیکی متفاوتی باشند و با تغییر شرایط در آنها گذار فاز نیز می‌تواند رخ دهد. گذار فاز مرحله‌ای است که دو فاز موجود می‌توانند به آرامی به هم تبدیل شوند. در ماده هسته‌ای متقارن نیز می‌توان با افزایش دما گذار فازهایی از نوع مایع-گاز را بررسی کرد. بررسی گذار فاز ماده هسته‌ای متقارن درک عمیقی از ترمودینامیک دستگاه‌های هسته‌ای را ارائه می‌دهد. برای درک گذار فاز، لازم است تا شرایطی که طی آن یک گذار فاز می‌تواند رخ دهد را بررسی کنیم. همان طور که در قسمت‌های قبل اشاره‌ای کردیم از جمله شرایط گذار این



شکل ۱۰. (رنگی در نسخه الکترونیکی) منحنی فاز ماده هسته‌ای متقارن در فضای چگالی برحسب دما.



شکل ۹. (رنگی در نسخه الکترونیکی) ضریب تراکم‌ناپذیری برحسب چگالی نوکلئونی در دماهای مختلف.

(۲۶)
$$\frac{\dots_{\text{liquid}} - \dots_{\text{gas}}}{\dots_C} \propto \left| 1 - \frac{T}{T_C} \right|^c$$
 در عبارت بالا تفاضل چگالی دو فاز (liquid - gas) پارامتر نظم نام دارد. در دماهای بالاتر از دمای بحرانی این پارامتر نظم برابر صفر است. نتایج حاصل از محاسبات مقدار $S_c = 0.464$ را به ما می‌دهد، که این مقدار را می‌توانیم با مقدار عمومی $S_c = \frac{1}{4}$ [۳۳] مقایسه کنیم.

۴. نتیجه‌گیری

در این تحقیق ما با ارائه مدل نیمه کلاسیکی توماس- فرمی که مبتنی بر تحلیل آماری در فضای فاز است، با ارائه یک رهیافت آماری جدید مبتنی بر ارائه مفهوم جرم مؤثر تعمیم‌یافته، تابع توزیع و همچنین کمیت‌های مختلف ترمودینامیکی ماده هسته‌ای متقارن را به دست آوردیم. محاسبات مبتنی بر کمیت کلیدی جرم مؤثر تعمیم‌یافته که علاوه بر چگالی به دما هم بستگی دارد و برحسب رفتار پتانسیل مؤثر تک‌ذره‌ای حول تکانه فرمی ماده هسته‌ای متقارن به دست آید، مزیت قابل توجهی هم از حیث دقت و هم از حیث زمان محاسبه در تعیین کمیت‌های ترمودینامیکی به ما ارائه می‌کنند و به گونه‌ای تحلیل خواص ترمودینامیکی مهم نظیر گذار فازها را برای رسیدن به نتایج کلیدی هموار و قابل دستیابی کنند. نتایج حاصل از این

ناحیه ناپایدار کم و کمتر می‌شود تا در نهایت از یک ناحیه تبدیل به یک نقطه آستانه موسوم به نقطه بحرانی می‌رسد. در این نقطه شرایط زیر می‌بایستی برقرار باشد:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \dots} \right|_{T_C, \dots_C} = \left. \frac{\partial K}{\partial \dots} \right|_{T_C, \dots_C} = 0 \Rightarrow T_C = 16.84 \text{ MeV}, \dots_C = 0.63 \text{ fm}^{-3}. \quad (25)$$

بنابراین دمای بحرانی نقطه عطف منحنی فشار است که در آن کمینه و بیشینه رفتار واندروالسی فشار به هم رسیده‌اند. پس از دمای بحرانی دستگاه ماده هسته‌ای صرفاً در فاز گازی است و در همه جا $\frac{\partial P}{\partial} > 0$ است. به عبارتی دیگر در نقطه بحرانی با هر تغییر کوچکی می‌توان از فاز گاز به فاز مایع یا برعکس رفت و این نقطه یکتاست. همان گونه که در این شکل می‌بینیم ناحیه ناپایدار در درون ناحیه هم‌فازی قرار دارد. هر دو ناحیه پایدار و ناپایدار در نقطه بحرانی به یکدیگر می‌رسند. مقدار پیش‌بینی شده برای دمای بحرانی در این مدل با مقادیر ۱۴/۳ [۳۸]، ۱۷/۱۹ [۲۷]، ۱۶/۷ [۲۹] و مقدار تجربی ۱۷/۰ مگا الکترون ولت با خطای یک واحد [۳۹] در توافق است. بهترین راه برای تعیین رفتار دستگاه‌هایی که به نقطه بحرانی می‌رسند، استفاده از نمایه‌های بحرانی است که مقادیر آنها بعضاً به نوع دستگاه ترمودینامیکی بستگی ندارد. یکی از این نمایه‌های مهم پارامتر S_c است که از طریق رابطه زیر به دست می‌آید

تشکر و قدردانی

حمایت از این تحقیق از محل اعتبارات معاونت پژوهشی دانشگاه کاشان با شماره گرنت ۴۶۳۸۳۶/۱ صورت گرفته است.

مدل در توافق با مدل‌های مطرح دیگر در این زمینه است. تعمیم این مدل می‌تواند کاربرد وسیع خود از دستگاه‌های مادهٔ هسته‌ای با توزیع متناهی گرفته تا ساختارهای پیچیده‌تر بار یونی در دماهای مختلف را به خوبی نشان دهد.

مراجع

- 57 (1998) 3484.
22. G H Bordbar, *Iranian Journal of Physics Research* **3** (2001) 1.
۲۲. گ ح بردبار، مجله پژوهش فیزیک ایران **۳** (۱۳۸۰) ۱.
23. D Serot and J D Walecka, *Adv. Nucl. Phys.* **16** (1986) 1.
24. H Müller and B D Serot, *Nucl. Phys. A* **606** (1996) 508.
25. H Müller and B D Serot, *Phys. Rev. C* **52** (1995) 2072.
26. E Chabanat, P Bonche, P Haensel, J Mayer, and R Schaeffer, *Nucl. Phys. A* **635** (1998) 231.
27. S W Huang, M Z FU, S S Wu, and S D Yang, *Mod. Phys. Lett. A* **5** (1990) 1071.
28. J Randrup and E Lima Medeiros, *Nucl. Phys. A* **526**, (1991) 115.
29. K Strobel, F Weber, and M K Weigel, *ZNaturforsch* **54a** (1999) 83.
30. H R Moshfegh, M Ghazanfari Mojarrad, *J. Phys. G* **15** (2011).
31. W D Myers and W J Swiatecki, *Ann. Phys.* **204** (1990) 401.
32. W D Myers and W J Swiatecki, *Nucl. Phys. A* **601** (1996) 141.
33. H R Moshfegh, M Ghazanfari Mojarrad, *Eur. Phys. J. A* **49.1** (2013) 1.
34. R K Pathria, "Statistical Mechanics," Oxford: Butterworth-Heinemann (1996).
35. D Alonso and F Sammarruca, *Phys. Rev. C* **67** (2003) 054301.
36. J Margueron, and Ph Chomaz, *Phys. Rev. C* **67** (2003) 041602R.
37. Ph Chomaz and C Colonna, *J. Randrup, Phys. Rep.* **389** (2004) 263.
38. C Ducoin, Ph Chomaz, and F Gulminelli, *Nucl. Phys. A* **789** (2007) 403.
39. P Wang, *Phys. Rev. C* **61** (2000) 54904.
40. B V Jacak, C et al., *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 1846.
1. B Borderie et al., *Nucl. Phys. A* **734** (2004) 495.
2. M F Rivet et al., *Nucl. Phys. A* **749** (2005) 73.
3. N K Glendenning, "Compact Stars," New York: Springer (1997).
4. H A Bethe, *Rev. Mod. Phys.* **62** (1990) 801.
5. P Haensel, A Y Potekhin, D G Yakovlev, "Neutron Stars 1: Equation of State and Structure," Springer Science and Business Media **326** (2007).
6. S L Shapiro and S A Teukolsky, "Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars", John Wiley and Sons, New York (1983).
7. M Camenzind, "Compact Objects in Astrophysics," Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2007).
8. C F von Weizsacker, *Z. Phys.* **96** (1935) 431.
9. H A Bethe and R F Bacher, *Rev. Mod. Phys.* **8** (1936) 82.
10. A Rios, A Polls, A Ramos, and H Müther, *Phys. Rev. C* **78** (2008) 044314.
11. A Rios, A Polls, and I Vidana, *Phys. Rev. C* **79** (2009) 025802.
12. M Modarres and H R Moshfegh, *Prog. Theo. Phys.* **112** (2004) 21.
13. B Friedman and V R Pandharipande, *Nucl. Phys. A* **361** (1981) 502.
14. I E Lagaris and V R Pandharipande, *Nucl. Phys. A* **359** (1981) 331.
15. R B Wiringa, V Ficks, and A Fabrocini, *Phys. Rev. C* **38** (1988) 1010.
16. R B Wiringa, V G J Stoks, and R Schiavilla, *Phys. Rev. C* **51** (1995) 38.
17. A Akmal, V R Pandharipande, and D G Ravenhall, *Phys. Rev. C* **58** (1998) 1804.
18. M Baldo, "Nuclear Methods and the Nuclear Equation of State", Singapore: World Scientific, (1990).
19. W Zuo, Z H Li, A Li, and U Lombardo, *Nucl. Phys. A* **745** (2004) 34.
20. M Baldo, A Fiasconaro, H Q Song, G Giansiracusa, and U Lombardo, *Phys. Rev. C* **65** (2002) 017303.
21. H Huber, F Weber, and M K Weigel, *Phys. Rev. C*