

## رفع تبهگنی ناهمخوانی‌های کوانتومی چپ و راست در میدان مغناطیسی ناهمگن

طیبه مکارمی<sup>۱</sup> و حمیدرضا محمدی خشوئی<sup>۲</sup>

۱. گروه فیزیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

۲. گروه پژوهشی اپتیک کوانتومی، دانشگاه اصفهان، اصفهان

پست الکترونیکی: hr.mohammadi@sci.ui.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۱۲/۰۴؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۸/۰۴/۱۷)

### چکیده

در این مقاله، به بررسی اثر ناهمگنی مغناطیسی بر ناهمخوانی حالت گرمایی در یک سامانه کوانتومی شامل دو اسپین با برهم‌کنش همسانگرد هاینبرگ می‌پردازیم. حضور ناهمگنی میدان مغناطیسی منجر به از بین رفتن تقارن ناهمخوانی کوانتومی چپ و راست در سامانه می‌شود. نتایج به دست آمده در این مقاله در فرایند آماده سازی حالت‌های کوانتومی کاربرد دارد.

### واژه‌های کلیدی: ناهمخوانی کوانتومی چپ و راست، ناهمگنی میدان مغناطیسی

#### ۱. مقدمه

با هم یکسان هستند، تعریف کردند [۱ و ۲]. برای محاسبه ناهمخوانی کوانتومی در یک سامانه دو بخشی، روی یکی از زیر سامانه‌ها مخرب‌ترین اندازه‌گیری ممکن انجام می‌شود به طوری که همبستگی باقیمانده بین بخش‌های سامانه فقط از جنس همبستگی‌های کلاسیکی شود. حال اختلاف کل همبستگی‌ها (قبل از اعمال اندازه‌گیری) و همبستگی‌های کلاسیکی (بعد از اندازه‌گیری) همبستگی‌های کوانتومی را نتیجه می‌دهد، که به ناهمخوانی کوانتومی موسوم است [۱ و ۲]. این سنجه از همبستگی‌های کوانتومی تحت این که روی کدام زیر سامانه اندازه‌گیری شود، نامتقارن است. این دستاوردها، چشم‌انداز تازه‌ای را پیش روی محققین اطلاعات

در نظریه اطلاعات کوانتومی، تعیین همبستگی‌های کوانتومی نقش اساسی بازی می‌کند. تا سال ۲۰۰۱، محققین تصور می‌کردند که همه همبستگی‌های کوانتومی تنها در مفهوم درهم‌تنیدگی<sup>۱</sup> خلاصه می‌شوند. در سال ۲۰۰۱، ناهمخوانی کوانتومی<sup>۲</sup> به عنوان نوعی همبستگی کوانتومی که برخلاف درهم‌تنیدگی برای حالت‌های جداپذیر صفر نیست، معرفی شد. محققین ناهمخوانی کوانتومی را به صورت اختلاف دو بیان کوانتومی از مفهوم اطلاعات متقابل<sup>۳</sup>، که در بیان کلاسیکی

۱. Entanglement

۲. Quantum discord

۳. Mutual information

در یک سامانه دو بخشی عبارتند از:

$$\begin{aligned} I(\rho) &= S(\rho^A) + S(\rho^B) - S(\rho), \\ J_B(\rho) &= S(\rho^A) - S(\rho^A | \rho^B). \end{aligned} \quad (1)$$

در اینجا  $S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho)$  آنتروپی وان نویمن است. هر گاه اندازه‌گیری  $\{\pi_j^i\}$ ، روی زیرسامانه  $\{i = A, B\}$  انجام شود، اختلاف بین دو بیان فوق، به صورت ناهمخوانی کوانتومی برای زیرسامانه  $i$ ، تعریف می‌شود. این معیار وابسته به زیرسامانه مورد اندازه‌گیری است و بنابراین در حالت کلی نامتقارن است [۳]. از سوی دیگر، همبستگی کلاسیکی، عبارتست از:

$$CC^i(\rho) = \max_{\{\pi_j^i\}} [J_{\{\pi_j^i\}}(\rho)], \quad (2)$$

بنابراین، ناهمخوانی کوانتومی، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} QD_i &= I(\rho) - \max_{\{\pi_j^i\}} [J_{\{\pi_j^i\}}(\rho)] \\ &= S(\rho^i) - S(\rho) + \max_{\{\pi_j^i\}} S(\rho^i | \{\pi_j^i\}). \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن  $\{i = A, B\}$  و  $\bar{i}$  مکمل  $i$  است.  $QD_A$  را ناهمخوانی چپ و  $QD_B$  را ناهمخوانی راست می‌نامیم [۸ و ۱۱].

از میان سنج‌هایی که برای محاسبه درهم‌تنیدگی ارائه شده است، درهم‌تنیدگی تشکیل اهمیت ویژه‌ای دارد. وترز<sup>۳</sup> و همکاران نشان دادند [۱۲ و ۱۳] که درهم‌تنیدگی تشکیل برای دستگاه‌های ۲×۲ با حالت معلوم (ماتریس چگالی)  $\rho$  را می‌توان

از رابطه  $E(\rho) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right)$  به دست آورد. که در آن

$h(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$  تابع آنتروپی دودویی و  $C(\rho) = \text{Max}\left\{0, 2\lambda_{\max} - \sum_{i=1}^2 \lambda_i\right\}$  و تلاقی<sup>۴</sup> نام دارد. در

رابطه اخیر  $\lambda_i$  ها جذر ریشه‌های ماتریس غیرهرمیتی  $R = \rho \tilde{\rho}$  هستند که در آن  $\rho = (\sigma^y \otimes \sigma^y) \rho^* (\sigma^y \otimes \sigma^y)$  و  $\tilde{\rho} = (\sigma^y \otimes \sigma^y) \rho (\sigma^y \otimes \sigma^y)$  ماتریس جهش اسپینی<sup>۵</sup> و  $\sigma^y$  ماتریس پاولی است.  $E(C(\rho))$  یک تابع افزایشی یکنوا از  $C$  است. همچنین وقتی  $C$  بین ۰ تا ۱ تغییر می‌کند  $E(C(\rho))$  نیز بین صفر و ۱ تغییر می‌کند. بنابراین می‌توان مقدار  $C$  را برابر با میزان درهم‌تنیدگی دستگاه در نظر گرفت.

کوانتومی گشود [۳ و ۴]. در سال ۱۹۹۸ میلادی نیلسن<sup>۱</sup>، با محاسبه درهم‌تنیدگی کوانتومی برای حالت گرمایی یک سامانه دواسپینی با برهم‌کنش هایزنبرگ نشان داد که درهم‌تنیدگی برای مورد پادفرومغناطیس بر خلاف مقوله فرومغناطیس در زیر یک دمای بحرانی،  $T_c$ ، وجود دارد [۵]. در این نوع سامانه‌ها، می‌توان با اعمال میدان مغناطیسی خارجی، درهم‌تنیدگی را در دمای بالاتر برای سامانه حفظ نمود. بدین معنی که می‌توان با اعمال میدان مغناطیسی، دمای بحرانی،  $T_c$ ، را افزایش داد. اگر میدان مغناطیسی اعمال شده روی هریک از اسپین‌ها متفاوت باشد، کمیت کنترل دیگری به نام ناهمگنی میدان مغناطیسی را در دست خواهیم داشت [۵ و ۶]. اثر کمیت‌های مختلف بر دینامیک ناهمخوانی کوانتومی در سامانه‌های اسپینی در مرجع [۷] بررسی شده است. نتایج این مقاله نشان می‌دهد که ناهمخوانی کوانتومی در مقابل واهمدوسی القا شده توسط محیط مقاوم‌تر از درهم‌تنیدگی است.

در این مقاله، قصد داریم که اثر ضریب ناهمگنی میدان مغناطیسی را بر ناهمخوانی کوانتومی سامانه (که خود یک سنج نامتقارن برای همبستگی کوانتومی است) بررسی کنیم. بررسی تقارن برای ناهمخوانی کوانتومی در مقوله‌های گذار فاز کوانتومی، سامانه‌های کوانتومی باز و سامانه‌های زیستی اهمیت ویژه‌ای دارد [۸]. از طرفی در نظریه داروینسم کوانتومی<sup>۲</sup>، نامتقارن بودن ناهمخوانی کوانتومی علت اصلی گذار از دنیای کوانتومی به دنیای کلاسیکی گزارش می‌شود [۹ و ۱۰]. همچنین تولید حالت‌های با ناهمخوانی چپ و راست متفاوت می‌تواند در سنجش میزان مارکوفی بودن دینامیک سامانه‌های باز کوانتومی نقش مهمی ایفا کند.

## ۲. همبستگی‌های کوانتومی: ناهمخوانی و درهم‌تنیدگی

همبستگی کل در یک سامانه دویخشی توسط معیار اطلاعات متقابل سنجیده می‌شود. اطلاعات متقابل کلاسیکی و کوانتومی

۳. Wootters

۴. Concurrence

۵. Spin flip

۱. Nielson

۲. Quantum Darwinism

## ۳. مدل و هامیلتونی

یک سامانه دو کیوبیتی هایزنبرگ با برهم‌کنش همسانگرد که در یک میدان مغناطیسی ناهمگن قرار دارد، توسط هامیلتونی زیر توصیف می‌شود:

$$H = J\bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2 + (B+b)\sigma_{1z} + (B-b)\sigma_{2z}, \quad (4)$$

که در آن  $J$ ، جفت‌شدگی همسانگرد بین اسپین‌هاست،  $B \geq 0$  میدان مغناطیسی خارجی است و  $b$  درجه ناهمگنی آن را کنترل می‌کند. حالت گرمایی این سامانه در دمای  $T$ ، به صورت

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}$$

تعریف می‌شود، به طوری که  $\beta = \frac{1}{KT}$  و  $K$  ثابت بولتزمن و  $Z := \text{tr} e^{-\beta H}$  تابع پارش است. بنابراین،

ماتریس چگالی به صورت زیر خواهد بود:

$$\rho = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_- & v & 0 \\ 0 & v & w_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

که عناصر این ماتریس چگالی به فرم زیر است:

$$\begin{aligned} u_1 &= e^{-\beta(\gamma B + J)}, u_2 = e^{\beta(\gamma B - J)}, \\ w_{\pm} &= e^{J\beta} \left( \cosh(\gamma) \pm \frac{\gamma b \beta}{\gamma} \sinh(\gamma) \right), \\ v &= \frac{J\beta(e^{\gamma} - 1)e^{(J\beta - \gamma)}}{\gamma}, \end{aligned} \quad (6)$$

که  $\gamma = \sqrt{2\beta} \sqrt{b^2 + J^2}$  عبارتست از:

$$Z = u_1 [1 + e^{\beta B} + e^{\beta(B+J)} \cosh(\gamma)]. \quad (7)$$

ویژه مقادیر ماتریس چگالی این سامانه عبارتند از [۴]:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{1}{2} \left( \frac{u_1 + u_2}{Z} + \left| \frac{u_1 - u_2}{Z} \right| \right), \\ \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{u_1 + u_2}{Z} - \left| \frac{u_1 - u_2}{Z} \right| \right), \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{w_+ + w_-}{Z} + \sqrt{\left| \frac{v}{Z} \right|^2 + \left( \frac{w_+ - w_-}{Z} \right)^2} \right), \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2} \left( \frac{w_+ + w_-}{Z} - \sqrt{\left| \frac{v}{Z} \right|^2 + \left( \frac{w_+ - w_-}{Z} \right)^2} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

اگر اندازه‌گیری روی زیرسامانه  $B$ ، انجام شود ناهمخوانی راست از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$QD_B = \max[I(\rho) - C_{\max}],$$

که اگر  $\xi = \sqrt{\left| \frac{v}{Z} \right|^2 + \left( \frac{u_1 - u_2 + w_- - w_+}{Z} \right)^2}$  باشد، داریم:

$$\begin{aligned} C_{\max} &= S(\rho^A) - \min[C_{m_1}, C_{m_2}], \\ C_{m_1} &= \frac{1}{Z} \left[ u_1 \log_2 \left( \frac{w_+ + u_1}{u_1} \right) + u_2 \log_2 \left( \frac{w_- + u_2}{u_2} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{Z} \left[ w_- \log_2 \left( \frac{w_- + u_2}{w_-} \right) + w_+ \log_2 \left( \frac{w_+ + u_1}{w_+} \right) \right], \\ C_{m_2} &= -\frac{1-\xi}{2} \log_2 \left( \frac{1-\xi}{2} \right) - \frac{1+\xi}{2} \log_2 \left( \frac{1+\xi}{2} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

به طور مشابه، می‌توان رابطه مربوط به ناهمخوانی کوانتومی چپ را نیز به دست آورد.

## ۴. بحث و نتایج

## ۴.۱. بررسی ناهمخوانی کوانتومی برای سامانه در غیاب

## میدان مغناطیسی

در ابتدا سامانه را در شرایط  $B=0$  و  $b=0$  قرار می‌دهیم که فاقد هر گونه میدان مغناطیسی باشد. با توجه به شکل ۱، ملاحظه می‌شود که علیرغم جداپذیری حالت سامانه در تمامی دماها، ناهمخوانی کوانتومی چپ و راست برای این سامانه برابر بوده و زیر یک دمای بحرانی ناصفر است. ملاحظه می‌شود که سامانه جداپذیر است درحالی‌که ناهمخوانی کوانتومی چپ و راست در این سامانه غیر صفر و باهم برابرند.

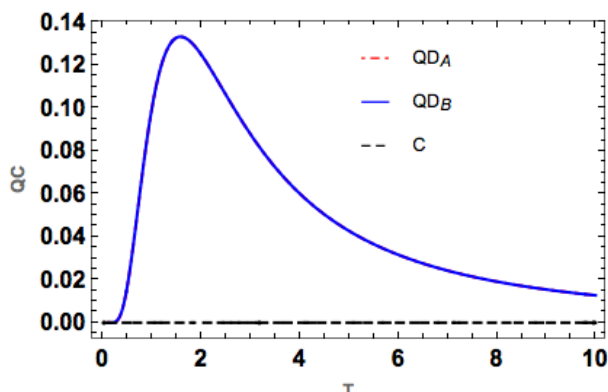
## ۴.۲. بررسی اثر میدان همگن بر ناهمخوانی کوانتومی

اگر میدان مغناطیسی به صورت همگن بر سامانه وارد شود، به عبارت دیگر،  $b=0$  و  $B \neq 0$  باشد، مطابق شکل ۲، حضور میدان مغناطیسی باعث می‌شود، ناهمخوانی کوانتومی در این سامانه ابتدا با افزایش دما افزایش یابد و سپس در دماهای بالاتر به طور مجانبی به سمت صفر میل کند. با مقایسه دو نمودار در این شکل، در می‌یابیم که حضور میدان مغناطیسی همگن خارجی، تقارن بین ناهمخوانی کوانتومی چپ و راست را در سامانه به هم نمی‌زند.

## ۴.۳. بررسی اثر ناهمگنی میدان مغناطیسی بر

## ناهمخوانی کوانتومی

مطابق شکل ۳، در اثر حضور میدان مغناطیسی ناهمگن،  $b \neq 0$

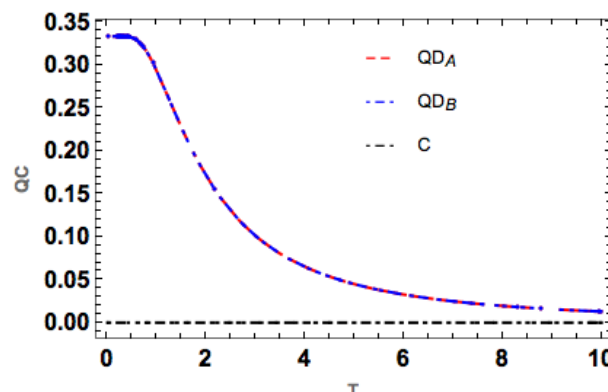


شکل ۲. (رنگی در نسخه الکترونیکی) مقایسه تغییرات همبستگی های کوانتومی، شامل درهم تیدگی (C) و ناهمخوانی کوانتومی چپ و راست با دما برای حالت گرمایی یک سامانه فرومغناطیس دواسپینی در حضور میدان مغناطیسی همگن.

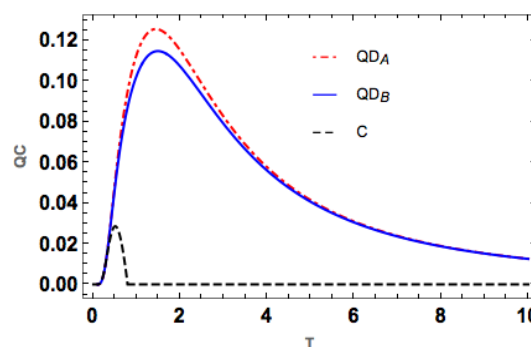
میل می کند. بنابراین با تنظیم درست دما و میدان مغناطیسی و میزان ناهمگنی میدان مغناطیسی می توان حالت های گرمایی که دارای ناهم خوانی چپ و راست متفاوت هستند را ایجاد نمود. در حد دماهای بالا حالت سامانه به طور مجانبی به حالت آمیخته کامل دو بخشی، که هیچ گونه همبستگی بین پاره هایش نیست، نزدیک می شود. بنابراین ناهمخوانی چپ و راست، بعد از یک دمای مشخص با هم برابر شده به سمت صفر میل می کنند.

#### ۴. خلاصه و نتیجه گیری

در این مقاله، نشان دادیم که وجود ناهمگنی میدان مغناطیسی باعث از بین رفتن تقارن ناهمخوانی کوانتومی چپ و راست برای حالت گرمایی یک سامانه کوانتومی شامل دو اسپین با برهم کنش همسانگرد هایزنبرگ، می شود. این امر برای بررسی گذار فاز کوانتومی و همچنین آماده سازی حالت های کوانتومی با ناهمخوانی چپ و راست متفاوت به منظور انجام عملیات پردازش اطلاعات کوانتومی، اهمیت ویژه ای دارد.



شکل ۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) مقایسه تغییرات هم بستگی های کوانتومی، شامل درهم تیدگی (C) و ناهمخوانی کوانتومی چپ و راست با دما برای حالت گرمایی یک سامانه فرومغناطیس دواسپینی در عدم حضور میدان مغناطیسی.



شکل ۳. (رنگی در نسخه الکترونیکی) از بین رفتن تقارن ناهمخوانی کوانتومی در سامانه فرومغناطیس حرارتی اسپینی دو کیوبیتی در اثر ناهمگن شدن میدان مغناطیسی.

و  $B \neq 0$ ، با افزایش دما، همبستگی های کوانتومی در سامانه ابتدا افزایش یافته و سپس دچار افت می شوند و به سمت صفر میل می کنند. این روند افزایشی در مورد درهم تیدگی تا دمای پایین تری نسبت به ناهمخوانی کوانتومی در سامانه صورت می گیرد و سپس کاهش می یابد تا جایی که در یک دمای بحرانی کاملاً از بین می رود و سامانه جداپذیر می شود. ملاحظه می شود که در این ناحیه علیرغم جداپذیری سامانه، ناهمخوانی کوانتومی غیر صفر است اگر چه به طور مجانبی به سمت صفر

## مراجع

1. L Henderson and V Vedral, *J. Phys. A* **34** (2001) 6899.
2. H Ollivier and W H Zurek, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2001) 017901.
3. E Knill and R Laflamme, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 5672.
4. A Datta, A Shaji, and C M Cave, *Phys. Rev. Lett.* **100** (1998) 050502.
5. M A Nielsen and I L Chuang, “*Quantum Computation and Quantum Information*”, Cambridge University Press (2000).
6. F Kheirandish, S Javad Akhtarshenas, and H R Mohammadi, *Phys. Rev. A* **77** (2008) 042309.
7. H R Mohammadi, *Quantum Inf. Process.* **16** (2017) 39.
8. J Maziero, L C Celeri, and R M Serra, *arXiv*: 1004.2082.
9. W H Zurek, *Nature Physics* **5** (2009) 181.
10. M Zwalak and W H Zurek, *Scientific Reports* **3** (2013) 1729.
11. G-X Li, Z Yi, and Z Ficek, *arXiv*: 1101.4983v1.
12. W Wothers, *Phys. Rev. Letts.* **80** (1998) 2245.
13. S Hill and W Wothers, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 2022.