مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۹، شمارهٔ ۳، پاییز ۱۳۹۸

نوسانگر هماهنگ میرای کوانتومی در چارچوب اصل عدم قطعیت تعمیم‌یافته

سید داود ساداتیان

گروه فیزیک، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه نیشابور، نیشابور

پست الکترونیکی: sd-sadatian@um.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۰۳/۲۲ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۸/۰۴/۲۱)

چکیده

نوسانگرهای هماهنگ به خاطر ویژگی‌های دینامیکی در گرانش کوانتومی از اهمیت زیادی برخوردارند. می‌توان دینامیک این نوسانگر را از طریق رابطه عدم قطعیت تعمیم‌یافته، که در مدل‌های مختلف کیهان‌شناسی مثل نظریهٔ ریسمان و گرانش کوانتومی حلقه پیشنهاد شده است مورد اصلاح قرار داد. در این مقاله معادله نوسانگر هماهنگ میرای کوانتومی با توجه به اصل عدم قطعیت تعمیم‌یافته حل شده است، و اثر این اصلاحات در دستگاه نوسانگر میرا مورد بررسی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: نوسانگر هماهنگ کوانتومی میرا، اصل عدم قطعیت تعمیم‌یافته

۱. مقدمه

کوانتش دستگاه‌های اتلافی از مسائلی بوده است که در فیزیک بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند. یکی از روش‌های قدرتمند برای کوانتش را می‌توان در روش کانونی دیراک[۱] مشاهده کرد ولی از آنجایی که فرمول کلاسیکی هامیلتونی نمی‌تواند با پدیده‌های اصطکاکی مطابقت پیدا کند، در این مورد حل مسئلهٔ کوانتش قابل مشاهده نیست [۱ و ۲]. بنابراین چندین راه حل برای این مسئله پیشنهاد شده است، به عنوان مثال کانایی[۲] هامیلتونی دقیقی وابسته به زمان را ارائه کرده و نشان داده است که روابط جابه‌جایی مکان و تکانه را نقض کرده است. کاستین[۳] معادلهٔ شرودینگر غیرخطی را ابداع کرده است که در این حالت هم، هامیلتونی فرمول‌بندی فضای هیلبرت را بر هم زده است، در این حالت اصل برهم‌نهی نقص شده است و انتقالی در بسامد اصطکاکی به وجود نیامده است. اما به تازگی تعمیم‌یافتگی در هامیلتونین برای متغیرهای مختلط کانونی، محدودیت برای داشتن هامیلتونی حقیقی را از بین برده، و رابطهٔ نزدیک بین بخش کاملاً موهومی هامیلتونی و بخش اتلافی نشان داده شده است. در این نظریه فرایند کوانتش باعث به‌وجود آمدن عملگر هامیلتونی غیرهرمیتی و پیدا کردن منابع نوفهٔ کوانتیدهٔ احتمالی شده است [۳]. منابع نوفه آشکار کرده‌اند که وقتی دستگاه کوانتومی از دینامیک اتلافی مشخص به شکل کوانتیده می‌رود، به دلیل عدم آگاهی از برهم‌کنش‌های میکروسکوپی، کوانتیدگی به شدت کاهش پیدا می‌کند [۴]. در

۱. Dirac
۲. Kanai
۳. Kostin

این روش جدید عملگرهایی بـه عنـوان عملگرهـای نوفـه وارد دستگاه می‌شود که ما با به کار گیـری روابـط تعمیم‌یافتـهٔ عـدم قطعیت در آنها به حل مسئلهٔ نوسـانگرهای میـرا از طریـق ایـن رهیافت جدید می‌پردازیم. البته باید خاطر نشان کرد که در ایـن روش می‌توان با تجزیه معادلهٔ حرکت به دو معادلهٔ درجهٔ یک با ضرایب پیچیدهٔ لاگرانژی بـرای مـدل ایجـاد کـرد و از روی آن هامیلتونی را تولید کرد، و در ادامه با داشتن هامیلتونی و استفاده از روابط دیراک تعمیم‌یافته دسـتگاه را کوانتیـده کـرد. در اینجـا تأکید می‌شود که اصلاحات ایجاد شـده در کوانتیـده کـردن بـه دلیل ناهرمیتی بودن هامیلتونی لازم به نظر می‌رسد. به هر ترتیب در این روش به طور کـل یـک رابطـهٔ قیـدی ریاضـی بـر روی عملگرهای مشتقات زمانی، جابه‌جاگری‌هـای کـانونی و معادلـهٔ حرکت به دست می‌آید. این بدان معنا است که هـامیلتونی یـک محـدوده‌ای از درسـتی دارد ولـی در حالـت کلـی بـرای تمـام دستگاه‌های دینامیکی، یک هـامیلتونی ویـژه بـا عملگـر زمـانی خاص مورد نیاز است.

از طرفـی دیگـر بـه تـازگی مشـخص شـده اسـت کـه اندازه‌گیری‌ها در گرانش کوانتومی توسـط رابطـهٔ عـدم قطعیـت تعمیم‌یافته کنترل مـی‌شـود. شـواهدیماننـد نظریـهٔ ریسـمان و فیزیک سیاه‌چاله باعث شده است محققان ایـن حـوزه بـه فکـر بازنگری در رابطهٔ عدم قطعیت هایزنبرگ بیفتند. این مشـاهدات از نوسـانات کوانتـومی زمینـهٔ متریـک فضـا– زمـان سرچشـمه می‌گیرند که باعث شـده اسـت محققـان مسـائل مختلفـی را در چـارچوب عـدم قطعیـت تعمیم‌یافتـه بررسـی کننـد. تخمـین پیوستگی پیوستار فضا– زمان ممکن است در حد انرژی‌های بالا شکسته شود. در این حد تأثیرات گرانش آنقدر مهـم اسـت کـه ممکـن اسـت موجـب شکسـته شـدن فضـا– زمـان شـود. در چارچوب گرانش کوانتومی رابطهٔ عدم قطعیت هـایزنبرگ بایـد به «عدم قطعیت تعمیم‌یافته» یا به طور خلاصه GUP تعمیم پیدا کند [۵]. این تعمـیم دادن باعـث مـی‌شـود کمینـهٔ مقـدار عـدم قطعیت در مکان غیرصفر باشد. نظرات بر پایهٔ گرانش کوانتومی نشان می‌دهد که تفاوتی بین نمایش و تعریف «حالات همگـن» در عدم قطعیت تعمیم‌یافته و مکانیک کوانتومی معمولی نیسـت ولی عدم قطعیت درگرانشی کوانتومی توصیف همگـن بـودن را از بین می‌برد، که با محاسبهٔ ویژه مقداری x و p و واریانس آنها نشان داده می‌شود. البته نوعی دیگـر از مثـال‌هـایی از نوسـانگر هماهنگ در رابطهٔ GUP به صورت نسبیتی مورد بررسـی قـرار گرفته‌اند در این موارد هدف بررسـی تـأثیرات GUP در مسـئلهٔ فرمیون‌های در حرکت نسبیتی در فضای دوبعدی اسـت زمـانی که پتانسیل‌های برداری، اسکالری و شبه‌اسکالری به آنها اعمـال شده است. در این حالت تأثیر GUP در تعریف عملگر تکانه در نظرگرفته شده است که از این طریق به رابطهٔ تعمیم‌یافته دیراک می‌رسیم و معادلـهٔ ویـژه‌مقـداری آن بـرای نوسـانگر هماهنـگ نسبیتی تعمیم‌یافته حل دقیق می‌شود. نشان داده می‌شود که ایـن نتایج برای طیف انرژی و ویژه عملگرهـای تعمیم‌یافتـه، همـان نوسانگر هماهنگ دیراک است [۴].

بنابراین ساختار این مقاله بدین صورت ایجاد شده است که: ابتدا در بخش ۲ و ۳ با توجه به [۳] به مـرور اجمـالی بـر حـل مسئلهٔ نوسانگر میرا می‌پردازیم و پس از تعیین معادلهٔ حرکت آن مبحث کوانتش را در این نوسانگر با توجه اصـل عـدم قطعیـت استاندارد بررسی می‌کنیم سپس در بخش ۴ بـا در نظـر گـرفتن اصل عدم قطعیت تعمیم‌یافتـه [۵– ۷] مسـئلهٔ نوسـانگر میـرا را مورد بازبینی قرار داده و اصلاحاتی را که در معادلات حرکت و کوانتش این نوسانگر ایجاد می‌شود مورد تحلیل قرار می‌دهیم.

۲. هامیلتونی مقید نوسانگر هماهنگ کوانتومی میرا

در این بخـش ابتـدا بـه بررسـی یـک نوسـانگر هماهنـگ میـرا می‌پردازیم تا شرایط را برای اصلاح آن با روابـط عـدم قطعیـت تعمیم‌یافتـه فـراهم سـازیم. بنـابراین بـرای بـه دسـت آوردن هامیلتونی نوسانگر هماهنگ میرا شونده به جای این که دستگاه را نامقید در نظـر بگیـریم، دسـتگاه را دسـتگاهی بـا هـامیلتونی تعمیم‌یافته در نظر مـی‌گیـریم کـه انـرژی کلاسـیکی دارد و بـه صورت تابعی نمایی با زمان واپاشی می‌کنـد. ایـن هـامیلتونی از دستگاه انرژی هامیلتونی کاملاً صفر به دست می‌آید.

بنابراین همـان طـور کـه بـرای نوسـانگر هماهنـگ میـرای کلاسیک داشتیم [۳ و ۴]

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega^{2}x=0, \tag{1}$$

$$x=x_{0}\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)\cos\left(\Omega_{0}t+\alpha\right), \tag{2}$$

که در آن $\Omega_{0}=\left(\omega^{2}-\frac{\gamma^{2}}{4}\right)$ بسامد کلاسیکی انتقال‌یافته است و α فاز اختیاری است، با ضرب آن در $m\dot{x}$ و همچنین در رابطهٔ (۱) داریم

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^{2}+\frac{1}{2}m\omega^{2}x^{2}+m\gamma\int\dot{x}^{2}\mathrm{d}t=c, \tag{3}$$

حال با جایگزین کردن رابطهٔ (۲) در رابطهٔ (۳) سمت چپ این رابطه از بین می‌رود و در نتیجه انرژی کل دستگاه همیشه صفر یا هامیلتونی صفر داریم.از طرفی اگر از روابط کانونی معادلات حرکت استفاده کنیم به روابط زیر می‌رسیم

$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{p}{m}\,,\\ -\dot{p}=m\omega^{2}x+\gamma p\,,\end{cases} \tag{4}$$

باید توجه کرد که p تابعی ضمنی از x است که در اینجا حالت حرکت مقید با معادلهٔ زیر داده می‌شود

$$\Phi_{1}(x,p)=\frac{p^{2}}{2m}+m\omega^{2}x+\gamma\int p(s)\,\mathrm{d}s\approx 0, \tag{5}$$

از آنجا که بخش مکانیکی انرژی برای ما مهم است، انرژی مقید دیگری مرتبط با انرژی مکانیکی باید در نظر گرفته شود که می‌تواند از رابطهٔ (۵) به دست آید. برای این منظور p در این رابطه را تابعی از x در نظر می‌گیریم و از این رابطه نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\left(\frac{p}{m}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\frac{m\omega^{2}x}{2}+\gamma p\approx 0, \tag{6}$$

با انتگرال گیری از رابطهٔ بالا رابطهٔ مقید زیر به دست می‌آید

$$\Phi_{2}(x,p)=\Phi(x,p)\exp\left(\frac{\gamma\theta(x,p)}{\Omega_{0}}\right)-\varepsilon\approx 0, \tag{7}$$

که در این رابطه

$$\Phi=\frac{1}{2m}\left(p+\frac{1}{2}m\gamma x\right)^{2}+\frac{1}{2}m\Omega_{0}^{2}x^{2}\ , \tag{8}$$

$$\Omega_{0}^{2}=\omega^{2}-\frac{1}{4}\gamma^{2}\ , \tag{9}$$

$$\tan\theta=\left(\frac{m\Omega_{0}x}{p+\frac{1}{2}m\gamma x}\right), \tag{10}$$

در اینجا ε ثابت اندازه‌گیری است که انرژی مکانیکی در نقطهٔ $x=0$ را نشان می‌دهد. با توجه به دینامیک مقید دیراک [۴] هامیلتونی تعمیم‌یافته دستگاه می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$H_{T}=H_{0}+\lambda_{1}\Phi_{1}+\lambda_{2}\Phi_{2}=\lambda_{1}\Phi_{1}+\lambda_{2}\Phi_{2}\ , \tag{11}$$

که در آن λ_{2} و λ_{1} ضرائب لاگرانژین هستند و معادلهٔ حرکت برای هر تابع فاز تخت $g(x,p)$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\dot{g}=\lambda_{1}\{g,\Phi_{1}\}+\lambda_{2}\{g,\Phi_{2}\}\ , \tag{12}$$

که در اینجا کروشه‌ای که استفاده شده است کروشه پوآسون است و رابطهٔ سمت راست در واقع $\{g,H_{T}\}$ است. باید در نظر داشته باشیم که باید $\Phi_{1}=0$ و $\Phi_{2}=0$ باشد تا مشخص شود قیود $\Phi_{1,2}$ مرتبهٔ اول هستند یا نه. برای این کار از روابط زیر شروع می‌کنیم

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_{1}}{\mathrm{d}x}=m\omega^{2}x+\gamma p\ \ ,\ \ \frac{\mathrm{d}\Phi_{1}}{\mathrm{d}p}=\frac{p}{m} \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_{2}}{\mathrm{d}x}=\left(m\omega^{2}x+\gamma p\right)\exp\left(\frac{\gamma\theta}{\Omega_{0}}\right),\ \frac{\mathrm{d}\Phi_{2}}{\mathrm{d}p}=\frac{p}{m}\exp\left(\frac{\gamma\theta}{\Omega_{0}}\right) \tag{14}$$

در نتیجه داریم

$$-\{\Phi_{2},\Phi_{1}\}=\{\Phi_{1},\Phi_{2}\}=\frac{\mathrm{d}\Phi_{1}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\Phi_{2}}{\mathrm{d}p}-\frac{\mathrm{d}\Phi_{1}}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}\Phi_{2}}{\mathrm{d}x}=0 \tag{15}$$

اگر در رابطهٔ (۱۲) $g=\Phi_{1,2}$ در نظر بگیریم می‌بینیم که $\lambda_{1,2}$ به صورت اختیاری باقی می‌مانند و به واسطهٔ این اختیاری بودن H_T مقدار بی همتایی نیست. حال $\lambda_{1,2}$ را تخمین می‌زنیم و توسط آن H_T را با قرار دادن دو شرط پیمانه‌ای به دست می‌آوریم.

اگر در رابطهٔ (۱۲) $g=x$ و همچنین $g=p$ قرار دهیم داریم

$$\dot{x}=\lambda_{1}\{x,\Phi_{1}\}+\lambda_{2}\{x,\Phi_{2}\}\ , \tag{16}$$

$$\dot{p}=\lambda_{1}\{p,\Phi_{1}\}+\lambda_{2}\{p,\Phi_{2}\}\ , \tag{17}$$

که در آن

$$\{x,\Phi_{2}\}=\frac{p}{m}\exp\left(\frac{\gamma\theta}{\Omega_{0}}\right), \tag{18}$$

$$\{p,\Phi_{2}\}=-\left(m\omega^{2}x+\gamma p\right)\exp\left(\frac{\gamma\theta}{\Omega_{0}}\right), \tag{19}$$

از مقایسهٔ رابطهٔ (۱۸) و (۱۹) با معادلات حرکت (۴) می‌توانیم انتخاب کنیم که

$$\lambda_{1}=0\ ,\quad \lambda_{2}=\lambda=\exp\left(-\frac{\gamma\theta}{\Omega_{0}}\right), \tag{20}$$

دیراک مشخص کرده است که ضرائب لاگرانژ باید تابعی از زمان باشند. که این موضوع از طریق حل معادلهٔ حرکت و یا ثابت حرکت امکان‌پذیر است در نتیجه رابطهٔ (۲۰) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=\lambda=\exp(-\gamma t)\approx\exp\left(-\frac{\gamma\theta}{\Omega_0}\right), \qquad (۲۱)$$

اگر رابطهٔ (۲۱) را در روابط (۷) و (۱۱) قرار دهیم داریم

$$H_T=\exp(-\gamma t)\Phi\exp\left(\frac{\gamma\theta}{\Omega_0}\right)-\exp(-\gamma t)\varepsilon, \qquad (۲۲)$$

که در این رابطه Θ و Φ از روابط (۹) و (۱۰) داده می‌شوند.

از آنجایی که $\exp(-\gamma t)\varepsilon$ تابعی است که کاملاً به زمان وابسته است، رابطهٔ (۲۲) می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود

$$H=\lambda(t)\Phi\exp\left(\frac{\gamma\theta}{\Omega_0}\right),\ \lambda(t)=\exp(-\gamma t)\approx\exp\left(-\frac{\gamma\theta}{\Omega_0}\right), \qquad (۲۳)$$

و معادلهٔ حرکت به صورت زیر تعیین می‌شود

$$\dot g=\{g,H\} \qquad (۲۴)$$

در رابطهٔ (۲۳) Φ انرژی مکانیکی کرنل[1] است که از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\Phi=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2+\frac{1}{4}\gamma(xp+px), \qquad (۲۵)$$

و در نهایت رابطهٔ هامیلتونی به صورت زیر در می‌آید

$$H=\lambda(t)\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2+\frac{1}{4}\gamma(xp+px)\right)\exp\left(\frac{\gamma\theta}{\Omega_0}\right). \qquad (۲۶)$$

۳. کوانتش نوسانگر هماهنگ میرا

در این بخش با توجه به روش جدید ارائه شده در مرجع [۴] نوسانگر هماهنگ میرا را کوانتیده می‌کنیم. در این روش معادلات مکان و تکانهٔ مختلط کانونی است که می‌تواند روابط مناسب برای عملگرهای تولید و نابودی را به‌وجود آورد. علاوه بر آن عملگرهای نوفه[2] به وجود می‌آیند که دلیل اصلی پایستگی حرکت در زمان است و با رابطهٔ نوسان- اتلاف[3] بیان میشوند. از طرفی در این حالت معادلهٔ شرودینگر مناسبی برای زیر دستگاه‌های اتلافی وجود ندارد وکوانتش باعث به وجود آمدن عملگر هامیلتونی غیرهرمیتی و به طور بالقوه منابع نوفهٔ کوانتومی می‌شود.

بنابراین محاسبات را از معادلهٔ حرکت نوسانگر هماهنگ میرا به شکل زیر شروع می‌کنیم

$$\ddot x+2\gamma\dot x+\Omega^2x=0, \qquad (۲۷)$$

در این حالت فرض می‌کنیم دستگاه به طور بحرانی میرا شده است، بنابراین برای معادلهٔ مکان مختلط داریم

$$q=\omega^{\frac{-1}{2}}\left(p+(\lambda-i\omega)x\right), \qquad (۲۸)$$

که در اینجا

$$\omega=\left(\Omega^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad p=\dot x \qquad (۲۹)$$

با توجه به رابطهٔ (۲۷) معادلهٔ حرکت برای q به شکل زیر به دست می‌آید

$$\dot q+i\omega q+\lambda q=0, \qquad (۳۰)$$

و معادلهٔ لاگرانژی مزدوج کانونی تکانه برای q عبارت است از

$$\pi=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\dot q}=\frac{i}{2}q^*, \qquad (۳۱)$$

حال می‌توان هامیلتونی مختلط را که باعث به وجود آمدن دینامیک می‌شود به دست آورد

$$H=H+i\Gamma, \qquad (۳۲)$$

$$H=-i\omega\pi q,\quad \Gamma=i\lambda\pi q, \qquad (۳۳)$$

از طرفی معادلات هامیلتونی تعمیم‌یافته زیر معادلات حرکت (۲۹) و مزدوج آن را می‌دهد

$$\dot q=\frac{\partial H}{\partial\pi},\quad \dot\pi=-\frac{\partial H^*}{\partial\pi}, \qquad (۳۴)$$

بنابراین معادلات مکانیک کلاسیک بالا می‌توانند به معادلات مکانیک کوانتومی در تصویر هایزنبرگ با عملگر هامیلتونی H به شکل زیر تغییر یابند

$$H=H+i\Gamma, \qquad (۳۵)$$

$$H=-i\omega\pi q,\qquad \Gamma=-\frac{1}{2}\hbar\lambda, \qquad (۳۶)$$

لازم به ذکر است که از این قسمت به بعد تمام متغیرها

۱. Kernel
۲. Noise Operator
۳. Fluctuation-Dissipation

کوانتومی می‌شوند. اکنون برای معادلات حرکت داریم

$$\dot{q} = -\left(\frac{i}{\hbar}\right)[q,H] + \left(\frac{1}{\hbar}\right)\{q,\Gamma\} + \mathfrak{R}_q(t), \qquad (۳۷)$$
$$\dot{\pi} = -\left(\frac{i}{\hbar}\right)[\pi,H] + \left(\frac{1}{\hbar}\right)\{\pi,\Gamma\} + \mathfrak{R}_\pi(t),$$

که در این رابطه کمیت‌های $\mathfrak{R}_q$ و $\mathfrak{R}_\pi$ عملگرهای نوفه تعریف می‌شوند

$$\left\langle \mathfrak{R}_q(t)\right\rangle_N = \left\langle \mathfrak{R}_\pi(t)\right\rangle_N = 0, \qquad (۳۸)$$

از طرفی نوفه‌های کوانتومی با پایستگی جابه‌جایی در زمان رابطه دارند و داریم

$$[\pi,q] = -i\hbar, \qquad (۳۹)$$

و همچنین می‌توانیم عملگرهای تولید و نابودی را به صورت زیر نشان دهیم

$$a = (2\hbar)^{-\frac{1}{2}} q, \quad a^\dagger = -i\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \pi, \qquad (۴۰)$$

که رابطهٔ جابه‌جایی زیر برای آنها برقرار است

$$\left[a,a^\dagger\right] = 1, \qquad (۴۱)$$

و بخش نوسانی هامیلتونی رابطهٔ زیر را برآورده می‌کند

$$H = \hbar\omega a a^\dagger, \qquad (۴۲)$$

با توجه به روابط کوانتش مختلط برای q و π حال رابطهٔ مناسب را برای x و p در فضای کارتزی را حقیقی تعیین می‌کنیم

$$q = \omega^{\frac{-1}{2}}\left(p + (\lambda - i\omega)x\right), \qquad (۴۳)$$

$$\pi = \frac{1}{2} i\omega^{\frac{-1}{2}}\left(p + (\lambda + i\omega)x\right), \qquad (۴۴)$$

که این روابط را می‌توان به روابط زیر بازنویسی کرد

$$x = \omega^{\frac{-1}{2}}\left(\frac{1}{2} i\mathrm{q} - \pi\right), \qquad (۴۵)$$

$$p = \omega^{\frac{-1}{2}}\left((\lambda - i\omega)\pi - \frac{1}{2} i(\lambda + \mathrm{i}\omega)q\right), \qquad (۴۶)$$

از آنجایی که تبدیلات خطی است، شکل کلی معادلات حرکت (۳۷) پایسته است و همچنین روابط جبری ساده نشان می‌دهد که رابطهٔ (۳۸) به رابطهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$[p,x] = -i\hbar, \qquad (۴۷)$$

که نشان‌دهندهٔ کانونی بودن تبدیلات است.حال با قرار دادن روابط (۴۳) و (۴۴) در رابطهٔ (۳۶) رابطهٔ زیر برای هامیلتونی به دست می‌آید

$$H = 1/2 p^2 + 1/2\lambda\{p,x\} + 1/2\Omega^2 x^2, \quad \Gamma = -\left(\frac{1}{2}\hbar\right)\lambda, \qquad (۴۸)$$

در اینجا اگر در رابطهٔ بالا $\lambda \to 0$ برود، هامیلتونی به رابطهٔ هامیلتونی نوسانگر هماهنگ ساده و معادلات چند جمله‌ای برای انرژی‌های حالت پایهٔ شرودینگر می‌رسد. اگر $\lambda \neq 0$ باشد هامیلتونی نمی‌تواند رابطهٔ انرژی را بدهد و تنها می‌تواند نقش مولد حرکت را ایفا کند.

۴. تعیین هامیلتونی مؤثر نوسانگر هماهنگ میرا با توجه به GUP

در این بخش با توجه به مطالبی که بخش‌های پیشین گفته شد به تعیین هامیلتونی مؤثر دستگاه می‌پردازیم که در آن به جای رابطهٔ عدم قطعیت استاندارد از رابطه عدم قطعیت تعمیم‌یافته استفاده کرده‌ایم [۵- ۷]. بنابراین بر حسب H معادلهٔ حرکت برای x و p به صورت زیر می‌نویسیم

$$\dot{x} = -\left(\frac{i}{\hbar}\right)\left(xH - H^\dagger x\right) + \mathfrak{R}_x(t) = p + \mathfrak{R}_x(t), \qquad (۴۹)$$

$$\dot{p} = -2\lambda p - \Omega^2 x + \mathfrak{R}_q(t), \qquad (۵۰)$$

اکنون با اعمال رابطهٔ عدم قطعیت تعمیم‌یافته با کمینهٔ عدم قطعیت در مکان x، معادلات حرکت را به صورت تعمیم‌یافته زیر بازنویسی می‌کنیم [۷]

$$[x,p] = \mathrm{i}\hbar\left(1 + \beta p^2\right), \qquad (۵۱)$$

$$\dot{x} = p\left(1 + \beta p^2\right) + \mathfrak{R}(t), \qquad (۵۲)$$

$$\dot{p} = -2\lambda p\left(2 + \beta p^2\right) - \Omega^2 x\left(1 + \beta p^2\right) + \mathfrak{R}_q(t), \qquad (۵۳)$$

در اینجا قبل از ادامه کار ابتدا باید به وسیلهٔ روشی از نظریهٔ نوسان بعضی از خصوصیات عملگرهای نوفه را بررسی کنیم [۳ و ۴]. بنابراین از رابطهٔ نوسان به وسیلهٔ رابطهٔ (۴۹) جواب کوتاه زمانی بزرگ‌نمایی شدهٔ[۱] آن را به شکل زیر به دست می‌آوریم

$$x(\Delta t) = x(0) - \left(\frac{i}{\hbar}\right)\left(x(0)H(0) - H^\dagger(0)x(0)\right)\Delta t + \int_0^{\Delta t} \mathfrak{R}_x(\tau)\,d\tau \qquad (۵۴)$$

۱. Coarse-Grained

که در آن $x(\circ)=x(t)$ و $x(\Delta t)=x(t+\Delta t)$ است. این رابطه را برای p هم می‌نویسیم

$$p(\Delta t)=p(\circ)-\left(\frac{i}{\hbar}\right)\left(p(\circ)H(\circ)-H^{\dagger}(\circ)p(\circ)\right)\Delta t+\int_{\circ}^{\Delta t}\Re_p(\tau)\tau d \qquad (۵۵)$$

که رابطهٔ ضرب این دو رابطه به شکل زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned}p(\Delta t)x(\Delta t)&=p(\circ)x(\circ)-\left(\frac{i}{\hbar}\right)\left(P(\circ)x(\circ)H(\circ)-P(\circ)H^{\dagger}(\circ)x(\circ)+P(\circ)H(\circ)x(\circ)-H^{\dagger}(\circ)P(\circ)x(\circ)\right)\Delta t\\&+\int_{\circ}^{\Delta t}p(\circ)\Re(\tau)d\tau-\left(\frac{i}{\hbar}\right)\Delta t\int_{\circ}^{\Delta t}\left(p(\circ)H(\circ)-H^{\dagger}(\circ)p(\circ)\right)\Re_x(\tau)d\tau+\int_{\circ}^{\Delta t}\Re_p(\tau)x(\circ)d\tau\\&-\left(\frac{i}{\hbar}\right)\Delta t\int_{\circ}^{\Delta t}\left(x(\circ)H(\circ)-H^{\dagger}(\circ)x(\circ)\right)\Re_P(\tau)d\tau+\int_{\circ}^{\Delta t}\int_{\circ}^{\Delta t}dd\tau d\tau\Re(\tau)\Re_x(\tau')\end{aligned} \qquad (۵۶)$$

اکنون با فرض این که رابطهٔ (۴۷) وقتی از t به Δt می‌رود پایسته باقی بماند و با فرض این که Δt به صفر میل کند.می‌توان رابطهٔ زیر را به دست آورد

$$\left\langle\left[\Re_p^{(\tau)},\Re_x'(\tau')\right]\right\rangle=\left(\frac{۲}{\hbar}\right)\left\langle[x,p\Gamma]+[x\Gamma,p]\right\rangle\delta(\tau-\tau), \qquad (۵۷)$$

و همچنین با تعریف روابط زیر

$$\Re_p(\tau)\Re_x(\tau')=۲\mathrm{D}_{px}\delta(\tau-\tau'), \qquad (۵۸)$$

$$\Delta_{px}=\mathrm{D}_{px}-\mathrm{D}_{xp}\ , \qquad (۵۹)$$

اگر رابطهٔ (۴۷) را در رابطهٔ (۵۷) قرار دهیم در مورد میراشوندگی رابطهٔ زیر را به دست می‌آوریم

$$\Delta_{px}=-\mathrm{i}\hbar\lambda\ , \qquad (۶۰)$$

در اینجا متوجه می‌شویم که اول از همه Δ_{px} غیرصفر است که ویژگی کاملاً کوانتومی است و در نتیجه رابطهٔ (۶۰) نشان‌دهندهٔ رابطهٔ اولیهٔ عملگر نوفه با رابطهٔ عدم قطعیت و اتلاف یعنی λ است، همچنین این رابطه نشان‌دهندهٔ نمونهٔ گسسته‌ای از رابطهٔ نوسان- اتلاف کوانتیده شده است.

رابطهٔ جابه‌جایی عملگرها و نوفه به طور همزمان است به شکل زیر داده می‌شود

$$\left\langle\Re_p(t)x(t)\right\rangle=D_{px} \qquad (۶۱)$$

حال اگر بخواهیم منابع نوفه را به هامیلتونی وارد کنیم (از طریق رابطهٔ (۵۴) و با توجه به پایستگی رابطهٔ جابه‌جایی) می‌توانیم نوفه را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\eta_x=\frac{۱}{۲}(۱+\epsilon)\Re_x p+\frac{۱}{۲}(۱-\epsilon)p\Re_x \qquad (۶۲)$$

$$\eta_p=-\frac{۱}{۲}(۱+\delta)\Re_p x-\frac{۱}{۲}(۱-\delta)x\Re_p \qquad (۶۳)$$

که در اینجا ϵ یک ثابت حقیقی و اختیاری در نظر گرفته شده است و همچنین δ یک ثابت اختیاری است. بنابراین از ترکیب این دو رابطه می‌توانیم هامیلتونی نوفه‌دار غیرهرمیتی را به دست می‌آوریم

$$H=H+i\Gamma+\eta_x+\eta_p\ , \qquad (۶۴)$$

با انتخاب ϵ و δ مناسب می‌توانیم هامیلتونی هرمیتی مناسب را بسازیم، از طرفی برای این کار نیاز داریم رابطهٔ زیر برقرار باشد

$$\left\langle H-H^{\dagger}\right\rangle=\circ \qquad (۶۵)$$

و در نتیجه داریم

$$۲i\langle\Gamma\rangle+\langle\epsilon\Re_x p-p\Re_x\rangle-\delta\left\langle\Re_p x-x\Re_p\right\rangle=\circ \qquad (۶۶)$$

و از آن نتیجه می‌گیریم

$$(\epsilon+\delta)\ \Delta_{px}=۲i\ \langle\Gamma\rangle \qquad (۶۷)$$

هر انتخابی از ϵ و δ توسط رابطهٔ $\delta+\epsilon=۱$ محدود می‌شود که می‌تواند هامیلتونی هرمیتی مؤثر را به وجود آورد [۴].

جملهٔ η_x و η_p که شامل ϵ و δ می‌شوند، بخش غیرهرمیتی هامیلتونی را از بین می‌برند و باعث به وجود آمدن رابطهٔ هامیلتونی مؤثر هرمیتی زیر می‌شود

$$+۱/۲\lambda\{p,x\}+۱/۲\Omega^۲x^۲+۱/۲\{R_x,p\}-۱/۲\{R_p,x\} \qquad (۶۸)$$

حال اگر معادلات حرکت را مورد بازبینی قرار دهیم، داریم

$$\dot{x}=-\left(\frac{i}{\hbar}\right)[x,H]\ , \qquad (۶۹)$$

در ادامه با استفاده از رابطهٔ (۶۸) و مقدار میانگین گرفتن از نوفه به رابطهٔ زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned}\langle\dot{x}\rangle&=\langle p\rangle+\lambda\langle x\rangle-\left(\frac{i}{۲\hbar}\right)\left\langle x\left(\Re_x p+p\Re_x-\Re_p x-x\Re_p\right)\right\rangle\\&+\left(\frac{i}{۲\hbar}\right)\left\langle\left(\Re_x p+p\Re_x-\Re_p x-x\Re_p\right)x\right\rangle\end{aligned} \qquad (۷۰)$$

و با در نظر گرفتن رابطهٔ

$$\begin{aligned} xp\Re_x &= \langle x\rangle\langle p\Re_x\rangle+\langle x\langle p\rangle\Re_x\rangle+\langle xp\rangle\langle\Re_x\rangle \\ &= \langle x\rangle D_{px}+\langle p\rangle D_{xx}+i\hbar\langle\Re_x\rangle \\ &= \langle x\rangle D_{px}+\langle p\rangle D_{xx}\ , \end{aligned} \quad (۷۱)$$

بنابراین معادلهٔ حرکت برای مکان x به صورت زیر بازنویسی می‌شود که در آن رابطهٔ (۶۰) یعنی رابطهٔ نوسان- اتلاف استفاده شده است

$$\langle\dot{x}\rangle=\langle p\rangle+\left(\lambda-\left(\frac{i}{\hbar}\right)\Delta_{px}\right)\langle x\rangle=\langle p\rangle, \quad (۷۲)$$

$$\langle\dot{p}\rangle=-2\lambda\langle p\rangle-\Omega^2\langle x\rangle, \quad (۷۳)$$

اگر در حالتی که فقط GUP به رابطهٔ هامیلتونی نامیرا اعمال می‌شود، رابطهٔ هامیلتونی را مورد بررسی قرار دهیم رابطهٔ جابه‌جایی ابتدا در هامیلتونی وارد نمی‌شود ولی در حالتی که هامیلتونی میراست جملهٔ $\frac{1}{2}\lambda\{p,x\}$ باعث می‌شود رابطهٔ عدم قطعیت از اول در هامیلتونی ظاهر شود و همین طور در معادلات حرکت هم تأثیر بگذارد

$$\begin{aligned} H=\frac{1}{2}p^2(1+\lambda i\hbar\beta)+\frac{1}{2}\lambda(2px+i\hbar)+\frac{1}{2}\Omega^2x^2 \\ +\frac{1}{2}\{\Re_x,p\}-\frac{1}{2}\{\Re_p,x\}, \end{aligned} \quad (۷۴)$$

در ادامه رابطهٔ مقدار میانگین جابه‌جایی عملگرهای $\Re_q$ و $\Re_n$ را با توجه به GUP [۵- ۷] مورد بازبینی قرار می‌دهیم

$$\left\langle\left[\Re_p(\tau),\Re_X(\tau)\right]\right\rangle=\left(\frac{2}{\hbar}\right)\left\langle 2i\hbar\Gamma\left(1+\beta p^2\right)\right\rangle\delta(\tau-\tau), \quad (۷۵)$$

و برای رابطهٔ نوسان- اتلاف در GUP به دست می‌آوریم

$$\Delta_{px}=-i\hbar\left(1+\beta p^2\right)\lambda, \quad (۷۶)$$

این رابطه نشان می‌دهد که مقدار میانگین رابطهٔ جابه‌جایی عملگرهای نوفه تحت تأثیر تعمیم‌یافتگی رابطهٔ عدم قطعیت قرار می‌گیرد. همچنین با توجه به GUP رابطهٔ (۶۱) نیز تغییر می‌کند که تأثیر آن را در معادلات حرکت به شکل زیر مشاهده می‌شود

$$\left\langle\Re_p(t)x(t)\right\rangle=D'_{px} \quad (۷۷)$$

با اعمال GUP در رابطهٔ (۷۰) مشاهده می‌کنیم عدم قطعیت تعمیم‌یافته علاوه بر این که در مقدار میانگین p ظاهر می‌شود خود را در D_{px} نشان می‌دهد که رابطهٔ نوفه با عملگرهاست

$$\begin{aligned} \dot{x}=\left\langle p\left(1+\beta p^2\right)\right\rangle=\langle p\rangle+\beta\left(2\langle p\rangle\cdot\left\langle p^2\right\rangle+\left\langle p^2\langle p\rangle\right\rangle\right) \\ -\lambda\beta\left\langle p^2\right\rangle\langle x\rangle, \end{aligned} \quad (۷۸)$$

$$\begin{aligned} \langle\dot{p}\rangle=-2\lambda\langle p\rangle-\lambda\beta\left(2\langle p\rangle\cdot\left\langle p^2\right\rangle+\left\langle p^2\langle p\rangle\right\rangle\right) \\ -\Omega^2\langle x\rangle-\beta\Omega^2\langle p\rangle, \end{aligned} \quad (۷۹)$$

و در پایان می‌توان با قرار دادن رابطهٔ (۴۰) در روابط (۴۵) و (۴۶) x و p را بر حسب عملگرهای تولید و نابودی بازنویسی کرد

$$x=\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\left(ia-a^\dagger\right), \quad (۸۰)$$

$$p=-\lambda\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\left(a^\dagger-ia\right), \quad (۸۱)$$

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله به اهمیت بازبینی رابطهٔ عدم قطعیت هایزنبرگ در عصر پلانک و نظریهٔ گرانش کوانتومی اشاره شد و در ادامه یکی از دستاوردهایی تأثیر عدم قطعیت تعمیم‌یافته را بر معادلات نوسانگر هماهنگ کوانتومی میرا بررسی کردیم. در ادامه خلاصه‌ای از آنچه در این مقاله به دست آوردیم را مورد بررسی قرار می‌دهیم :

۱- بررسی دستگاه‌های کوانتومی میرا شونده تنها از طریق برهم‌کنش‌های میکروسکوپی قابل به دست آوردن است. اگر هیچ اطلاعاتی در مورد اندرکنش‌ها وجود نداشته باشد می‌توان با توجه به یک روش کوانتیده بنداوی معادلهٔ حرکت دستگاه را به دست آورد. به طور مثال، در رابطهٔ نوسانگر میرا برای جابه‌جاگری عملگر نوفه که بر اساس پدیده‌شناختی کوانتومی به دست می‌آید، باید جابه‌جاگری مکان و تکانه پایسته باشد. ولی متأسفانه نمی‌توانیم این چنین رابطه‌ای را در یک دستگاه دینامیکی در حالت کلی به دست آوریم. چرا که برخلاف مکانیک کلاسیک مشتقات زمانی در مکانیک کوانتومی یکتا نیستند. البته می‌توان با استفاده از روش مرتبه، عملگرهای معادلات اصلی را برای توزیع احتمالی تبدیل به معادلات دیفرانسیلی کرد.

۲- درجات آزادی مسئلهٔ نوسانگر به طور اساسی به ویژگی‌های کوانتومی آن بستگی دارد. در حالت‌های ایستا می‌توان یک توزیع فاز یکنواخت را به دست آورد، مثلاً برای یک میدان لیزری با دامنهٔ بالا، به منظور مقایسهٔ روابط و پیش‌بینی‌ها با آزمایشات می‌توان یک آشکارساز کوانتومی تعریف کرد [۴] که

در یک فوتوکاتد مثل لیزر از آن استفاده شود.

۳- مشاهده کردیم در این مقاله مقدار میانگین معادلات حرکت نوسانگر هماهنگ میرا با توجه به اعمال GUP در واریانس تکانه، تغییر می‌یابد. از طرفی به این نکته اشاره شد که برای دستیابی به هامیلتونی نوسانگر هماهنگ کوانتومی میرا دو روش وجود دارد، و از روشی که در آن میرایی به شکل عملگرهای نوفه در نظر گرفته شده‌اند در اینجا استفاده شد، دلیل این انتخاب این بود که چون در این روش عملگرهای نوفه بر حسب روابط جابه‌جایی نوشته شده بود به ما در اعمال مستقیم GUP به معادلات حرکت کمک می‌کرد.

۴- از طرفی با اعمال GUP مشاهده کردیم که علاوه بر این که سه جملهٔ هامیلتونی تغییر می‌کنند، GUP بر شکل جابه‌جایی عملگر نوفه با مکان و تکانه هم تأثیر می‌گذارد. البته باید تأکید شود که این تعمیم برای نوسانگر میرا و اندرکنش آن با محیط باید با توجه به یک سری قیدها انجام پذیرد. مثلاً بر اساس روش اختلال برای نشان دادن بسته موج گاؤسی می‌توان از اصل عدم قطعیت هایزنبرگ بدون هیچ تغییری استفاده کرد.

۵- در نهایت نشان داده شد که معادلات حرکت وقتی $\beta \rightarrow O$ میل نماید به همان معادلات حرکت کوانتومی میرا شونده با توجه به رابطهٔ عدم قطعیت متعارف می‌رسد. به هر حال تحلیل ارائه شده در این مقاله را می‌توان برای بررسی کمیت‌های فیزیکی مثل دامنهٔ انتقال، عناصر انتقال و تعیین عناصر ماتریس پراکندگی نیز مورد استفاده قرار داد. البته همان طور که در بالا اشاره شد، اصلی‌ترین کاربرد مسئلهٔ نوسانگر کوانتومی میرا در لیزر فوتونی و الکترونی است که چگوگی میرا شدن پرتوی لیزر با توجه به کمیت‌های مختلف از این طریق قابل بررسی است.

مراجع

1. S Haouat and K Nouicer, *Phys. Rev.* D **89**, 10 (2014) 105030.

۲. س کرمی و ع مرتضی‌پور، *مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران* ۱۸، ۴ (۱۳۹۷) ۶۰۳.

2. S Karami and A Mortezapour, *Iranian J. Phys. Res.* **18**, 4 (2019) 603.
3. A Camacho, *Int. J. Mod. Phys.* D **12** (2003) 1687.
4. T G Philbin, *New J. Phys.* **14** (2012) 083043.
5. K Nozari and T Azizi, *Int. J. Quant. Inf.* **3** (2005) 623.
6. Y Wang, *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **20** (1987) 4739.
7. G Veneziano, *Europhys. Lett.* **2** (1986) 199.
8. D Amati, M Ciafaloni, and G Veneziano, *Phys. Lett.* B **197** (1987) 81.
9. M Maggiore, *Phys. Lett.* B **304** (1993) 65.
10. A Kempf *et al*., *Phys. Rev.* D **52** (1995) 110.