

قطبش لکه سرد CMB توسط اثر همگرایی گرانشی تهی جا و بافت کیهانی

مرضیه فرهنگ و سیدمحمدصادق موحد

دانشکده فیزیک، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

پست الکترونیکی: m.s.movahed@ipm.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۲/۰۱؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۸/۰۵/۱۹)

چکیده

لکه سرد یکی از ناهنجاری‌های رصد شده در تابش زمینه کیهانی است و می‌تواند بر اثر عوامل مختلف اولیه و یا ثانویه ایجاد شده باشد. در این تحقیق، اثر همگرایی گرانشی نامزدهایی که می‌توانستند این لکه سرد را تولید کنند مانند یک تهی‌جای بزرگ و بافت کیهانی را بر روی مؤلفه‌های مختلف میدان تصادفی CMB بررسی می‌کنیم. نتایج ما نشان می‌دهد که نسبت سیگنال به نوفه ناشی از اثر همگرایی گرانشی بر روی میدان تصادفی دمایی CMB بیشتر از میدان قطبش است. ما دریافتیم که برای یک تهی‌جا با تقارن استوانه‌ای در انتقال به سرخ $z_{\text{Void}} = 0.8$ با تباین چگالی $\delta = -1\%$ ، با حدود هزار دقیقه رصد می‌توان سهم تهی‌جا را تعیین کرد. این درحالی است برای یک بافت کیهانی که در انتقال به سرخ $z_{\text{Texture}} = 6.0$ زندگی می‌کند، رصد طولانی‌تری نیاز است. ما انتظار داریم که رصدهای آینده با قدرت تفکیک بالا، بتوانند قندهای قوی بر روی دامنه این مدل‌ها، فراهم کنند.

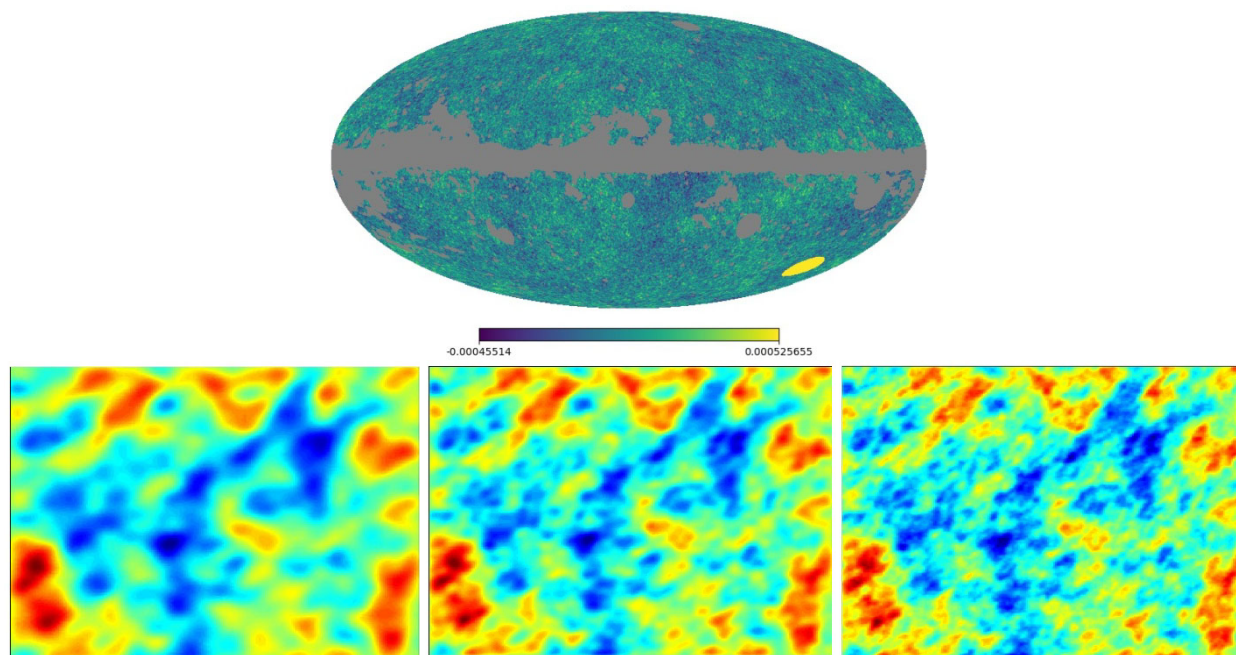
واژه‌های کلیدی: میدان تصادفی CMB، همگرایی گرانشی، تحلیل درست‌نمایی

۱. مقدمه

مقایسه مشاهده‌پذیرهای میدان تصادفی CMB با پیش‌بینی‌های مدل‌های نظری کیهان‌شناختی، نشان داده است که مدل استاندارد کیهان‌شناسی (ΛCDM) با تعداد شش ضریب آزاد، سازگاری بسیار خوبی با مشاهدات دارد و کمیت‌های آن هم با دقت بالایی توسط این اندازه‌گیری‌ها مقید شده‌اند [۲]. در کنار این همخوانی بی‌نظیر، ناهنجاری‌هایی در CMB رصد و گزارش شده است [۳ و ۴]. در یک دسته‌بندی جالب می‌توان به (الف) ناهنجاری‌ها در فضای زاویه‌ای، (ب) ناهنجاری در فضای هماهنگ‌های کروی، اشاره کرد [۵]. بخش اول شامل:

تابش زمینه کیهانی^۱ (CMB) بی‌شک یکی از مهم‌ترین رصدهای کیهانی در چند دهه گذشته است. این میدان تصادفی که قدیمی‌ترین اطلاعات مربوط به افت‌وخیز امواج الکترومغناطیسی را نشان می‌دهد، شامل مشاهده‌پذیرهایی همچون میدان آماری ناهمسانگردی‌های دمایی و همچنین میدان افت‌وخیز قطبش است و اطلاعاتی از شار کیهانی و همچنین اثرات سرراهی را در خود دارد [۱].

۱. Cosmic Microwave Background



شکل ۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) (شکل بالا) لکه روشن در نیم کره پایین موقعیت لکه سرد رصد شده توسط ماهواره پلانک در داده‌کاهی IQU-Commander را نشان می‌دهد. (شکل پایین) سمت چپ ناحیه مختص لکه سرد رصد شده توسط ماهواره پلانک، وسط با اثر باریکه ACT و راست با اثر باریکه گاوسی با $\Theta_{FWHM} = 20'$.

در این مقاله قصد داریم که به مطالعه ناهنجاری لکه سرد CMB پردازیم (شکل ۱ موقعیت لکه سرد را در رصد ماهواره پلانک از CMB نشان می‌دهد). برای این منظور رویکرد اثرات سرراهی را در پیش می‌گیریم. یکی از معروف‌ترین نظریه‌ها برای توجیه این ناحیه سرد، وجود یک تهی‌جای^۱ کیهانی بزرگ [۸] و یا یک بافت^۲ کیهانی [۹] در سر راه حرکت فوتون‌های CMB از سطح آخرین پراکندگی تا ناظر است. در واقع می‌توان گفت که این ساختارها با ایجاد انتقال به سرخ^۳ گرانشی (اثر سکس-ولف^۴) منجر به سرد شدن فوتون‌های تابش زمینه گذرا از این ناحیه می‌شوند. اثر همگرایی گرانشی این ساختارها بر ناهمسانگردی‌های دمایی تابش زمینه نیز بررسی شده است و پیش‌بینی‌هایی برای قدرت تفکیک رصدگرهای آینده برای ناهمسانگردی‌های ایجاد شده توسط این دو ساختار انجام شده است [۱۰]. این در حالی است که مطالعه کمی اثر قالب‌های تهی‌جا و بافت کیهانی بر روی سایر

کم بودن واریانس داده‌ها نسبت به آن چه که از شبیه‌سازی مبتنی بر مدل Λ CDM به دست می‌آید؛ وجود لکه سرد به شعاع تقریبی پنج درجه در مختصات $(l, b) = [210^\circ, -57^\circ]$ که حدود ۷۰ میکروکلون سردتر از بقیه نواحی است، کوچک بودن تابع همبستگی دمایی در جدایی زاویه‌ای بزرگ‌تر از ۶۰ درجه و همچنین نامتقارنی نیم‌کره‌ای در واریانس دما، است [۳] و [۴]. بخش دوم نیز شامل مواردی همچون: نامتقارنی نیم‌کره‌ای طیف توان؛ هم‌راستایی غیرقابل انتظار ممان چهارقطبی و ممان هشت‌قطبی (در یک میدان تصادفی همسانگرد گاوسی، انتظار داریم که فازها کاملاً از هم مستقل باشند، در حالی که رصدها یک همبستگی معناداری در فضای هماهنگ‌های کروی بین چهارقطبی و هشت‌قطبی، نشان می‌دهند). اهمیت این ناهنجاری‌ها از نقطه نظر آماری جای بحث دارد، اما با فرض با اهمیت دانستن این انحرافات، پژوهش‌های زیادی به منظور توضیح منشاء آنها انجام شده است [۶ و ۷]. رهیافت‌های پژوهش‌های اخیر به دو بخش اصلی تقسیم‌بندی می‌شوند: اثرات کیهان اولیه در ایجاد ناهنجاری‌ها و اثرات سرراهی.

۱. Void

۲. Texture

۳. Redshift

۴. Sachs-Wolfe

نامیده می‌شود (برای توضیحات بیشتر در مورد ویژگی‌های این تابع به مرجع [۱۲] مراجعه شود). جهت $\hat{n} \equiv (\theta, \varphi)$ راستای رصد میدان CMB توسط ناظر را نشان می‌دهد. ضرایب بسط در معادله (۲) به صورت زیر است

$$\begin{aligned} a_{\ell m}^T &= \int d\Omega Y_{\ell m}^*(\hat{n}) T(\hat{n}), \\ a_{\ell, \ell m}^{QU} &= \int d\Omega Y_{\ell m}^*(\hat{n}) (Q + iU)(\hat{n}), \\ a_{-\ell, \ell m}^{QU} &= \int d\Omega Y_{\ell m}^*(\hat{n}) (Q - iU)(\hat{n}), \end{aligned} \quad (3)$$

مناسب است که به جای استفاده از $a_{-\ell, \ell m}^{QU}$ و $a_{\ell, \ell m}^{QU}$ از ترکیب خطی آنها به صورت زیر استفاده کنیم [۱۳]

$$a_{\ell m}^E \equiv -\frac{a_{\ell, \ell m}^{QU} + a_{-\ell, \ell m}^{QU}}{2}, \quad a_{\ell m}^B \equiv i \frac{a_{\ell, \ell m}^{QU} - a_{-\ell, \ell m}^{QU}}{2} \quad (4)$$

عبارت‌های موجود در معادله (۴) تحت عملگر پارته به صورت متفاوت رفتار می‌کنند. به نحوی که کمیت مرتبط با E تحت پارته ناوردا است در حالی که کمیت مربوط به B در اثر عملگر پارته تغییر علامت می‌دهد. این اتفاق شبیه آن چیزی است که برای میدان الکتریکی و مغناطیسی رخ می‌دهد و از همین روست که با نمادهای E و B نشان داده شده‌اند. اکنون می‌توان مشاهده پذیرهای میدان CMB را به صورت (T, E, B) در نظر گرفت. پس طیف توان این مشاهده‌پذیرها به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\begin{aligned} C_{\ell}^{TT} &= \frac{2}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \langle a_{\ell m}^T a_{\ell m}^{T*} \rangle, \\ C_{\ell}^{EE} &= \frac{2}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \langle a_{\ell m}^E a_{\ell m}^{E*} \rangle, \\ C_{\ell}^{BB} &= \frac{2}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \langle a_{\ell m}^B a_{\ell m}^{B*} \rangle, \\ C_{\ell}^{TE} &= \frac{2}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \langle a_{\ell m}^T a_{\ell m}^{E*} \rangle \end{aligned} \quad (5)$$

سایر ترکیب‌ها با توجه به تقارن‌ها صفر خواهند بود. در بخش بعد با تکیه بر تقریب آسمان تخت^۱ اثر همگرایی ناشی از قالب‌های تهی جا و بافت کیهانی را بر روی میدان تصادفی CMB که با کمیت‌های (T, Q, U) و یا معادل آن یعنی (T, E, B) نشان داده می‌شوند، بررسی می‌کنیم.

مشاهده‌پذیرهای میدان تصادفی CMB مانند قطبش E و B انجام نشده است. در این مقاله، ما به بررسی اثر همگرایی گرانشی ایجاد شده احتمالی توسط این ساختارهای فرضی بر روی قطبش میدان CMB می‌پردازیم و مشاهده‌پذیری این اثر را توسط رصدهای آینده تخمین می‌زنیم. به طور مشخص سؤالی که مطرح می‌شود این است که چنین قالب‌هایی چه تأثیری بر روی قطبش لکه سرد CMB دارند؟ در این مقاله تلاش می‌کنیم به این سؤال پاسخ دهیم.

چارچوب این مقاله به صورت زیر خواهد بود: در بخش ۲ بیان ریاضی مؤلفه‌های مشاهده‌پذیر میدان تصادفی CMB، ارایه می‌شود. در بخش ۳ به معرفی اثر همگرایی گرانشی قالب‌های تهی جا و بافت کیهانی، خواهیم پرداخت. در بخش ۴، پیش‌بینی اثر همگرایی گرانشی تهی جا و بافت کیهانی بر روی لکه سرد میدان تصادفی CMB ارایه می‌شود. سایر ملاحظات رصدی نیز در بخش ۴ توصیف می‌شود. بخش ۵ نیز به جمع‌بندی و نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

۲. نمایش ریاضی میدان تصادفی CMB

در این بخش به بیان ریاضی مشاهده‌پذیرهای میدان تصادفی CMB می‌پردازیم. با در نظر گرفتن تانسور شدت، I_{ij} ، که یک تانسور رتبه 2×2 است، کمیت‌های استوکس مبتنی بر درایه‌های تانسور شدت به صورت زیر نوشته می‌شوند [۱۱]

$$T \equiv (I_{11} + I_{22}), \quad Q \equiv (I_{11} - I_{22}), \quad U \equiv 2I_{12} = 2I_{21} \quad (1)$$

که در آن T میدان افت‌وخیزهای دما و Q و U بیانگر قطبش هستند. بنابراین می‌توان گفت که مهم‌ترین مشاهده‌پذیرهای میدان CMB عبارتند از (T, Q, U) [۱۲]. میدان تصادفی CMB بر روی کره‌ای به مرکز ناظر در نظر گرفته می‌شود، بنابراین می‌توان آن را بر حسب هماهنگ‌های کروی (پایه‌های وزنی اسپینی) به صورت زیر بسط داد:

$$\begin{aligned} T(\hat{n}) &= \sum_{\ell, m} a_{\ell m}^T Y_{\ell m}(\hat{n}) (Q + iU)(\hat{n}) = \sum_{\ell, m} a_{\ell, \ell m}^{QU} Y_{\ell m}(\hat{n}), \\ (Q - iU)(\hat{n}) &= \sum_{\ell, m} a_{-\ell, \ell m}^{QU} Y_{\ell m}(\hat{n}), \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن اصطلاحاً تابع هماهنگ کروی اسپین s

۱. Flat sky approximation

$$A_{\text{Void}} \equiv \frac{\pi G}{c^2} |\delta| \langle \Sigma \rangle \frac{D_{LS}}{D_S} \frac{D_L}{(1+z_{\text{Void}})}, \quad (7)$$

است. در اینجا کمیت‌های D_L ، D_S و D_{LS} ، به ترتیب طول همراه ناظر تا عدسی، طول همراه ناظر تا چشمه و فاصله همراه ناظر و چشمه را نشان می‌دهند. δ تباین چگالی، چگالی زمینۀ کیهانی و $\langle \Sigma \rangle = \bar{\rho} L / (1+z_{\text{Void}})$ معیاری از چگالی سطحی است. $\bar{\rho}$ استوانه‌ای شکل است که تقریباً برابر با $z_{\text{Void}} = 0.8$ در نظر گرفته می‌شود. طول همراه استوانه را برابر با $L = 200 \text{ Mpc}$ و شعاع زاویه‌ای اش را برابر با $\theta = 3.1^\circ$ می‌گیریم. سایر ویژگی‌های در نظر گرفته شده در این مقاله در جدول ۱ گزارش شده است. مشخص است که در صورتی که تباین چگالی تهی‌جا را به صورت عددی منفی در نظر بگیریم اثر آن شبیه یک عدسی واگرا کننده خواهد بود.

۳.۱. مدل بافت کیهانی

گذارفازها در مقیاس‌های مختلفی از انرژی رخ می‌دهند. نمونه‌هایی از این گذارفازها در فیزیک انرژی‌های پایین عبارتند از گذارفاز فرومغناطیسی [۲۱] و گذار فاز فروالکترونیک [۲۲]. در فیزیک انرژی‌های بالا نیز انتظار می‌رود که انواعی از این گذارفازها رخ دهند [۲۳-۲۶]. بافت‌ها^۵ نوعی از ناهنجاری‌های کیهانی هستند که در اثر یک سری گذار فاز کیهانی اولیه می‌توانند شکل گرفته باشند [۹ و ۲۴]. یک بافت کیهانی در حال رمبش، یک چاه پتانسیل متغیر با زمان ایجاد می‌کند و با توجه به این که در لحظه رصد فوتون‌ها داخل یا خارج بافت کیهانی باشیم، در فوتون‌های CMB که از آنها می‌گذرند انتقال به سرخ یا انتقال به آبی مشاهده خواهیم کرد [۲۵]. علاوه بر آن، چاه پتانسیل ناشی از این بافت کیهانی می‌تواند همانند یک عدسی گرانشی انحرافی را در مسیر انتشار فوتون‌هایی که از آنها عبور می‌کنند، ایجاد کند [۹ و ۲۶]. مدل ریاضی برای انحراف مؤثر در مسیر حرکت فوتون‌های CMB توسط یک بافت کیهانی با تقارن استوانه‌ای به صورت زیر داده می‌شود [۱۷ و ۱۸]

۳. همگرایی گرانشی CMB ناشی از مدل‌های

تهی‌جا و بافت کیهانی

در این بخش به معرفی قالب تهی‌جا و بافت کیهانی برای ساختارهای کیهانی که در دوره اخیر کیهانی به سر می‌برند، می‌پردازیم. این قالب‌ها از مهم‌ترین گزینه‌های کیهان اخیر برای ایجاد ناهنجاری لکه سرد در میدان تصادفی CMB هستند. سپس اثر همگرایی گرانشی^۱ بر روی فوتون‌های CMB عبوری از آنها را بررسی می‌کنیم. اثر مهم دیگری نیز این ساختارهای کیهانی بر روی فوتون‌های CMB دارند که منجر به انتقال به سرخ کیهانی^۲ می‌شود و اصطلاحاً اثر ریس-سیما^۳ نامیده می‌شود [۱۴] و آن را در این مقاله بررسی نمی‌کنیم.

۳.۱. مدل تهی‌جا

تهی‌جا^۴ محلی بزرگ کیهانی می‌تواند اثرات قابل توجهی بر روی فوتون عبوری داشته باشد. این مدل به عنوان یکی از گزینه‌های ایجاد کننده لکه سرد CMB معرفی شده است [۸ و ۱۵]. مدل تهی‌جا هم به صورت ساختاری با تقارن کروی [۱۶] هم با تقارن استوانه‌ای معرفی شده است [۱۷-۱۹]. مطالعات قبلی نشان می‌دهند که تهی‌جاها کیهانی کمتر با تقارن کروی یافت می‌شوند، بنابراین در اینجا ما مدل استوانه‌ای با تقریب عدسی نازک را در نظر می‌گیریم [۲۰]. تحول زمانی تهی‌جا اثر انتقال به سرخ ریس-سیما را بر روی CMB ایجاد می‌کند که در اینجا بررسی نخواهد شد. از طرف دیگر، تهی‌جا به عنوان یک عدسی گرانشی نیز عمل می‌کند. انحراف ناشی از این عدسی گرانشی در مسیر انتشار فوتون‌های CMB با فرض تقارن استوانه‌ای به صورت زیر داده می‌شود [۱۷ و ۱۸]

$$\bar{\alpha}_{\text{Void}}(r) = \alpha_{\text{Void}}(r) \hat{r}, \quad (6)$$

$$\alpha_{\text{Void}}(r) = \begin{cases} A_{\text{Void}} r, & r < R_{\text{Void}} \\ A_{\text{Void}} \frac{R_{\text{Void}}^2}{r}, & r \geq R_{\text{Void}} \end{cases}$$

که در آن

۱. Gravitational lensing

۲. Gravitational redshift

۳. Rees-Sciama

۴. Void

۵. Texture

می‌کنیم. نکته‌ای که باید مورد تاکید قرار گیرد این است که در این تحقیق فقط اثر همگرایی گرانشی را در نظر خواهیم گرفت و به سایر اثرهای مورد انتظار مانند اثر سکس-ولف تجمعی^۴ نمی‌پردازیم. همچنین در نظر می‌گیریم که لکه سرد ایجاد شده فقط ناشی از هریک از قالب‌های معرفی شده است و حالت‌های ترکیبی را در نظر نخواهیم گرفت. بنابراین می‌توان گفت که نتایج به دست آمده در این تحقیق حد پایین مشاهده‌پذیری قالب مورد مطالعه را ناشی از اثر همگرایی گرانشی، نشان می‌دهند.

۴.۱. اثر همگرایی گرانشی بر روی لکه سرد میدان

تصادفی CMB

در بخش ۲ مشاهده‌پذیرهای میدان تصادفی CMB را به صورت $\Delta \equiv (T, Q, U)$ نشان دادیم. این مشاهده‌پذیرها در اثر همگرایی گرانشی در رژیم اختلالی به صورت زیر تغییر می‌کنند:

$$\begin{aligned} T(\vec{r}) &\rightarrow T_{\text{Lensed}}(\vec{r}) = T(\vec{r} + c_T \vec{\alpha}(\vec{r})) \\ &\approx T(\vec{r}) + \frac{\partial T(\vec{r})}{\partial r} c_T \alpha(r), \\ Q(\vec{r}) &\rightarrow Q_{\text{Lensed}}(\vec{r}) = Q(\vec{r} + c_Q \vec{\alpha}(\vec{r})) \\ &\approx Q(\vec{r}) + \frac{\partial Q(\vec{r})}{\partial r} c_Q \alpha(r), \\ U(\vec{r}) &\rightarrow U_{\text{Lensed}}(\vec{r}) = U(\vec{r} + c_U \vec{\alpha}(\vec{r})) \\ &\approx U(\vec{r}) + \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial r} c_U \alpha(r), \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن c_T, c_Q, c_U ضرایب قالب مفروض در مشاهده‌پذیرهای میدان تصادفی CMB هستند. با عنایت به این که منشاء همه آنها را یکسان در نظر گرفتیم از این پس اندیس‌های آنها را حذف می‌کنیم. همچنین $\vec{\alpha}(\vec{r})$ برای قالب تهی جا و قالب بافت کیهانی به ترتیب توسط رابطه‌های (۶) و (۸) داده می‌شوند. معادلات (۱۰) را در رژیم همگرایی گرانشی ضعیف، به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} T_{\text{Unlensed}}(\vec{r}) &\approx T_{\text{Lensed}}(\vec{r}) - \frac{\partial T_{\text{Lensed}}(\vec{r})}{\partial r} c \alpha(r), \\ Q_{\text{Unlensed}}(\vec{r}) &\approx Q_{\text{Lensed}}(\vec{r}) - \frac{\partial Q_{\text{Lensed}}(\vec{r})}{\partial r} c \alpha(r), \\ U_{\text{Unlensed}}(\vec{r}) &\approx U_{\text{Lensed}}(\vec{r}) - \frac{\partial U_{\text{Lensed}}(\vec{r})}{\partial r} c \alpha(r), \end{aligned} \quad (11)$$

ما به دنبال تعیین مقدار c هستیم، بنابراین تابع درست‌نمایی را

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{\text{Texture}}(r) &= \alpha_{\text{Texture}}(r) \hat{r} \\ \alpha_{\text{Texture}}(r) &= A_{\text{Texture}} \frac{r}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{R_{\text{Texture}}}\right)^2}} \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن

$$R_{\text{Texture}} \equiv \frac{2\sqrt{\kappa}(1+z_{\text{Texture}})}{E(z_{\text{Texture}}) \int_0^{z_{\text{Texture}}} \frac{dz}{E(z)}} \quad (9)$$

$$A_{\text{Texture}} \equiv \frac{2\sqrt{\varepsilon} D_{LS}}{R_{\text{Texture}} D_S}$$

و $E(z) = \sqrt{\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda(z)}$ کمیت‌های D_L, D_S, D_{LS} ، به ترتیب طول همراه ناظر تا عدسی، طول همراه ناظر تا چشمه و فاصله همراه ناظر و چشمه را نشان می‌دهند. همچنین $\eta^2 \equiv 8\pi^2 G \eta^2$ که $\varepsilon \equiv \eta^2$ مقیاس انرژی رخداده شکست تقارن کیهانی را نشان می‌دهد. κ نیز عددی از مرتبه یک است. همچنین z_{Texture} نشان دهنده انتقال به سرخی است که بافت کیهانی در آن زندگی می‌کند [۱۷]. جدول ۱ مقادیر مدل بافت کیهانی را که در این مقاله به کار رفته‌اند نشان می‌دهد.

۴. پیش‌بینی اثر همگرایی گرانشی تهی جا و بافت

کیهانی بر روی لکه سرد میدان تصادفی CMB

در این بخش با تکیه بر قالب‌های تهی جا و بافت کیهانی که به عنوان مدل‌هایی برای توصیف لکه سرد مشاهده شده بر روی میدان تصادفی CMB معرفی شده‌اند، تلاش می‌کنیم که اثر همگرایی گرانشی ناشی از آنها را بر روی قطبش تابش زمینه کیهانی در ناحیه لکه سرد بررسی کنیم. در ادامه تلاش می‌کنیم به این سؤال پاسخ دهیم که آیا امکان رصد بافت کیهانی و یا تهی جا با قالب مفروض در رصدهای آتی میدان تصادفی CMB وجود دارد؟ برای این منظور با توجه به رهیافت پیش‌بینی^۱ در چارچوب تحلیل فیشر^۲، از تابع درست‌نمایی^۳ استفاده می‌کنیم. نسبت سیگنال به نوفه دامنه قالب تهی جا و بافت کیهانی را برای اساس شرایط مختلف رصد محاسبه

۱. Forecast

۲. Fisher analysis

۳. Likelihood function

۴. Integrated Sachs–Wolfe effect

$$\left(\frac{S}{N}\right)^\dagger = \left\langle M^\dagger \Lambda^{-1} M \right\rangle_{c=\bar{c}}$$

$$M \equiv \Re \left(\frac{\partial \Delta_{\text{Lensed}}(\vec{r})}{\partial r} \alpha(r) \right), \quad (15)$$

$$M^\dagger \equiv \left(\frac{\partial \Delta_{\text{Lensed}}(\vec{r})}{\partial r} \alpha(r) \right)^\dagger \Re^\dagger,$$

$$\Lambda^{-1} \equiv \Re \cdot \Psi^{-1} \cdot \Re^\dagger$$

که در آن Λ ماتریس کتواریانسی است که قطری شده است. از طرف دیگر می دانیم که به دلیل همسان گردی آماری ماتریس کتواریانس در فضای هماهنگ های کروی و یا معادل آن در تقریب آسمان تخت یعنی فضای فوریه، به صورت بلوکه قطری است یعنی $\Lambda_{\ell\ell'} = \Lambda_\ell \delta_{\ell\ell'}$. بنابراین تبدیل تشابهی که به دنبال آن هستیم همان تبدیل هماهنگ کروی (تبدیل فوریه در آسمان تخت) است، یعنی

$$\Re_\ell = \int d\vec{r} e^{-i\vec{\ell} \cdot \vec{r}} \begin{pmatrix} \cos(\nu\phi_\ell) & \sin(\nu\phi_\ell) \\ -\sin(\nu\phi_\ell) & \cos(\nu\phi_\ell) \end{pmatrix}$$

که در آن $\vec{\ell} : (\ell, \phi_\ell)$ بنابراین

$$T_{\text{Lensed}}(\vec{r}) = \frac{1}{(\nu\pi)^\nu} \int d\vec{\ell} e^{i\vec{\ell} \cdot \vec{r}} T_{\text{Lensed}}(\vec{\ell})$$

$$Q(\vec{r}) = \frac{1}{(\nu\pi)^\nu} \int d\vec{\ell} e^{i\vec{\ell} \cdot \vec{r}} [E_\ell \cos(\nu\phi_\ell) - B_\ell \sin(\nu\phi_\ell)] \quad (16)$$

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{(\nu\pi)^\nu} \int d\vec{\ell} e^{i\vec{\ell} \cdot \vec{r}} [E_\ell \sin(\nu\phi_\ell) + B_\ell \cos(\nu\phi_\ell)]$$

و رابطه بین کمیت های استوکس و مؤلفه های قطبش به صورت زیر است

$$E_\ell = Q_\ell \cos(\nu\phi_\ell) + U_\ell \sin(\nu\phi_\ell) \quad (17)$$

$$B_\ell = -Q_\ell \sin(\nu\phi_\ell) + U_\ell \cos(\nu\phi_\ell)$$

طی ف توان مؤلفه ها نیز به صورت $\langle X(\ell) X'^\dagger(\ell') \rangle = (\nu\pi)^\nu \delta_{\ell\ell'} C_\ell^{XX'}$ و معادله (۵) داده می شود.

پس با کمک تعاریفی که در معادله (۱۶) ارایه شد، داریم:

$$\left(\frac{S}{N}\right)^\dagger = \left\langle M^\dagger \cdot \Lambda^{-1} \cdot M \right\rangle_{c=\bar{c}}$$

$$= \left\langle \left(M_\ell^T, M_\ell^E, M_\ell^B \right)^\dagger \cdot \begin{pmatrix} C_\ell^{TT} & C_\ell^{TE} & \cdot \\ C_\ell^{TE} & C_\ell^{EE} & \cdot \\ \cdot & \cdot & C_\ell^{BB} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} M_\ell^T \\ M_\ell^E \\ M_\ell^B \end{pmatrix} \right\rangle_{c=\bar{c}}, \quad (18)$$

به صورت $\Im \propto \exp\left(-\frac{\chi^\nu}{\nu}\right) \propto \exp\left(-\frac{[c-\bar{c}]^\nu}{\nu\sigma_c^\nu}\right)$ در نظر می گیریم. در آن

$$\chi^\nu(c) = -\nu \ln \Im(c) + N \ln \nu\pi + \ln(Det\Psi) \quad (12)$$

$$= \Delta_{\text{Unlensed}}^\dagger \cdot \Psi^{-1} \cdot \Delta_{\text{Unlensed}}$$

و در اینجا $\Psi(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \Delta_{\text{Unlensed}}(\vec{r}) \Delta_{\text{Unlensed}}(\vec{r}') \rangle$ کتواریانس میدان اولیه یا عدسی نشده است. کمیت N تعداد داده ها است که در اینجا تعداد پیکسل های نقشه را نشان می دهد. اگر به بهترین نحو ممکن بتوانیم نقشه عدسی نشده را استخراج کنیم، توانسته ایم مقدار ضریب c یعنی \bar{c} را تعیین کنیم. این یعنی تابع درست نمایی را بیشینه کرده ایم. درخواست اکستریم شدن χ^ν منجر به استخراج تخمین گر ضریب c به صورت زیر می شود:

$$\left. \frac{\partial \chi^\nu(c)}{\partial c} \right|_{c=\bar{c}} = 0 \rightarrow \bar{c} \quad (13)$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial \Delta_{\text{Lensed}}(\vec{r})}{\partial r} \alpha(r) \right)^\dagger \cdot \Psi^{-1} \cdot \Delta_{\text{Lensed}}(\vec{r})}{\left(\frac{\partial \Delta_{\text{Lensed}}(\vec{r})}{\partial r} \alpha(r) \right)^\dagger \cdot \Psi^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \Delta_{\text{Lensed}}(\vec{r})}{\partial r} \alpha(r) \right)},$$

نسبت سیگنال به نوفه که در واقع همان معکوس انحراف معیار در مقدار میانگین ضریب c است به صورت زیر خواهد بود:

$$\left(\frac{S}{N}\right)^\dagger \equiv \frac{1}{\sigma_c^\nu} = - \left\langle \frac{\partial^\nu \ln \Im}{\partial c^\nu} \right\rangle_{c=\bar{c}} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial^\nu \chi^\nu}{\partial c^\nu}$$

$$= \left\langle \left(\frac{\partial \Delta_{\text{Lensed}}(\vec{r})}{\partial r} \alpha(r) \right)^\dagger \cdot \Psi^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \Delta_{\text{Lensed}}(\vec{r})}{\partial r} \alpha(r) \right) \right\rangle_{c=\bar{c}}, \quad (14)$$

محاسبه معادله (۱۴) به دلیل این که یک ضرب ماتریسی دارد و $\Psi(\vec{r}, \vec{r}')$ نیز در حالت کلی قطری نیست، پیچیده است. در عوض می توان یک تبدیل تشابهی ساخت که در آن صورت ماتریس کتواریانس قطری شود و در نتیجه از پیچیدگی و زمان بر بودن محاسبات کاست. اگر \Re همان تبدیل تشابهی باشد، خواهیم داشت:

مؤثر نوفه دستگاہ است که معمولاً در واحد $\mu K / \sqrt{\text{sec}}$ بیان می‌شود. کمیت f_{sky} نشان‌دهنده کسری از آسمان است که رصد می‌شود. برای مثال در اینجا قرار است فقط ناحیه لکه سرد رصد شود، بنابراین اگر اندازه آن را در حدود $8^\circ \times 8^\circ$ در نظر بگیریم در نتیجه $f_{\text{sky}} \sim 1/55 \times 10^{-3}$. کمیت Θ_{FWHM}^1 باریکه^۲ تلسکوپ را مشخص می‌کند. عبارت T_{obs} مدت زمان رصد لکه سرد میدان CMB را نشان می‌دهد. مقادیر انتخاب شده برای کمیت‌های معرفی شده در جدول ۱ آمده است. اکنون با جایگذاری معادله (۱۶) در معادله (۱۹) و در نظر گرفتن تبدیلی مشابه برای قالب $\vec{\alpha}(\vec{r})$ و استفاده از قضیه پیچش^۳ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} M_\ell^T &= \int d\vec{l}' i \left[\vec{\alpha}(\vec{l} - \vec{l}') \cdot \vec{l}' \right] T_{\ell'}^{\text{Lensed}}, \\ M_\ell^E &= \int d\vec{l}' i \left[\vec{\alpha}(\vec{l} - \vec{l}') \cdot \vec{l}' \right], \\ &\left[E_{\ell'}^{\text{Lensed}} \cos(\gamma\phi_\ell - \gamma\phi_{\ell'}) + B_{\ell'}^{\text{Lensed}} \sin(\gamma\phi_\ell - \gamma\phi_{\ell'}) \right], \quad (22) \\ M_\ell^B &= \int d\vec{l}' i \left[\vec{\alpha}(\vec{l} - \vec{l}') \cdot \vec{l}' \right], \\ &\left[-E_{\ell'}^{\text{Lensed}} \sin(\gamma\phi_\ell - \gamma\phi_{\ell'}) + B_{\ell'}^{\text{Lensed}} \cos(\gamma\phi_\ell - \gamma\phi_{\ell'}) \right], \end{aligned}$$

در نهایت بعد از جاگذاری معادله (۲۲) در معادله (۱۹) داریم

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N} \right)^\dagger &= \sum_\ell f_{\text{sky}} \frac{\gamma\ell+1}{\gamma} \\ &\times \left(\frac{\left[M_\ell^T \right]^\dagger M_\ell^T (C_\ell^{EE} + N_\ell) + \left[M_\ell^E \right]^\dagger M_\ell^E (C_\ell^{TT} + N_\ell^{TT}) - C_\ell^{TE} \left(\left[M_\ell^T \right]^\dagger M_\ell^E + \left[M_\ell^E \right]^\dagger M_\ell^T \right) + \left[M_\ell^B \right]^\dagger M_\ell^B}{(C_\ell^{TT} + N_\ell^{TT})(C_\ell^{EE} + N_\ell^{EE}) - (C_\ell^{TE})^\dagger} + \frac{\left[M_\ell^B \right]^\dagger M_\ell^B}{C_\ell^{BB} + N_\ell^{BB}} \right), \quad (23) \end{aligned}$$

قالب‌هایی همچون تهی جا و بافت کیهانی بر روی ناحیه سرد میدان تصادفی CMB فراهم شده است. پس با محاسبه عبارت $\vec{\alpha}(\vec{l} - \vec{l}')$ برای قالب تهی جا و بافت کیهانی، میزان نسبت سیگنال به نوفه را برای مؤلفه‌های مختلف میدان CMB از جمله مدهای قطبشی محاسبه می‌کنیم.

۲.۴. پیش‌بینی اثر همگرایی گرانشی ناشی از تهی جا و

بافت کیهانی بر روی قطبش لکه سرد

تبدیل فوریه انحراف ایجاد شده در مسیر انتشار فوتون‌های

۱. Full width half maximum

۲. Beam

۳. Convolution theorem

و در صورتی که نوفه نیز داشته باشیم خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N} \right)^\dagger &= \left(\left[M_\ell^T, M_\ell^E, M_\ell^B \right]^\dagger \right) \\ &\left(\begin{array}{ccc} C_\ell^{TT} + N_\ell^{TT} & C_\ell^{TE} & \cdot \\ C_\ell^{TE} & C_\ell^{EE} + N_\ell^{EE} & \cdot \\ \cdot & \cdot & C_\ell^{BB} + N_\ell^{BB} \end{array} \right)^{-1} \cdot \left(\begin{array}{c} M_\ell^T \\ M_\ell^E \\ M_\ell^B \end{array} \right) \Bigg|_{c=\bar{c}}, \quad (19) \end{aligned}$$

که در معادلات (۱۸) و (۱۹) متغیرها به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$\begin{aligned} M_\ell^T &= \int d\vec{r} e^{-i\vec{l} \cdot \vec{r}} \partial_r T_{\text{Lensed}}(\vec{r}) \cdot \vec{\alpha}(\vec{r}), \\ M_\ell^E &= \int d\vec{r} e^{-i\vec{l} \cdot \vec{r}} \left[\partial_r Q_{\text{Lensed}}(\vec{r}) \cdot \vec{\alpha}(\vec{r}) \cos(\gamma\phi_\ell) \right. \\ &\quad \left. + \partial_r U_{\text{Lensed}}(\vec{r}) \cdot \vec{\alpha}(\vec{r}) \sin(\gamma\phi_\ell) \right], \quad (20) \\ M_\ell^B &= \int d\vec{r} e^{-i\vec{l} \cdot \vec{r}} \left[-\partial_r Q_{\text{Lensed}}(\vec{r}) \cdot \vec{\alpha}(\vec{r}) \sin(\gamma\phi_\ell) \right. \\ &\quad \left. + \partial_r U_{\text{Lensed}}(\vec{r}) \cdot \vec{\alpha}(\vec{r}) \cos(\gamma\phi_\ell) \right], \end{aligned}$$

همچنین مدل نوفه دستگاهی برای رصد CMB به صورت زیر است

$$N_\ell^{TT} = \gamma\pi f_{\text{sky}} \frac{\tau_e^\dagger}{T_{\text{obs}}} \exp\left(\frac{\ell(\ell+1)\Theta_{\text{FWHM}}^\dagger}{\wedge \ln \gamma} \right), \quad (21)$$

و در نظر می‌گیریم $N_\ell^{EE} = N_\ell^{BB} = \gamma N_\ell^{TT}$ در اینجا τ_e دمای

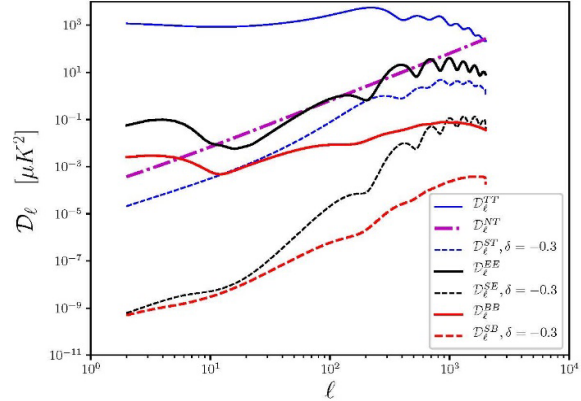
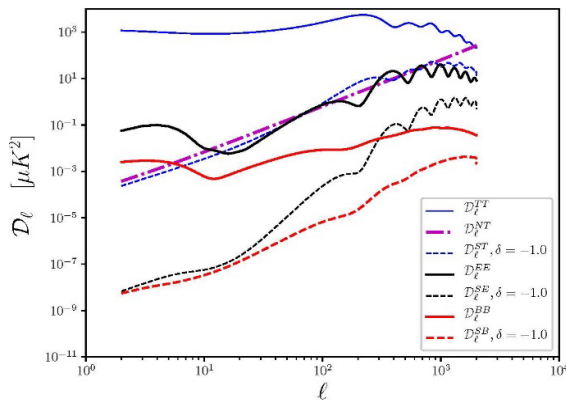
همچنین توابع چشمه را که در معادله (۲۳) وجود دارند، به صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم

$$\begin{aligned} S_\ell^T &\equiv \left[M_\ell^T \right]^\dagger M_\ell^T; \quad S_\ell^E \equiv \left[M_\ell^E \right]^\dagger M_\ell^E; \\ S_\ell^B &\equiv \left[M_\ell^B \right]^\dagger M_\ell^B; \quad S_\ell^{TE} \equiv \left[M_\ell^T \right]^\dagger M_\ell^E \end{aligned}$$

همچنین تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\ell^{TT} &\equiv \ell(\ell+1)C_\ell^{TT} / \gamma\pi, \quad \mathcal{D}_\ell^{EE} \equiv \ell(\ell+1)C_\ell^{EE} / \gamma\pi \\ \mathcal{D}_\ell^{BB} &\equiv \ell(\ell+1)C_\ell^{BB} / \gamma\pi, \quad \mathcal{D}_\ell^{NT} \equiv \ell(\ell+1)N_\ell^{TT} / \gamma\pi \\ \mathcal{D}_\ell^{ST} &\equiv \ell(\ell+1)S_\ell^T / \gamma\pi, \quad \mathcal{D}_\ell^{SE} \equiv \ell(\ell+1)S_\ell^E / \gamma\pi \\ \mathcal{D}_\ell^{SB} &\equiv \ell(\ell+1)S_\ell^B / \gamma\pi \end{aligned} \quad (24)$$

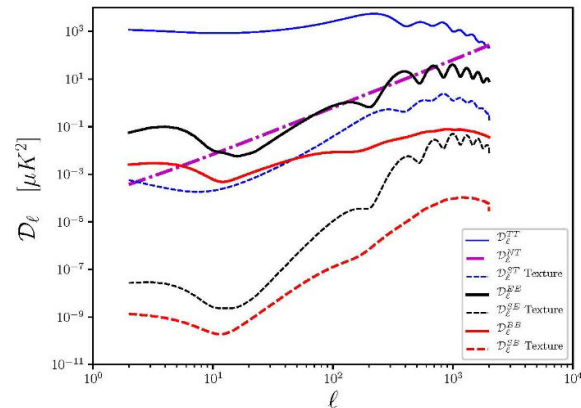
اکنون ابزار لازم برای محاسبه میزان مشاهده‌پذیر بودن اثر



شکل ۲. (رنگی در نسخه الکترونیکی) راست: طیف توان کمیت‌های مختلف به همراه طیف توان چشمه ناشی از اثر همگرایی گرانشی مدل تهی جا برای لکه سرد با تباین چگالی $\delta = -0.3$. چپ: همانند شکل سمت راست به جز برای تباین چگالی $\delta = -1.0$.

است، کمیت‌های معرفی شده در معادله (۲۴) در شکل ۲ برای دو نوع تباین چگالی مختلف تهی جای و در شکل ۳ برای مدل بافت کیهانی برای مؤلفه‌های مختلف میدان تصادفی CMB نشان داده شده‌است. همان طور که انتظار داریم سهم اثر همگرایی گرانشی بر روی مدهای قطبش بسیار کمتر از میدان دمایی CMB است. شکل ۴ نسبت سیگنال به نوفه را (در صورتی که فقط سهم همگرایی گرانشی را در نظر بگیریم) بر حسب مدت زمان رصد ناحیه سرد CMB برای (T, E, B) ناشی از مدل تهی جا و بافت کیهانی را نشان می‌دهد. برای تهی جای بزرگ با افزایش میزان قدر مطلق تباین چگالی سهم اثر همگرایی گرانشی خیلی سریع رشد پیدا می‌کند و در نتیجه در مدت زمان کمتری می‌توان آن را مقید کرد. برای بافت کیهانی نیز، با توجه به این که آن را به عنوان ساختار سرراهی در نظر گرفتیم، میزان بیشینه انحراف مسیر نور دقیقاً در لبه لکه سرد در حدود $0.1' \sim$ است که در حدود یک مرتبه مقداری از سهم مدل تهی جا کمتر است. بنابراین انتظار داریم مدت زمان طولانی‌تری برای رصد این مدل در مقایسه با مدل تهی جا نیاز باشد.

۴.۴. ملاحظات رصدی ردپای مدل‌ها در ایجاد لکه سرد
استراتژی پیشنهادی رصد برای تعیین سهم مدل‌های مختلف در ایجاد لکه سرد، بعد از تعیین موقعیت لکه سرد در رصدهای قبلی (شکل ۱) به صورت زیر است



شکل ۳. (رنگی در نسخه الکترونیکی) طیف توان کمیت‌های مختلف به همراه طیف توان چشمه ناشی از اثر همگرایی گرانشی مدل بافت کیهانی برای لکه سرد.

میدان CMB توسط تهی جا به صورت [۱۷ و ۱۸]

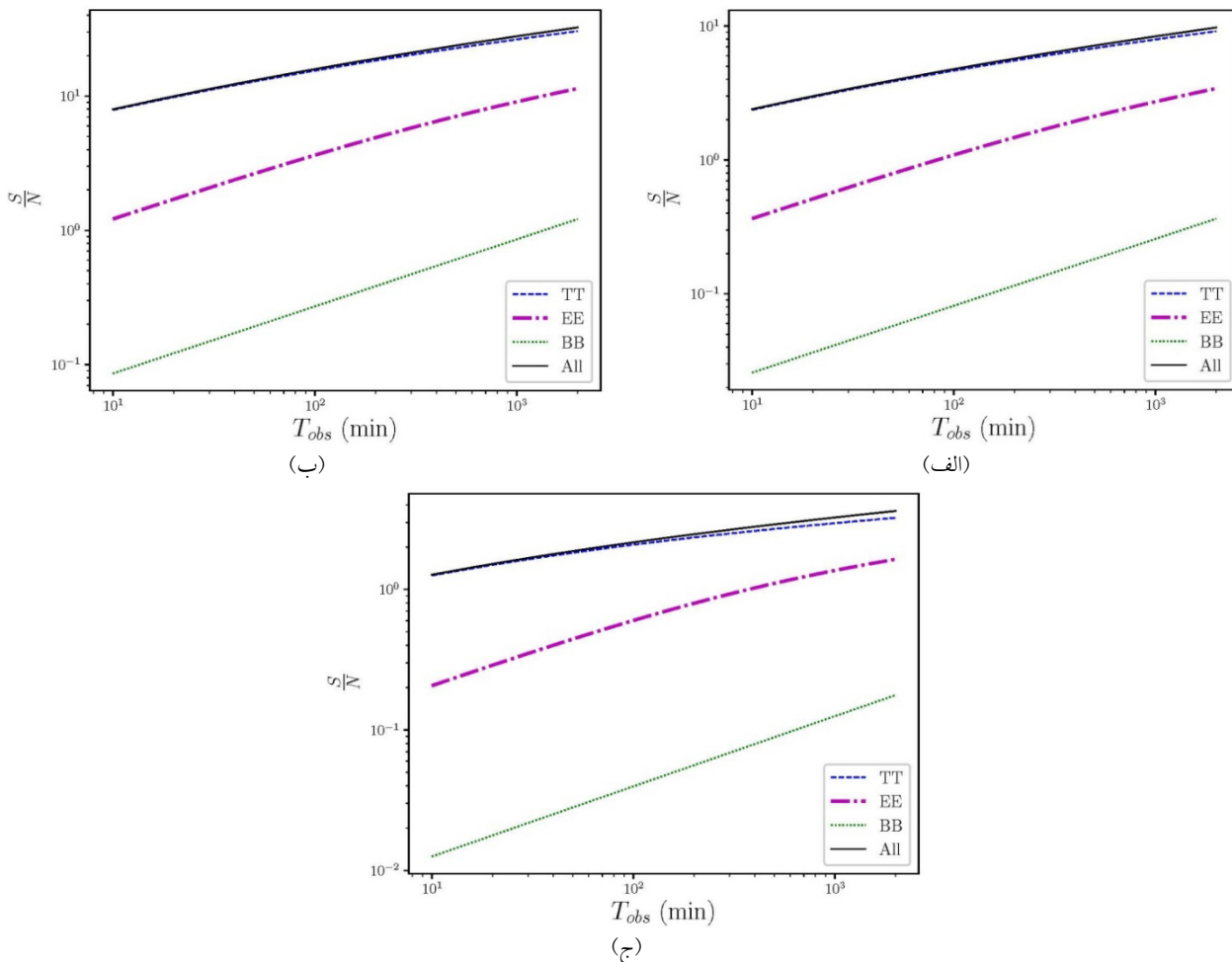
$$\bar{\alpha}(\vec{l}) = -i \frac{\bar{l}^4 \pi A_{\text{Void}} R_{\text{Void}} J_1(R_{\text{Void}} \ell)}{\ell^3}, \quad (25)$$

و توسط بافت کیهانی به صورت [۱۷ و ۱۸]

$$\bar{\alpha}(\vec{l}) = i \frac{\bar{l}^4 \pi A_{\text{Texture}} R_{\text{Texture}} \exp(-R_{\text{Texture}} \ell / 2) (R_{\text{Texture}} \ell + 2)}{2 \ell^3}, \quad (26)$$

است. در اینجا $J_1(R_{\text{Void}} \ell)$ تابع بسل نوع اول است. با در نظر گرفتن معادلات (۲۳)، (۲۵)، (۲۶) و مقادیری که در جدول ۱ آمده است، با کمک برنامه رایانه‌ای به زبان فورتن و طیف توان‌های مورد نیاز که توسط نرم‌افزار CAMB^4 محاسبه شده

۱. <https://camb.info/>



شکل ۴. (الف) نسبت سیگنال به نوفه بر حسب مدت زمان رصد ناشی از اثر همگرایی گرانشی مدل تهی‌جا برای لکه سرد با تباین چگالی $\delta = -0.3$. (ب) همانند بخش بالا به جز برای تباین چگالی $\delta = -1.0$. (ج) نسبت سیگنال به نوفه بر حسب مدت زمان رصد ناشی از اثر همگرایی گرانشی مدل بافت کیهانی برای لکه سرد.

قالب مورد نظر تولید شده است. در اینجا دامنه‌ای برای هرکدام از این اثرات در نظر گرفته‌ایم.

(ج) اکنون تابع تخمین‌گر را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\chi^2(c_{\text{Lensed}}, c_{\text{RS}}) = -2 \ln \mathfrak{L}(c_{\text{Lensed}}, c_{\text{RS}}) + N \ln 2\pi + \ln(\text{Det } C) = \Delta^\dagger \cdot C^{-1} \cdot \Delta \quad (28)$$

که در آن

$$\delta\Delta \equiv \Delta_{\text{Cleaned}}(\vec{r}) - c_{\text{Lensed}}\Delta_{\text{Lensed}}(\vec{r}) - c_{\text{RS}}\Delta_{\text{RS}}(\vec{r})$$

و $C(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \Delta_{\text{Primordial}}(\vec{r}) \Delta_{\text{Primordial}}(\vec{r}') \rangle$ که با کمک نظریه قابل محاسبه است.

(د) اکنون برای تعیین مقادیر ضرایب، با توجه به بیشینه شدن تابع درست‌نمایی به ازای مقادیر بهینه ضرایب، از معادلات زیر استفاده می‌کنیم

(الف) ابتدا باید تا جای ممکن نقشه مشاهده شده $\Delta_{\text{Observed}}(\vec{r})$ را از تمام اثرات سر راهی شناخته شده ناشی از عواملی غیر از گزینه‌های لکه سرد پاک کرد. نقشه تمیز شده را $\Delta_{\text{Cleaned}}(\vec{r})$ می‌نامیم.

(ب) اکنون بخش تمیز شده را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\Delta_{\text{Cleaned}}(\vec{r}) = \Delta_{\text{Primordial}}(\vec{r}) + c_{\text{Lensed}}\Delta_{\text{Lensed}}(\vec{r}) + c_{\text{RS}}\Delta_{\text{RS}}(\vec{r}), \quad (27)$$

که در آن $\Delta_{\text{Primordial}}(\vec{r})$ افت‌وخیز میدان CMB که در کیهان اولیه ایجاد شده است. $\Delta_{\text{Lensed}}(\vec{r})$ سهم ناشی از اثر همگرایی گرانشی است که توسط قالب مورد نظر ایجاد شده است. $\Delta_{\text{RS}}(\vec{r})$ ناشی از اثر انتقال به سرخ کیهانی است که توسط

۱. RS= Rees-Sciama

$$\left. \frac{\partial \chi^2(c_{\text{Lensed}}, c_{\text{RS}})}{\partial c_{\text{Lensed}}} \right|_{c=\bar{c}} = 0 \rightarrow \begin{cases} c_{\text{Lensed}} \Delta_{\text{Lensed}}^\dagger \cdot C^{-1} \cdot \Delta_{\text{Lensed}} + c_{\text{RS}} \Delta_{\text{Lensed}}^\dagger \cdot C^{-1} \cdot \Delta_{\text{RS}} = \Delta_{\text{Lensed}}^\dagger \cdot C^{-1} \cdot \Delta_{\text{Cleaned}} \\ c_{\text{RS}} \Delta_{\text{RS}}^\dagger \cdot C^{-1} \cdot \Delta_{\text{RS}} + c_{\text{Lensed}} \Delta_{\text{RS}}^\dagger \cdot C^{-1} \cdot \Delta_{\text{Lensed}} = \Delta_{\text{RS}}^\dagger \cdot C^{-1} \cdot \Delta_{\text{Cleaned}} \end{cases}$$

مجهول تعیین کردیم. ما در این مقاله فقط سهم اثر همگرایی گرانشی را لحاظ کردیم و سایر اثرات فیزیکی مانند اثر انتقال به سرخ کیهانی را در نظر نگرفتیم. بنابراین می توان گفت که نتایج ما حد بالایی از مشارکت مدل های مذکور در توصیف لکه سرد و همچنین قدرت مشاهده پذیری آنها را نشان می دهند.

نتایج ما نشان داد که با احتساب مدل تهی جا نسبت سیگنال به نوفه بر حسب زمان رصد ناحیه لکه سرد پس از حدود ۱۰۰۰ دقیقه ردپایی در مد قطبشی B ایجاد می کند که قابل رصد است حتی اگر مد قطبشی B اولیه ای وجود نداشته باشد. پس از همین مدت رصد، ردپای مدل بافت کیهانی بر روی مد قطبشی مذکور یک مرتبه مقداری کمتر است.

خطمشی لازم برای اعمال استراتژی رصد با کمک داده های رصدی نیز ارائه شد. با کمک این چارچوب می توان میزان مشارکت مدل تهی جا و همچنین مدل بافت کیهانی در ایجاد لکه سرد را تعیین کرد. جزییات این رهیافت در تحقیق جداگانه ای در حال انجام است.

قدردانی

نویسندگان از علیرضا وفايي صدر و حسین مصحفی به دلیل فراهم آوردن برخی از داده های مورد نیاز برای انجام تحلیل ها، تشکر و قدردانی می کنند. این مقاله بخشی از یک طرح پژوهشی است که تحت حمایت معاونت پژوهشی دانشگاه شهید بهشتی اجرا شده است.

(ه) برای محاسبه خطای ضرایب از تحلیل ماتریس فیشر به صورت زیر استفاده می کنیم

$$2 \ln \mathfrak{L} = N \ln 2\pi + \ln(\text{Det} \Psi) - \Delta^\dagger \cdot C^{-1} \cdot \Delta \quad (29)$$

$$2 \ln \mathfrak{L} = 2 \ln 2\pi + \ln(\text{Det} C_c) - \delta c^\dagger \cdot C_c^{-1} \cdot \delta c$$

و $C_{c_i c_j} \equiv \langle \delta c_i \delta c_j \rangle$ همچنین $\delta c_i \equiv c_i - \bar{c}_i$ است. در نتیجه عناصر ماتریس فیشر یا به طور معادل عناصر معکوس ماتریس کثواریانس به صورت زیر خواهد بود

$$(C^{-1})_{c_i c_j} = F_{c_i c_j} = \left\langle \frac{\partial^2 \ln \mathfrak{L}}{\partial c_i \partial c_j} \right\rangle_{c=\bar{c}} \quad (30)$$

اکنون با به کار بردن داده های واقعی در منطقه ای که نماینده لکه سرد است و با بکار بردن مراحل فوق میزان با معنا بودن قالب های در نظر گرفته شده در توصیف لکه سرد میدان تصادفی CMB به دست می آید. این بخش از تحلیل به عنوان تحقیقی جداگانه در گروه تحقیقاتی ما در حال انجام است.

۵. جمع بندی و نتیجه گیری

در این تحقیق، با توجه به ناهنجاری لکه سرد در میدان تصادفی CMB که در فضای حقیقی رصد شده است، تلاش کردیم میزان مشاهده پذیر بودن قالب هایی همچون تهی جا و یا بافت کیهانی را که می تواند در کیهان اخیر ایجاد شده باشند و به عنوان منشاء لکه سرد به حساب آیند را بررسی کنیم. برای این منظور با توجه به مؤلفه های دمایی و مدهای قطبشی، اثر همگرایی گرانشی ناشی از قالب های مذکور را با یک دامنه

مراجع

1. W Hu, and S Dodelson, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **40**, 1 (2002) 171.
2. N Aghanim et al., "Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters", *arXiv preprint arXiv:1807.06209* (2018).
3. P A R Ade et al., *Astronomy & Astrophysics* **594** (2016) A16.
4. M Cruz et al., *The Astrophysical Journal* **655**, 1 (2007) 11.
5. J D Schwarz et al., *Classical and Quantum Gravity* **33**, 18 (2016) 184001.
6. J A R Cembranos et al., *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2008**, 10 (2008) 039.
7. M Cruz et al., *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **390**, 3 (2008) 913.
8. K Inoue and J Silk, *The Astrophysical Journal* **648**, 1 (2006) 23.

19. S Shandarin *et al.*, “Shapes and Sizes of Voids in the Lambda Cold Dark Matter Universe: Excursion Set Approach”, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **367**, 4 (2006) 1629.
20. M Bartelmann, and P Schneider, *Physics Reports* **340**, 4-5 (2001) 291.
21. N Goldenfeld, “Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group”, CRC Press (2018).
22. M Griffin, *et al.*, *Physical Review X* **2.4** (2012) 041022.
23. M Sakellariadou, “Inflationary Cosmology,” Springer, Berlin, Heidelberg (2008) 359.
24. N Turok, *Physical Review Letters* **63**, 24 (1989) 2625.
25. N Turok, and D Spergel, *Physical Review Letters* **64**, 23 (1990) 2736.
26. R Durrer *et al.*, *Nuclear Physics B* **368**, 2 (1992) 527.
9. M Cruz *et al.*, *Science* **318**, 5856 (2007) 1612.
10. P Vielva, *Advances in Astronomy* **2010** (2010) 1.
11. U Seljak, *The Astrophysical Journal* **482**, 1 (1997) 6.
12. M Zaldarriaga and U Seljak, *Physical Review D* **55**, 4 (1997) 1830.
13. E Newman and R Penrose, *J. Math. Phys.* **7**, 863 (1966).
14. M J Rees, M J Rees and D W Sciama, *Nature* **217**, (1968) 511; **217** (1968) 511.
15. K Inoue, Kaiki and J Silk, *The Astrophysical Journal* **664**, 2 (2007) 65.
16. E Martinez-Gonzalez, J L Sanz, and J Silk, *The Astrophysical Journal* **355** (1990) L5.
17. S Das and D Spergel, *Physical Review D* **79**, 4 (2009) 043007.
18. E Platen, R Weygaert, and B Jones, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **387**, 1 (2008) 128.