

## رشد پیچیدگی هولوگرافی در نظریه‌های میدان اتلافی

کمیل بابائی ولنی و محمدرضا محمدی مظفر

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گیلان

پست الکترونیکی: Babaeivlni@guilan.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۰۷/۲۸؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۸/۰۵/۲۷)

### چکیده

در این مقاله با استفاده از دوگانی گرانش-پیمانه‌ای به بررسی تحول زمانی کمیت پیچیدگی هولوگرافی در چارچوب نظریات میدان اتلافی خواهیم پرداخت. بدین منظور از نسخه مبتنی بر کنش برای محاسبه پیچیدگی استفاده می‌کنیم. نشان خواهیم داد که نرخ رشد پیچیدگی در تطابق با حد لوید در زمان‌های خیلی زیاد به مقدار ثابتی همگرا شده، لیکن این همگرایی از مقادیر بزرگ‌تر رخ خواهد داد که به معنای نقض این حد در زمان‌های میانی است. نقض حد لوید در تحول زمانی پیچیدگی به گونه‌ای است که با افزایش مقادیر پارامتر اتلاف، میزان این نقض بزرگ‌تر خواهد شد. همچنین در این تحقیق وابستگی زمان بحرانی‌ای که پس از آن تحول زمانی پیچیدگی آغاز می‌شود را به عنوان تابعی از پارامتر اتلاف بررسی خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: دوگانی گرانش-پیمانه‌ای، پیچیدگی هولوگرافی، حد لوید

### ۱. مقدمه

در سالیان اخیر ایده ایجاد ارتباط بین گرانش و نظریات میدان تحت عنوان دوگانی‌های گرانش-پیمانه‌ای بسیار مورد توجه قرار گرفته است. این ایده کلی، با حدس مالداسنا [۱] پیرامون تناظر پاددوسیتیه-همدیس (AdS/CFT) تکامل یافته و علاوه بر ایجاد نگرش‌های جدید بنیادین به ساختار این دوگانی‌ها، کاربردهای بسیاری نیز در مطالعه پدیده‌های گوناگون در نظریات میدان دارای دوگان گرانشی دارد. از جمله این مطالعات کاربردی می‌توان به رهیافت هولوگرافی برای مطالعه

پلاسمای کوآرک-گلوئون [۲] و سامانه‌های خارج از حالت تعادل [۳] اشاره کرد. پس از معرفی آنتروپی درهم‌تنیدگی هولوگرافی به وسیله ریو و تاکایاناگی [۴]، جنبه دیگری از این سیر مطالعاتی به ارتباط بین گرانش و نظریه اطلاعات کوانتومی معطوف شد.

ارتباط مفهومی میان گرانش و نظریه اطلاعات به ویژه در چارچوب فیزیک سیاهچاله‌ها و اصل هولوگرافی از دیرباز مورد توجه قرار گرفته بود [۵]. این مجموعه مطالعات با یافتن و بررسی دوگان هولوگرافی برای کمیت‌های گوناگونی که در

$$\frac{dC}{dt} \leq 2M,$$

که در آن  $C$  معرف پیچیدگی و  $M$  معیاری از انرژی سامانه است. در [۱۱ و ۱۲] روش محاسبه پیچیدگی با استفاده از رهیافت هولوگرافی برای نظریات میدان دارای دوگان گرانشی با استفاده از دو نسخه متفاوت، که به نسخه‌های مبتنی بر حجم و مبتنی بر کنش معروف شده‌اند، پیشنهاد شده است. نتایج به دست آمده از این دو نسخه در حد زمان‌های بزرگ با حد لوید سازگاری داشته و این هماهنگی به عنوان یکی از محک‌های جدی برای آزمودن درستی محاسبات هولوگرافی مطرح شده است. همچنین تعمیم این نسخه‌ها به کمیت‌های فیزیکی مشابه نیز انجام شده است [۱۳-۱۵].

در مقاله پیش‌رو قصد داریم با انجام محاسبات مربوط به پیچیدگی هولوگرافی با استفاده از نسخه مبتنی بر کنش برای گرانش‌های دوگان به نظریات میدان اتلافی، درستی حد لوید در این پس زمینه‌های هندسی را بررسی کرده و همچنین تأثیر پارامتر اتلاف را بر نحوه تحول زمانی این کمیت بسنجیم. ساختار مقاله بدین ترتیب است: در بخش بعد به معرفی نسخه مبتنی بر کنش برای محاسبه پیچیدگی خواهیم پرداخت. در بخش سوم پس زمینه‌های هندسی که به عنوان دوگانی برای نظریات میدان اتلافی در نظر گرفته می‌شوند را تبیین خواهیم کرد. در بخش چهارم، محاسبات مربوط به پیچیدگی را در این هندسه‌ها انجام داده و در نهایت در بخش پایانی به بیان خلاصه‌ای از نتایج و پیشنهاداتی برای مطالعات آتی اکتفا خواهیم کرد.

## ۲. نسخه پیچیدگی هولوگرافی مبتنی بر کنش

بر طبق این نسخه که برای اولین بار در [۱۲] مطرح شد، پیچیدگی هولوگرافی متناسب است با مقدار کنش گرانشی روی پوسته<sup>۲</sup> که در ناحیه معینی از فضا زمان محاسبه شده باشد. عبارت دقیق این تناسب به صورت زیر است:

$$C = \frac{I_{WDW}}{\pi \hbar}.$$

ناحیه مورد نظر که بدان محدوده ویلر- دویت (WDW)<sup>۳</sup>

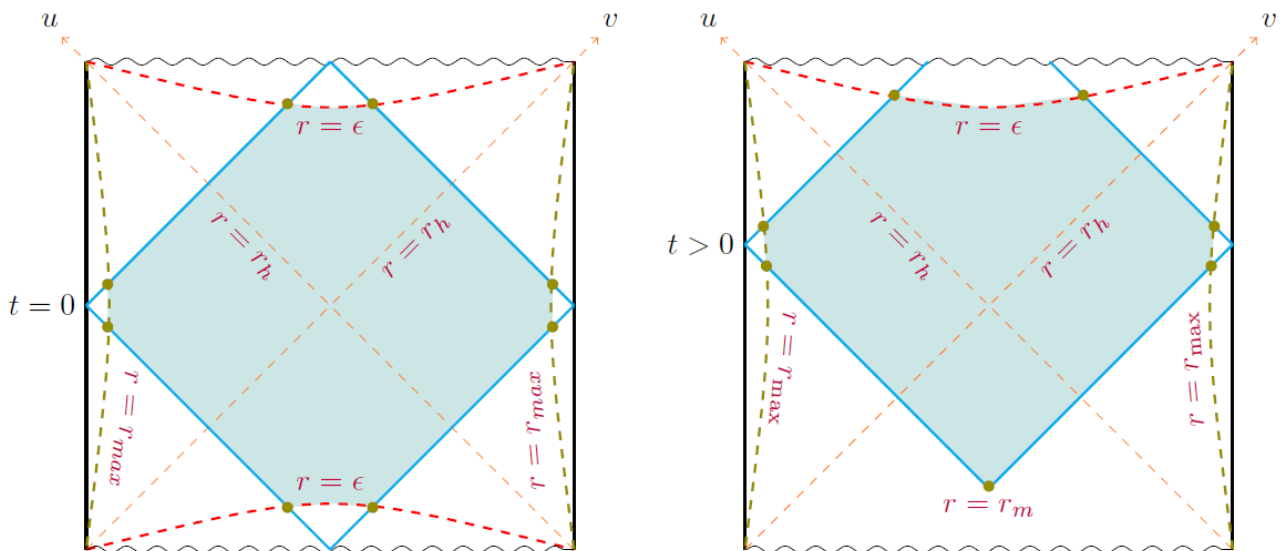
مباحث مربوط به نظریه اطلاعات مطرح می‌شوند مانند اطلاعات متقابل، آنتروپی نسبی، نگاتیویتی و ... ادامه پیدا کرد. به عنوان یکی از مهم‌ترین دستاوردهای این سیر پژوهشی می‌توان به استخراج معادلات خطی شده اینشتین از روابط بین کمیات وابسته به اطلاعات اشاره کرد [۶]. دستاورد اخیر موجب شد که موج جدیدی از مطالعات پیرامون استخراج هندسه از اطلاعات و درهم‌تنیدگی شکل بگیرد. علیرغم موفقیت‌های اولیه این موج جدید در ایجاد ارتباط میان گرانش و ساختارهای موجود در نظریه میدان و نظریه اطلاعات کوانتومی، ناکامی آن در ارائه یک توصیف کامل از مفاهیم گرانشی نیز مورد توجه قرار گرفت [۷]. در این مرجع نشان داده شد که برای توصیف پاره‌ای از رفتارهای دینامیکی که در ورای افق یک سیاهچاله رخ می‌دهند، استفاده از مفهوم درهم‌تنیدگی کافی نبوده و باید از مفهوم دیگری با عنوان پیچیدگی<sup>۱</sup> بهره برد.

کمیت پیچیدگی برای اولین بار در قالب مباحث مربوط به نظریه اطلاعات کوانتومی و محاسبات کوانتومی مطرح شد و برخلاف آنتروپی، درهم‌تنیدگی تا مدت‌ها رهیافت محاسباتی خوش تعریفی در چارچوب نظریه میدان نداشت. تعریف ساده‌ای از این کمیت بدین ترتیب است: سامانه‌ای فیزیکی را در یک حالت اولیه  $\psi$  در نظر بگیرید. اکنون با اعمال مجموعه‌ای از گیت‌های کوانتومی، این حالت متحول شده و حالت جدیدی مانند  $\psi'$  تولید می‌شود. هر چند که ارتباط دقیق بین این دو حالت تنها با دانستن نوع و نحوه اثر گیت‌های کوانتومی‌ای که به کار برده‌ایم حاصل می‌شود، با این وجود می‌توان تعداد این گیت‌ها را به عنوان معیاری از دشواری یا پیچیدگی ساختن حالت  $\psi'$  از حالت  $\psi$  تعبیر کرد. علیرغم این که تعبیر بیان شده کیفی به نظر می‌رسد لیکن اخیراً با استفاده از همین مفهوم برای اولین بار پیچیدگی کوانتومی در چارچوب نظریات میدان محاسبه شده است [۸] و [۹]. همچنین نشان داده شده است که نحوه تحول زمانی این کمیت مقید بوده و همواره رابطه زیر که به حد لوید معروف است وجود دارد [۱۰]:

۲. On-shell

۳. Wheeler-DeWitt(WDW)

۱. Complexity



شکل ۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار پنرز برای فضای مجانبی پاددوسیه و محدوده Wheeler-DeWitt (WDW) که با رنگ آبی مشخص شده است. شکل سمت چپ حالتی را نشان می‌دهد که خطوط نورگونه رها شده از مرز در ناحیه پشت افق در هر دو جهت زمانی با تکینگی برخورد می‌کنند. شکل سمت راست حالتی را نشان می‌دهد که این خطوط تنها در یک جهت با تکینگی تلاقی پیدا کرده‌اند. هر دو نمودار برای حالت متقارن که در آن زمان راست و چپ با هم برابرند رسم شده‌اند.

کردن اصل وردش، که در یافتن معادلات گرانشی از کنش بالا به کار برده می‌شود، باید جمله‌ای سطحی تحت عنوان جمله گیبونز-هاوکینگ-یورک به کنش اضافه کنیم. از طرفی مشابه این جمله برای سطوح مرزی نورگونه نیز در [۱۷] معرفی شده است. سهم این جملات سطحی را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$I_{GHY} = \frac{1}{\lambda\pi G_N} \int d^d x \sqrt{h} K_t \pm \frac{1}{\lambda\pi G_N} \int d^d x \sqrt{h} K_s \pm \frac{1}{\lambda\pi G_N} \int d^{d-1} x d\lambda \sqrt{h} K_n, \quad (2)$$

که در آن  $h$  و  $h'$  به ترتیب متریک القائی بر روی سطوح زمان گونه یا فضا گونه  $d$  بعدی و سطح نورگونه  $d-1$  بعدی هستند. همچنین  $K_{t,s,n}$  انحناهای عرضی سطح مورد نظر بوده و  $\lambda$  پارامتر افین<sup>۱</sup> سطح نور گونه است. در این رابطه علامت‌های پشت جملات سطحی با توجه به موقعیت سطح مورد نظر با حجم ناحیه WDW و جهت زمانی آن ناحیه مشخص می‌شوند [۱۸]. از طرف دیگر با توجه به این که مرز دربردارنده ناحیه مورد نظر می‌تواند دارای نقاط گوشه‌ای (شکسته) و نوک تیز باشد، برای خوش تعریف کردن اصل وردش باید جملات زیر را در نظر گرفت [۱۹]:

گویند در شکل ۱ نشان داده شده است. در واقع همان طور که در شکل مشخص شده است این ناحیه بین خطوط نورگونه‌ای که از نقطه مشخصی بر روی مرز فضا زمان در جهت جلو و عقب زمان حرکت می‌کنند محدود شده است. در این شکل مکان افق، تکینگی و مرز فضا زمان به ترتیب با  $\epsilon$ ،  $r_h$  و  $r_{max}$  مشخص شده‌اند.

به دست آوردن کنش روی پوسته گرانشی مستلزم یادآوری تعریف کنش در چارچوب گرانش است. در گام اول برای یافتن هندسه فضا زمان با شرط مجانبی پاددوسیه به در نظر گرفتن کنش اینشتین-هیلبرت به همراه ثابت کیهان‌شناسی نیاز داریم که با رابطه زیر داده می‌شود:

$$I_{bulk} = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^{d+1} x \sqrt{g} (R - 2\Lambda), \quad (1)$$

که در آن  $g$  متریک فضا زمان،  $R$  خمش نرده‌ای و  $\Lambda = -\frac{d(d-1)}{2}$  ثابت کیهان‌شناسی است (در این مقاله همواره شعاع فضای پاددوسیه را برابر با واحد اختیار خواهیم کرد). همان طور که خواهیم دید این عبارت بر روی تمام محدوده WDW محاسبه خواهد شد. از طرف دیگر همان گونه که در [۱۶] نشان داده شده است برای خوش تعریف

۱. Affine parameter

یک میدان وابسته به مکان سبب شکست تقارن انتقال شده و بدین ترتیب پایستگی مدهای تکانه از بین خواهد رفت؛ که به نوبه خود موجب رفتاری شبیه به قله درود در رسانندگی DC سامانه خواهد شد. از آنجایی که بر طبق تناظر پاددوسیه-همدیس، چشمه و تابع پاسخ برای هر عملگر، دوگان به مقادیر مرزی میدان متناظر در سمت گرانث هستند لذا باید جملات جدیدی به کنش گرانثی اضافه کرد. ساده ترین مدل برای توصیف این سازوکار در  $d+1$  بعد با عبارت زیر داده می شود:

$$I = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^{d+1}x \sqrt{g} \left( R - 2\Lambda - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{d-1} (\partial \phi_n)^2 \right), \quad (5)$$

که در آن  $\phi_n$  میدان های نرده ای بدون جرم هستند. جواب های متریک مجانبی پاددوسیه متناظر با این کنش به صورت زیر داده می شود:

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 dx^2, \quad (6)$$

$$f(r) = r^2 - \frac{\eta^2}{2(d-2)} - \frac{m}{r^{d-2}}.$$

همچنین میدان های نرده ای نیز تنها تابعی از مؤلفه های فضایی بوده و با عبارت زیر داده می شوند:

$$\phi_n(x^i) = \eta_{ni} x^i, \quad \eta^2 = \frac{1}{d-1} \sum_{i=1}^{d-1} \eta_i \cdot \eta_i,$$

$$(\bar{\eta}_i)_n = \eta_{ni}.$$

همان طور که دیده می شود میدان های نرده ای شکننده تقارن انتقال، متناسب با پارامتر  $\eta$  هستند که میزان ناهمگنی هندسه را تعیین می کند. در واقع اندازه قله درود در رسانندگی به وسیله این پارامتر سنجیده می شود. نکته ای که باید بدان توجه کرد این است که جواب های بالا تنها برای  $d > 2$  معتبر بوده و در حالت نظریه میدان دو بعدی تغییر خواهند کرد. برای متریک داده شده با معادله (۶)، دما و شعاع افق از روابط زیر حاصل خواهند شد:

$$T = \frac{dr_h}{4\pi} \left( 1 - \frac{\eta^2}{2dr_h^2} \right), \quad m = r_h^d \left( 1 - \frac{\eta^2}{2(d-2)r_h^2} \right). \quad (7)$$

برای توصیف ناحیه WDW و خطوط نور گونه، استفاده از مختصات ادینگتون-فینکل ستین که بر حسب مختصات

$$I_{joint} = \pm \frac{1}{16\pi G_N} \int d^{d-1}x \sqrt{h}^n a, \quad (3)$$

که در آن  $h^n$  متریک القاء شده بر روی گوشه بوده و  $a = \log(k_1 \cdot k_2)$  تعریف شده است که  $k_i$  به ازای  $i=1,2$  بردارهای عمود بر محل تقاطع سطوح سازنده گوشه هستند (در صورتی که هر دو بردار مورد نظر نورگونه باشند، آرگمان تابع لگاریتم بر دو تقسیم خواهد شد). از آنجایی که تعریف بردارهای نورگونه همواره تا حد یک عامل بهنجارش ابهام دارد، در نظر گرفتن جمله بالا سبب از بین رفتن تقارن هموارریخت<sup>۱</sup> خواهد شد. همان گونه که در [۱۸] نشان داده شده است، این ابهام با در نظر گرفتن جمله زیر بر روی سطوح نورگونه برطرف خواهد شد:

$$I_{amb} = \pm \frac{1}{16\pi G_N} \int d^{d-1}x d\lambda \sqrt{h'} \Theta \log(\tilde{L}\Theta), \quad (4)$$

که در آن  $\tilde{L} = \frac{1}{\sqrt{h'}} \frac{d\sqrt{h'}}{d\lambda}$  و  $\Theta$  یک طول مشخصه است. در بخش های بعد با در نظر گرفتن مجموع جملات بالا، عبارت مربوط به کنش گرانثی کل را در داخل محدوده WDW محاسبه کرده و با توجه به آن، تحول زمانی پیچیدگی هولوگرافی را خواهیم یافت.

### ۳. مدل های هولوگرافی برای نظریه میدان اتلافی

در چارچوب دوگانی پاددوسیه-همدیس، مدل های گرانثی متفاوتی به عنوان دوگان متناظر با یک نظریه میدان دارای اتلاف مطرح شده اند. در اغلب این مدل ها، فرایند اتلاف با شکستن تقارن انتقال که هم ارز با از بین بردن پایستگی تکانه است صورت می پذیرد. به عنوان نمونه در صورتی که سامانه مورد نظر را با یک میدان نرده ای وابسته به مکان  $\phi(x)$  که تابع پاسخی به شکل  $O_\phi$  دارد مختل کنیم، بر طبق اتحاد وارد<sup>۲</sup> خواهیم داشت:

$$\nabla^i T_{ij} + O_\phi \partial_j \phi = 0,$$

همان طور که برای اولین بار در [۲۰] نشان داده شد، وجود

۱. Diffeomorphism

۲. Ward identity

آینده و  $r = r_{\max}$  واقع در مرز فضای پاددوسیه را در نظر بگیریم. در این حالت یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که تنها قسمت مربوط به سطح  $r = \epsilon$  تابع زمان بوده و به صورت زیر داده می‌شود:

$$I_{GHY} = -\frac{r^{d-1}V}{\lambda\pi G_N} \left( f'(r) + \frac{\gamma(d-1)f(r)}{r} \right) \left( \frac{t}{\gamma} + r_{\infty}^* - r^*(r) \right) \Big|_{r=\epsilon} \quad (10)$$

برای محاسبه سهم ناشی از نقاط گوشه به کنش، همان گونه که از نمودار سمت چپ شکل ۱ مشخص است باید هفت گوشه را در نظر بگیریم. لیکن شبیه به محاسبات انجام شده در [۲۱] می‌توان نشان داد که تنها نقطه گوشه واقع در  $r = r_m$  وابسته به زمان بوده و به تحول زمانی پیچیدگی سهم خواهد داد. برای یافتن سهم این نقطه، بردارهای نورگونه زیر را برای سطوح نورگونه متناظر در نظر خواهیم گرفت:

$$\overline{k_L} = \alpha(dt + dr^*), \quad \overline{k_R} = \alpha(-dt + dr^*),$$

که در آن ضریب  $\alpha$  ثابت بهنجارش بردار نورگونه عمود بر سطح است. دقت به این نکته ضروری است که می‌توان این ضرایب را در دو بردار نورگونه بالا متفاوت از هم در نظر گرفت، لیکن نتیجه نهایی که برای نرخ رشد پیچیدگی هولوگرافی به دست خواهد آمد از این پارامتربندی مستقل است. در این حالت معادله (۳) منجر به نتیجه زیر می‌شود:

$$I_{joint} = -\frac{V r_m^{d-1}}{\lambda\pi G_N} \log \frac{|f(r_m)|}{\alpha^2}, \quad (11)$$

که وابستگی زمانی از طریق وابستگی مختصات  $r_m$  به زمان، که با معادله (۹) داده می‌شود، حاصل خواهد شد. از طرف دیگر همان طور که در بخش اول توضیح داده شد برای از بین بردن ابهام ناشی از تعیین نشدن بهنجارش بردار نورگونه باید عبارت داده شده با معادله (۴) را در نظر بگیریم. با انتخاب پارامتر افین  $\lambda = \frac{r}{\alpha}$  که منجر به  $\Theta = \frac{(d-1)\alpha}{r}$  می‌شود خواهیم داشت (همان طور که پیشتر توضیح داده بودیم از جملات مستقل از زمان صرف نظر کرده‌ایم):

$$I_{amb} = -\frac{V}{\lambda\pi G_N} r_m^{d-1} \left( \log \frac{(d-1)\alpha \tilde{L}}{r_m} + \frac{1}{d-1} \right). \quad (12)$$

معمول به صورت زیر داده می‌شوند متداول است:

$$v = t + r^*(r), \quad u = t - r^*(r), \\ r^*(r) = \int \frac{dr}{f(r)}, \quad r_{\infty}^* = \lim_{r \rightarrow r_{\max}} r^*(r).$$

در شکل ۱ جهت‌گیری دستگاه مختصات  $u-v$  را در نمودار پرنز مشخص کرده‌ایم. در قسمت بعد با استفاده از این جواب، پیچیدگی هولوگرافی را برای نظریه میدان دارای اتلاف، محاسبه خواهیم کرد.

#### ۴. نرخ رشد پیچیدگی

در این بخش با استفاده از جواب گرانشی ارائه شده در بخش قبل، همه جملات مربوط به کنش گرانشی روی پوسته را جداگانه محاسبه کرده و با توجه به آن، تحول زمانی پیچیدگی هولوگرافی را به دست خواهیم آورد. با توجه به این که تنها، تغییرات زمانی این کمیت برای ما اهمیت دارد، لذا در محاسبه جملات مربوط به کنش از در نظر گرفتن جملات مستقل از زمان پرهیز خواهیم کرد. یادآوری این نکته نیز ضروری است که محاسبات را تنها برای نمودار سمت راست شکل ۱ انجام خواهیم داد. همان طور که در [۲۱] نشان داده شده است، محاسبه پیچیدگی برای نمودار سمت چپ همواره نتیجه‌ای مستقل از زمان (بدون توجه به ساختار کلی متریک ایستا) به دست خواهد داد.

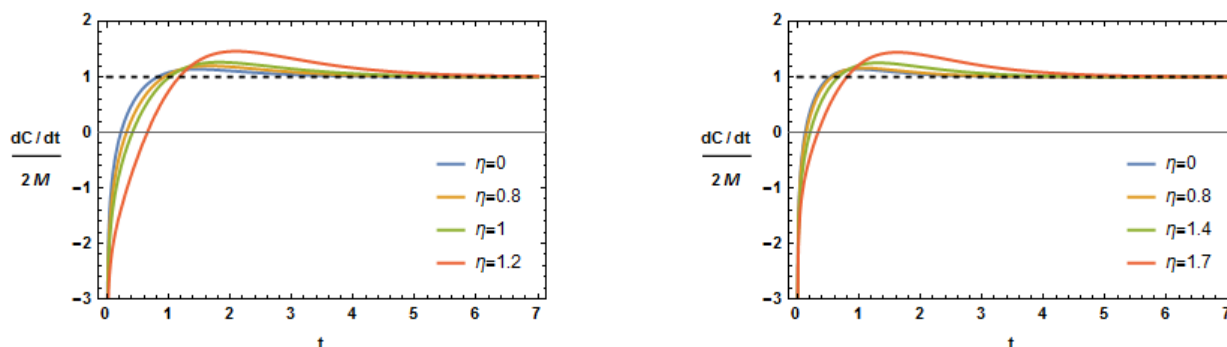
محاسبه سهم قسمت حجمی به کنش گرانشی که به عبارت (۱) داده می‌شود منجر به نتیجه زیر خواهد شد:

$$I_{bulk} = -\frac{dV}{\lambda\pi G_N} \left[ \int_{\epsilon}^{r_{\max}} dr r^{d-1} (\gamma r_{\infty}^* - \gamma r^*(r)) \int_{\epsilon}^{r_m} dr r^{d-1} \left( \frac{t}{\gamma} - r_{\infty}^* + r^*(r) \right) \right], \quad (8)$$

که در آن  $r_m$  نقطه‌ای در پشت افق گذشته است که خطوط نورگونه ناحیه چپ و راست در آن نقطه با یکدیگر تلاقی می‌کنند. مختصات این نقطه از حل معادله زیر حاصل خواهد شد:

$$\frac{t}{\gamma} - r_{\infty}^* + r^*(r_m) = 0. \quad (9)$$

از طرفی برای یافتن سهم مربوط به جملات GHY که با معادله (۲) داده می‌شود، باید سطوح  $r = \epsilon$  واقع در تکینگی



شکل ۲. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تحول زمانی پیچیدگی هولوگرافی به ازای مقادیر مختلف پارامتر اتلاف در سه بعد و چهار بعد (به ترتیب شکل‌های سمت چپ و راست).

لوید برآورده می‌شود، لیکن این اشباع از بالا بوده و لذا در زمان‌های میانی حد مورد نظر نقض شده است. بنابراین نقض حد لوید که پیش از این در حالت  $\eta = 0$  دیده شده بود برای مقادیر غیربدهی پارامتر اتلاف نیز وجود دارد. از طرف دیگر همان گونه که از شکل ۲ مشخص است با مقایسه مقادیر عددی  $\frac{dC}{dt}$  برای پارامترهای اتلاف متفاوت در می‌یابیم که با افزایش  $\eta$ ، مقدار بیشینه این کمیت بیشتر شده و لذا حد لوید به میزان بیشتری نقض شده است. همچنین پهنای ناحیه‌ای از زمان، که در آن  $\frac{dC}{dt} > 2M$  است نیز تابعی صعودی از پارامتر اتلاف است. توجه به این نکته ضروری است که همان گونه که پیشتر توضیح دادیم رفتار تحول زمانی پیچیدگی وابستگی زیادی به نقطه  $r_m$  دارد.

همان طور که در بخش ۴ بیان کردیم رفتار تحول زمانی پیچیدگی بین محدوده‌های WDW نشان داده شده در شکل ۱ کاملاً متفاوت است. به عنوان مثال حالت سمت چپ که نقطه تقاطع خطوط نورگونه بر روی تکینگی قرار گرفته، پیچیدگی تحول زمانی نداشته ولی در حالت سمت راست که نقطه تقاطع خطوط نورگونه از تکینگی جدا شده است وابستگی زمانی حاصل می‌شود. از طرفی با توجه به همین شکل می‌توان این تفاوت را ناشی از تفاوت در زمان مرزی دو حالت دانست. به عبارت دیگر یک زمان بحرانی ( $t_c$ ) وجود دارد که به ازای زمان‌های بزرگ‌تر از آن ( $t > t_c$ )، پیچیدگی وابسته به زمان خواهد شد. با استفاده از رابطه (۹)، این زمان بحرانی به سادگی به صورت زیر به دست خواهد آمد:

اکنون با جمع کردن عبارت‌های (۹) تا (۱۲) و همچنین استفاده از شرط  $\frac{dr_m}{dt} = -\frac{f(r_m)}{2}$ ، مشتق زمانی پیچیدگی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\pi \frac{dC}{dt} = 2M \left( 1 + \frac{r_m^{d-2}}{2m} f(r_m) \log \frac{(d-1)^2 \tilde{L} f(r_m)}{r_m^2} \right), \quad (13)$$

که در آن  $M = \frac{V(d-1)m}{16\pi G_N}$  بیانگر جرم سیاهچاله مورد نظر است. نکته‌ای که در نگاه اول از این عبارت مشخص است ظاهر شدن مقیاس  $\tilde{L}$  است که نشان می‌دهد جمله (۴) با وجود حذف ابهام ناشی از اندازه بردارهای نورگونه، عامل مقیاس جدیدی وارد کرده است. از آنجایی که مقدار دقیق این مقیاس در نحوه رفتار پیچیدگی در زمان‌های طولانی تأثیری ندارد، در نتایج نهایی با انتخاب  $\tilde{L} = \frac{1}{d-1}$  از ظاهر شدن این عامل مقیاس جلوگیری خواهیم کرد. ذکر این نکته ضروری است که تحول زمانی پیچیدگی در زمان‌های اولیه و میانی به انتخاب مقیاس  $\tilde{L}$  وابسته بوده که در این باره در بخش بعد توضیح خواهیم داد.

## ۵. نتیجه‌گیری

در این بخش به بررسی دقیق نتیجه (۱۳) و تبعات فیزیکی حاصل از آن خواهیم پرداخت. با داشتن این رابطه می‌توانیم تحول زمانی مشتق پیچیدگی هولوگرافی را بیابیم. این رفتار در شکل ۲ برای فضا زمان‌های با ابعاد متفاوت نشان داده شده است. همان طور که از این شکل مشخص است با وجود این که در زمان‌های طولانی مقدار این کمیت به اشباع رسیده و حد

پیچیدگی هولوگرافی در زمان‌های طولانی به صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$\frac{\pi}{M} \frac{dC}{dt} = 1 + 2\pi c_e T \frac{r_h^{d-1}}{m} \quad (15)$$

$$\left( 2\pi T t - \log \left( 2\pi c_e T d (d-1)^2 \tilde{L} \right) \right) e^{-2\pi T t} + \dots,$$

که در آن از تعریف (۷) برای پارامتر  $m$  بهره برده‌ایم. جمله اول در این عبارت نشان دهنده رفتار اشباع پیچیدگی هولوگرافی در زمان‌های طولانی (حد لوید) بوده که از مقیاس  $\tilde{L}$  مستقل است. از طرفی جمله دوم، اولین مرتبه تصحیحات به مشتق زمانی این کمیت را در زمان‌های اندکی جلوتر نشان می‌دهد. همان طور که از عبارت بالا مشخص است نقض حد لوید در زمان‌های میانی مستلزم مثبت بودن عبارت داخل پرانتز است که در این صورت رسیدن به حالت اشباع همواره با مقداری بیشتر حد لوید رخ خواهد داد. از آنجایی که جمله اول عبارت داخل پرانتز با زمان وابستگی خطی دارد، لذا در حد  $t \rightarrow \infty$  بدون توجه به مقدار پارامتر  $\tilde{L}$  همواره این عبارت مثبت خواهد بود. بدین ترتیب مشاهده می‌شود که نقض حد لوید در هندسه مورد نظر همواره رخ خواهد داد. البته همان گونه که پیشتر بیان شد برای رسم نمودارها، صرفاً جهت سادگی مقدار  $\tilde{L} = \frac{1}{d-1}$  در نظر گرفته شده است.

مطالعات پیرامون پیچیدگی هولوگرافی را می‌توان با استفاده از نسخه مبتنی بر حجم نیز انجام داد. در این حالت دوگان گرانشی متناظر با این کمیت، حجم ناحیه‌ای از فضا خواهد بود. یکی از مسیرهای مطالعاتی آتی برای تحقیق پیش‌رو بررسی اثرات پارامتر اتلاف بر روی نتایج حاصله از نسخه مبتنی بر حجم پیچیدگی است. از طرفی همان گونه که در [۲۰] نشان داده شده است ارتباط تنگاتنگی بین متریک‌های دوگان به نظریات میدان دارای اتلاف و متریک‌های منتج از برخی نظریات گرانشی جرم‌دار وجود دارد. محاسبه پیچیدگی هولوگرافی در چارچوب گرانش‌های جرم‌دار از دیدگاه‌های متفاوتی انجام شده است (به عنوان نمونه [۲۲]). با این وجود ارتباط ذکر شده تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است؛ که خود می‌تواند یکی دیگر از جنبه‌های مطالعاتی آینده باشد.

$$t_c = 2 \left( r_\infty^* - r^*(0) \right).$$

در شکل ۳ زمان بحرانی را بر حسب تابعی از پارامتر اتلاف و شعاع افق در چهار بعد رسم کرده‌ایم. در این شکل با استفاده از دمای سیاهچاله کمیت بی‌بعد  $Tt_c$  را به عنوان محور افقی در نظر گرفته‌ایم. همان گونه که در این شکل مشخص است با افزایش پارامتر اتلاف، زمان بحرانی کاهش می‌یابد به گونه‌ای که میزان این کاهش در سیاهچاله‌های با افق کوچک‌تر، بیشتر است. همچنین در نقطه  $\eta = 0$ ، زمان بحرانی از شعاع افق مستقل خواهد شد. این رفتار به صورت کیفی در ابعاد دیگر نیز مشاهده می‌شود.

نکته دیگری که یادآوری آن ضروری به نظر می‌رسد نقش طول مشخصه  $\tilde{L}$  در تحول زمانی پیچیدگی است. همان طور که پیشتر بیان کردیم این پارامتر بر رفتار زمان‌های طولانی پیچیدگی بی‌تأثیر است که این واقعیت از رابطه (۱۳) به سادگی مشخص نیست. برای بررسی بیشتر این نقش، در این قسمت سعی خواهیم کرد تا رفتار تحول زمانی پیچیدگی را در حد  $t \rightarrow \infty$  بررسی کنیم. محاسبات مشابهی در ارتباط با بررسی نقش مقیاس  $\tilde{L}$  برای یک متریک سه‌بعدی BTZ در [۲۱] انجام شده است. همچنین بررسی‌های معادلی برای ابعاد بالاتر در همین مرجع نیز صورت پذیرفته است. شرط اساسی برای در نظر گرفتن زمان‌های انتهایی نزدیک شدن نقطه تلاقی خطوط نورگونه ناحیه چپ و راست به افق، اعمال حد  $r_m \rightarrow r_h$  است. در این حد تابع  $f(r)$  به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$f(r_m) = f(r_h) + (r_m - r_h) f'(r_h) + \dots$$

با استفاده از این عبارت، جواب معادله  $\frac{dr_m}{dt} = -\frac{f(r_m)}{2}$  در زمان‌های انتهایی به صورت زیر درخواهد آمد:

$$r_m(t \rightarrow \infty) = r_h \left( 1 - c_e e^{-2\pi T t} \right) + \dots, \quad (14)$$

که در آن  $c_e$  ثابتی مثبت بوده و از رابطه (۷) برای تعریف دما استفاده کرده‌ایم. قید  $c_e > 0$  برای حالتی که پارامتر اتلاف در متریک (۶) خاموش است در [۲۱] اثبات شده و یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که روشن کردن این پارامتر، قید مورد نظر را حفظ خواهد کرد. اکنون با قرار دادن (۱۴) در (۱۳) رفتار

## مراجع

12. M Alishahiha, *Phys. Rev. D* **92**, 12 (2015) 126009.
13. M Alishahiha, A Faraji Astaneh, *Phys. Rev. D* **96**, 8 (2017) 086004
14. M Alishahiha, K Babaei Velni, M R Mohammadi Mozaffar, *Phys. Rev. D* **99** 12 (2019) 126016.
15. G W Gibbons and S W Hawking, *Phys. Rev. D* **15** (1977) *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2752.
16. K Parattu, S Chakraborty, B R Majhi and T Padmanabhan, *Gen. Rel. Grav.* **48**, 7 (2016) 94.
17. L Lehner, R C Myers, E Poisson and R D Sorkin, *Phys. Rev. D* **94**, 8 (2016) 084046.
18. G Hayward, *Phys. Rev. D* **47** (1993) 3275, *Phys. Rev. D* **47**. 3275.
19. T Andrade and B Withers, *Journal of High Energy Physics* **1405** (2014)101.
20. D Carmi, S Chapman, H Marrochio, R C Myers and S Sugishita, *Journal of High Energy Physics* 1711 (2017) 188.
21. W Pan and Y Huang, *Phys. Rev. D* **95**, 12 (2017) 126013.
22. M Alishahiha, A Faraji Astane, A Nase, M H Vahidinia, *Journal of High Energy Physics* **1705** (2017) 009.
1. J M Maldacena, *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113.  
۲. کاظم بی تقصیر فدافن، سحر مجرد لمن جویی، مجله پژوهش فیزیک ایران، ۱۸، ۲ (۱۳۹۷) ۱۹۰.
2. K Bitaghsir Fadafan and S Mojarad Laman jouee, *Iranian J. Phys. Res.* **18**, 2 (2018) 190.
۳. هـ ابراهیم و م ع اکبری، مجله پژوهش فیزیک ایران ۱۸، ۳ (۱۳۹۷) ۴۵۱.
3. Ebrahim H, Ali-Akbari M. *IJPR.* **18**, 3 (2018) 451.
4. S Ryu and T Takayanagi, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 181602.
5. L Susskind, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 6377.
6. T Faulkner, M Guica, T Hartman, R C Myers and M Van Raamsdonk, *Journal of High Energy Physics* **1403** (2014) 051.
7. L Susskind, *Fortsch. Phys.* **64** (2016) 49.
8. R Jefferson and R C Myers, *Journal of High Energy Physics* **1710** (2017) 107.
9. S Chapman, M P Heller, H Marrochio and F Pastawski, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 12 (2018) 121602.
10. L Susskind, *Fortsch. Phys.* **64** (2016) 24.
11. A R Brown, D A Roberts, L Susskind, B Swingle and Y Zhao, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 19 (2016) 191301.