

بررسی عدم تقارن دوقطبی تابش زمینه کیهانی با واریانس حلقه‌ای

مسعود ولی پور و مرضیه فرهنگ

دانشکده فیزیک، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

پست الکترونیکی: m_farhang@sbu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۱/۲۲؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۸/۰۶/۲۶)

چکیده

یکی از مهم‌ترین ناهنجاری‌های رصد شده در تابش زمینه کیهانی عدم تقارن دوقطبی است. وجود دوقطبی، اگر منشایی در کیهان اولیه داشته باشد، خلاف اصل همسانگردی آماری افت و خیزهاست. در این کار ما به معرفی روشی جدید برای یافتن جهت این دوقطبی احتمالی، اندازه‌گیری دامنه و بررسی اهمیت آماری دامنه اندازه‌گیری شده می‌پردازیم. مبنای این روش مقایسه واریانس حلقه‌های متقارن بر سطح کره تابش زمینه و یافتن زاویه‌ای است که اختلاف این واریانس برای دو حلقه متناظر در دو نیم‌کره بیشینه باشد. با اعمال این روش بر نقشه‌های شبیه‌سازی شده متقارن، توزیع دامنه‌های دوقطبی را برای این نقشه‌ها به دست می‌آوریم که معیار اصلی ما برای محاسبه اهمیت آماری دامنه دوقطبی مشاهده شده در هر نقشه دیگری خواهد بود. مشخصاً با استفاده از این روش، اهمیت آماری دوقطبی مشاهده شده برای پلانک $1/6\sigma$ به دست می‌آید. شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهند که اگر چه دقت این روش در مقایسه با روش‌های دیگر نظیر عدم تقارن واریانس بیشتر نیست، حجم کم و سرعت بالای محاسبات با این که در فضای نقشه (و نه هارمونیک‌های کروی) انجام می‌شوند، نقطه قوت این روش هست که راه را برای قدم بعدی مبتنی بر همین روش ولی با در نظر گرفتن عرقچین به جای حلقه هموار می‌کند. این روش با افزایش تعداد خانه‌های مورد استفاده در محاسبه واریانس، با هزینه کم محاسباتی می‌تواند منجر به کاهش چشمگیر در خطای اندازه‌گیری دامنه دوقطبی شود.

واژه‌های کلیدی: میدان تصادفی تابش زمینه کیهانی، همسانگردی آماری، واریانس

۱. مقدمه

فرض‌ها هم به محک تجربه گذاشته شود. از این رو بررسی انحرافات هر چند جزئی از همسانگردی و همگنی آماری در داده‌ها از جمله افت و خیزهای تابش زمینه اهمیت ویژه‌ای دارد. از جنبه مشاهداتی نیز شواهدی بر احتمال وجود بعضی ناهنجاری‌ها در تابش زمینه وجود دارد. تاکنون ناهنجاری‌های متعددی مورد بررسی قرار گرفته است که از مهم‌ترین آنها می‌توان به ناهنجاری ناحیه سرد^۱، ناگوسی

مدل استاندارد کیهان‌شناسی بر پایه اصل کیهان‌شناختی یعنی فرض همگنی و همسانگردی بنا شده است. تاکنون تمام مشاهدات کیهان‌شناسی در مقیاس‌های بزرگ نیز مؤید این اصل بوده‌اند که از آن جمله همسانگردی آماری افت و خیزهای تابش زمینه کیهان است که توسط رصدگرهای مختلف مشاهده و گزارش شده است. اما همیشه لازم است صحت بنیادی‌ترین

۱. The cold spot

گروه‌های زیادی تلاش کردند تا از طریق روش‌های مختلف نظیر عدم تقارن واریانس [۱۱]، سوارسازی^۱ دوقطبی تابع درست‌نمایی [۱۲]، سوارسازی دوقطبی با روش تحلیل QML [۱۳] و بررسی هماهنگی‌های گروهی دو بعدی [۱۴] اهمیت آماری این اثر را بررسی کنند. در جدول ۱ نتایج روش سوارسازی دوقطبی را با استفاده از تابع درست‌نمایی بر روی داده‌های پلانک مشاهده می‌کنید [۱].

ناهنجاری عدم تقارن دوقطبی همانند باقی ناهنجاری‌ها بسیار حائز اهمیت است زیرا این ناهنجاری‌ها، اگر در اثر خطاهای نظام‌مند^۲ در تولید و تحلیل داده و یا اثرات بین‌راهی ایجاد نشده باشند، می‌توانند اشاره‌ای به فیزیک جدید در انرژی‌های بالا باشند [۱۵]. از آنجایی که این ناهنجاری‌ها هم در مشاهدات PLANCK و هم در WMAP مشاهده شده است، احتمال این که بر اثر خطاهای سیستماتیک به وجود آمده باشند ناچیز می‌شود. بنابراین به نظر می‌آید باید به دنبال مدل‌های فیزیکی برای این ناهنجاری‌ها باشیم. در میان مدل‌های فیزیکی پیشنهاد شده برای ایجاد ناهنجاری عدم تقارن دوقطبی می‌توان به مدل فضا-زمان‌های ناهمسانگرد [۱۶]، میدان‌های اسپین بالاتر از نردهای [۱۷] و ناهمسانگردی تورمی ناشی از دیواره‌های حوزه‌ها [۱۸] اشاره کرد.

در این مقاله ما به بررسی عدم تقارن دوقطبی در افت و خیزهای تابش زمینه کیهانی می‌پردازیم. در بخش ۲ رهیافت و چارچوب ریاضی پیشنهادی خود را برای اندازه‌گیری دامنه و راستای دوقطبی در افت و اخیزهای تابش زمینه معرفی می‌کنیم. مبنای کاری ما روشی الهام گرفته از عدم تقارن واریانس است [۱۱] که وجود دوقطبی را با اهمیت ۳/۵۵ اندازه می‌گیرد. سپس این چارچوب را در بخش ۳ بر نقشه‌های شبیه‌سازی شده تابش زمینه کیهانی با دامنه و راستای دوقطبی مفروض اعمال می‌کنیم و اهمیت آماری نتایج را بررسی می‌کنیم. در بخش آخر نیز به جمع بندی و بحث درباره نتیجه‌ها می‌پردازیم.

جدول ۱. برگرفته از [۱]. نتایج سوارسازی دوقطبی برای داده‌های پلانک ۲۰۱۵ برای الگوریتم‌های مختلف تمیز کردن و آماده‌سازی داده. در اینجا α دامنه و (l, b) راستای سوارسازی دوقطبی را نشان می‌دهند.

Method	۲۰۱۵
Dipole modulation amplitude, α	
Commander	0.066 ± 0.021
NILC	0.061 ± 0.022
SEVEM	0.065 ± 0.021
SMICA	0.066 ± 0.021
Dipole modulation direction, (l, b) [°]	
Commander	$(230, -16) \pm 24$
NILC	$(228, -19) \pm 29$
SEVEM	$(226, -17) \pm 25$
SMICA	$(225, -18) \pm 24$

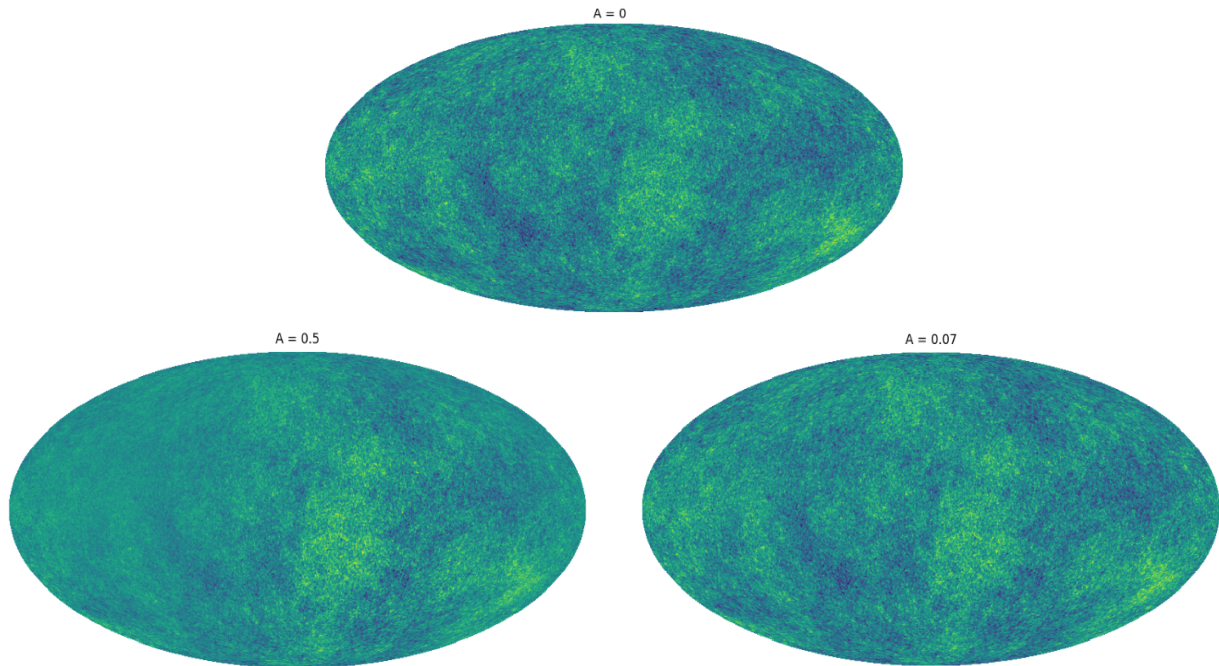
بودن و عدم تقارن دوقطبی اشاره کرد. [۱ و ۲].

ناحیه سرد که توسط رصدگرهای مختلف تابش زمینه‌ای کیهان دیده شده، ناحیه‌ای به مرکز $(l, b) = (210^\circ, -57^\circ)$ و به شعاع تقریبی ۵ درجه است که به طور نامعمولی از پس‌زمینه تابش زمینه کیهان سردتر است [۲ و ۳]. این ناحیه ویژگی‌های آماری‌اش با روش‌های متعدد مورد بررسی قرار گرفته است. درباره منشأ این ناهنجاری نظرات متعددی وجود دارد نظیر اثرات بین راهی یا منشایی در کیهان اولیه، اما این که این اثر ناشی از خطای ابزار باشد به نظر محتمل نمی‌رسد [۲-۸]. ناهنجاری ناگوسی بودن اختلالات نیز بسیار حائز اهمیت است؛ زیرا اگر چه تاکنون تأیید نشده است، می‌تواند قیدهای مهمی بر روی نظریه‌های کیهان اولیه قرار دهد. ناگوسی بودن منابع احتمالی گوناگونی دارد. مهم‌ترین منبع ناگوسی بودن برای کیهان‌شناسان، ناگوسی بودن اولیه است که در زمان ایجاد افت و خیزهای اولیه به وجود می‌آید [۹].

از زمانی که برای اولین بار ناهنجاری‌های جهت مرجح و دوقطبی در تابش زمینه کیهانی مطرح شد [۱۰]، افراد و

۱. Modulation

۲. Systematic errors



شکل ۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نقشه شبیه‌سازی شده تابش زمینه کیهانی با $N_{side} = 1024$ با اعمال دوقطبی در سه حالت $A = 0$ (متقارن)، $A = 0.07$ (دامنه مشاهده شده توسط پلانک) و $A = 0.5$.

دید شده توسط پلانک یعنی $(l, b) = (224^\circ, -22^\circ)$ است [۱]. این نقشه‌ها با $N_{side} = 1024$ و با استفاده از نرم‌افزار هیل‌پیکس (HEALPix) شبیه‌سازی شده‌اند.

برای مشاهده چگونگی تأثیر دوقطبی بر روی واریانس، کافی است رابطه (۱) را به توان دو برسانیم. لذا داریم:

$$\delta_{mod}^2(\hat{n}) \approx (1 + 2A\hat{n} \cdot \hat{p}) \delta_{iso}^2(\hat{n}). \quad (2)$$

که در آن از جمله $(A\hat{n} \cdot \hat{p})^2$ صرف‌نظر کرده‌ایم؛ زیرا انتظار می‌رود A (در صورت غیر صفر بودن) عددی کوچک باشد ($A \approx 0.07$) [۱۵].

در این کار به دنبال آن هستیم که با میانگین‌گیری بر خانه‌های حلقه‌های هم‌محور، راستا و دامنه دوقطبی را پیدا کنیم. با دقت در رابطه (۲) ملاحظه می‌کنیم بر خلاف رابطه (۱) مقدار میانگین مخالف صفر است. لذا با میانگین‌گیری از طرفین سهم جمله نامتقارن از بین نمی‌رود. این دلیل ما برای ترجیح دادن فضای مجذور دما به فضای افت و خیزهای دما است. اگر محور انتخابی ما برای حلقه‌ها همان راستای دوقطبی باشد، $\hat{n} \cdot \hat{p}$ برای تمام خانه‌های یک حلقه یکسان و برابر با $\cos \theta_{ring}$

۲. چارچوب پیشنهادی

۲.۱. واریانس حلقه‌های نقشه دمای تابش زمینه کیهانی

اولین بار مدل ریاضی ساده زیر برای توصیف ناهمسانگردی دوقطبی در تابش زمینه کیهانی ارائه شد [۱۲]:

$$\delta_{mod}(\hat{n}) = (1 + A\hat{n} \cdot \hat{p}) \delta_{iso}(\hat{n}); \quad (1)$$

در این رابطه $\delta = \frac{\delta T}{T_0}$ افت و خیزهای دمای تابش زمینه کیهانی (بر واحد T_0 یعنی دمای میانگین)، A دامنه دوقطبی، \hat{p} جهت دوقطبی و \hat{n} بیانگر راستای خانه مورد نظر است. همچنین δ_{mod} افت و خیز مدوله شده تحت اثر دوقطبی یعنی همان افت و خیز دمایی است که مشاهده می‌کنیم و δ_{iso} افت و خیز دمایی با فرض متقارن بودن آماری افت و خیزهاست. فرض می‌کنیم این مدل توصیف ریاضی قابل قبولی برای مشاهدات باشد و در شبیه‌سازی‌ها آن را اساس کار خود قرار می‌دهیم. شبیه‌سازی‌های شکل ۱، نقشه دمای تابش زمینه کیهانی را در حالتی که دوقطبی وجود ندارد (بالا) با نقشه‌هایی شامل دوقطبی اعمال شده (پایین) با دو دامنه متفاوت ($A = 0.07$ و $A = 0.5$) مقایسه می‌کند. جهت دوقطبی اعمال شده در راستای دوقطبی

۱. <https://healpix.jpl.nasa.gov/>

خواهد بود که θ_{ring} راستایی است که محور دوقطبی با راستای خانه‌های حلقه می‌سازد، یعنی داریم:

$$\langle \delta_{iso}^z \rangle_{ring}^N \approx \langle \delta_{iso}^z \rangle_{ring}^S \quad (3)$$

در اینجا $\dots ring \dots$ بیانگر میان‌گیری بر روی خانه‌های یک حلقه است. در غیر این صورت، خانه‌های مختلف یک حلقه سهم‌های مختلفی در میانگین‌گیری خواهند داشت و رابطه (۴) برای آنها صادق نخواهد بود. مثلاً اگر راستای انتخابی برای محور حلقه‌ها عمود بر \hat{p} باشد خانه‌های مختلف سهم یکدیگر را (در حد آماری) از بین خواهند برد و کمترین سهم را در واریانس حلقه خواهند داشت. بررسی مقدار واریانس این حلقه‌ها و رفتار آنها به ازای تغییر راستای محور حلقه، محور اصلی کار ما را تشکیل خواهد داد.

۲.۲. اختلاف نیم کره‌ای واریانس حلقه‌ای نقشه دمای

تابش زمینه کیهانی

فرض می‌کنیم یک دوقطبی با دامنه $A = 0.07$ و جهت مرجح \hat{p} مطابق با رابطه (۱) بر روی شبیه‌سازی‌ها اعمال شده و سپس افت و خیز دمای هر نقطه به توان دو رسیده است. سپس \hat{p} را با یک دوران مناسب بر روی محور \hat{k} می‌اندازیم و تعداد مشخصی حلقه حول این محور می‌سازیم و مقدار میانگین هر حلقه را تعیین می‌کنیم. حال مقدار به دست آمده را برای حلقه‌ای که در نیم کره "شمالی" قرار دارد از حلقه متناظر در نیم کره "جنوبی" کم می‌کنیم:

$$B_r \equiv \langle \delta_{mod}^z \rangle_{ring}^N - \langle \delta_{mod}^z \rangle_{ring}^S \quad (4)$$

در این رابطه N و S مربوط به شمال و جنوب‌اند. چون راستای محور تقارن حلقه‌ها را با چرخش بر \hat{k} منطبق کرده‌ایم، اطلاق کلمات "شمالی" و "جنوبی" مناسب و توجیه پذیر است. منظور از حلقه‌های متناظر نیز همین زوج حلقه‌های شمالی-جنوبی با $|\cos \theta|$ یکسان هستند. با توجه به این که $\cos \theta_{ring.N} = -\cos \theta_{ring.S}$ ، در حالتی که راستای محور تقارن حلقه‌ها منطبق بر راستای دوقطبی (در اینجا یعنی \hat{k}) باشد، سهم $\langle \delta_{iso}^z \rangle$ در حد آماری، یعنی وقتی که

$$B_r \equiv 4A \cos \theta_{ring} \langle \delta_{iso}^z \rangle_{ring} \quad (5)$$

اکنون تمام این B_r ها را که به‌ازای حلقه‌های مختلف حساب شده‌اند با یکدیگر جمع کرده و در متغیری به نام Δ ذخیره می‌کنیم:

$$\Delta = \sum_{r=1}^{N_r} B_r \quad (6)$$

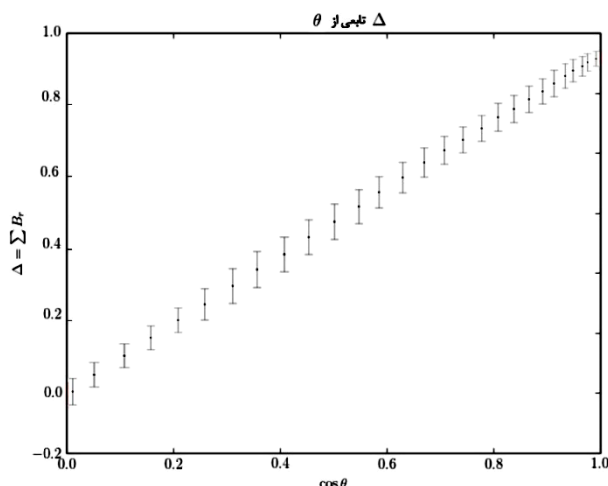
در این کار تعداد حلقه‌ها $N_r = 7$ است. کمیت Δ را به ازای راستاهای مختلف برای محور حلقه‌ها محاسبه می‌کنیم. البته از آن جایی که روش ما نسبت به دو نیم کره تقارن دارد، کافی است تنها جهت‌های نیم کره شمالی را در نظر بگیریم. با مقایسه این Δ ها با یکدیگر و یافتن بیشترین مقدار آن یعنی Δ_{max} ، در واقع جهت مرجح را یافته‌ایم. برای محاسبه دامنه آن نیز از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$A = \frac{\Delta_{max}}{4\sigma^2 \sum_r \cos \theta_r} \quad (7)$$

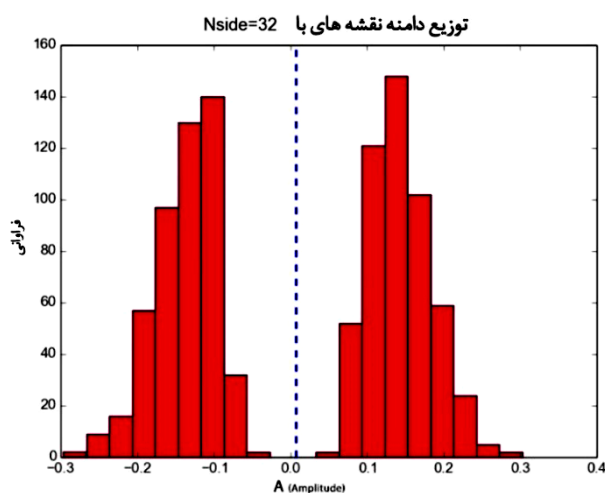
که $\sigma^2 = \langle \delta_{iso}^z \rangle$ واریانس افت و خیزهای دمایی در نقشه همسانگرد است.

۳. شبیه‌سازی‌ها و نتایج

با روش فوق می‌توانیم جهت مرجح دوقطبی مشاهده شده و دامنه آن را به دست آوریم. در ابتدا نقشه‌ها را با نرم‌افزار هیل‌پیکس و برای مقادیر پارامترهای کیهانی اندازه‌گیری شده با داده‌های ماهواره پلانک شبیه‌سازی می‌کنیم. این نقشه‌ها متقارن هستند و برای اعمال عدم تقارن، مطابق رابطه (۱) جمله نامتقارن را به آنها اضافه می‌کنیم. دامنه عدم تقارن اعمال شده را نزدیک به مقدار مشاهده شده در داده‌ها یعنی $A \approx 0.07$ در نظر می‌گیریم. سپس با برنامه‌ای به زبان فرترن محاسبات لازم را مطابق آنچه در بخش قبل بیان شد انجام می‌دهیم. در این مرحله چون هدف آزمون درستی برنامه و روش پیشنهادی آماری بود، ابتدا بر روی هر نقشه دوقطبی اعمال شده و سپس میانگین نقشه‌ها گرفته شده است تا نقش افت و خیزهای آماری کمتر شود. شکل ۲ نتیجه



شکل ۲. رفتار Δ به عنوان تابعی از $\cos \theta$ که در آن Δ به ۱ بهنجار شده و θ زاویه‌ای است که راستای محور حلقه‌ها با \hat{k} می‌سازد. نتایج برای ۱۰۰۰ نقشه شبیه‌سازی شده است و خطاها بیانگر افت و خیز اندازه‌گیری‌هاست. قابل توجه است که در اینجا، همان طور که انتظار می‌رود، بیشترین مقدار Δ که در واقع معرف بهترین جهت است در نزدیکی $\cos \theta = 1$ اتفاق افتاده است.

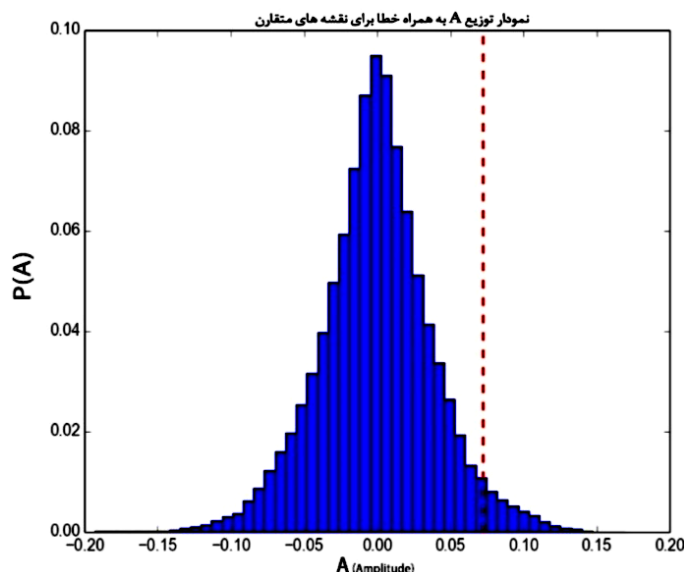


شکل ۳. (رنگی در در نسخه الکترونیکی) توزیع دامنه‌های به دست آمده از رهیافت اختلاف نیم کره‌ای میانگین حلقه‌ای نقشه واریانس برای ۱۰۰۰ نقشه متقارن.

برای ۱۰۰۰ نقشه متقارن شبیه‌سازی شده نشان می‌دهد. این نقشه‌ها از همه جهت مانند شبیه‌سازی‌های اصلی هستند و تنها تفاوت‌شان در نبودن ناهمسانگردی است. باید دقت کرد که در این روش هیچ گاه مقدار A صفر به دست نمی‌آید، هر چند نقشه‌های ما واقعا از لحاظ آماری متقارن باشند. علت آن هم وجود افت و خیزهای تصادفی در نقشه‌های ما است و این افت و خیزها به صورت تصادفی جهت مرجحی را برای دوقطبی با دامنه‌ای تصادفی و غیرصفر (هر چند کوچک) انتخاب خواهد کرد. نکته‌ای که وجود دارد این است که همان قدر که جهت

این شبیه‌سازی‌ها را نشان می‌دهد. کمیت Δ در محور عمودی بهنجار شده به ۱ است و زاویه θ در محور افقی زاویه‌ای است که راستای دوقطبی (در اینجا \hat{k}) با محور حلقه‌ها می‌سازد. همان طور که ملاحظه می‌کنید Δ تغییرات نرمی با زاویه دارد و مقدار آن برای $\cos \theta = 1$ بیشینه می‌شود.

در قدم بعد لازم است اهمیت دامنه دوقطبی مشاهده شده را به صورت کمی بیان کنیم. برای این منظور برای نقشه‌های شبیه‌سازی شده متقارن مقدار مشاهده شده A را از رابطه (۷) به دست می‌آوریم و توزیع A را رسم می‌کنیم. شکل ۳ این توزیع را



شکل ۴. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تابع چگالی احتمال از روی شبیه سازی ۱۰۰۰ نقشه متقارن که A برای آنها به عنوان یک بازه تعریف شده است. خط چین نیز نمایشگر $A = 0.07$ است. با مقایسه A به دست آمده برای یک نقشه و این تابع احتمال می توانیم اهمیت آماری مقدار دامنه اندازه گیری شده را به دست آوریم.

آمارش $1/6\sigma$ به دست می آید.

۴. جمع بندی

در این مقاله ابتدا مروری کوتاه بر ناهنجاری های تابش زمينه کیهانی به خصوص ناهنجاری عدم تقارن دوقطبی داشتیم. سپس روشی جدید برای دستیابی به این ناهنجاری پیشنهاد و ساختار ریاضی آن را بررسی کردیم. مبنای این روش بر ساختار ریاضی دوقطبی استوار است که بر اساس آن تمام خانه هایی که در یک حلقه حول محور دوقطبی قرار گرفته باشند سهم یکسانی از ناهمسانگردی (متناسب با $\cos\theta$) خواهند داشت. با حذف اثر سهم افق و خیزهای همسانگرد (به صورت آماری) از طریق محاسبه اختلاف نیم کره های حلقه های متناظر، امکان مشاهده دامنه این دوقطبی را افزایش دادیم. سپس این روش را بر داده های شبیه سازی شده اعمال کرده و اهمیت آماری آن را بررسی کردیم. این روش مقدار ناهنجاری اعمال شده با دامنه $A = 0.07$ را با دقت $1/6\sigma$ به دست می آورد. هر چند در این روش مقدار اهمیت آماری در مقایسه با بعضی روش های دیگر پیشنهاد شده در سایر پژوهش ها قابل توجه نیست، اما سرعت

تصادفی مرجح احتمال دارد در راستای \hat{p} باشد، ممکن است در راستای $-\hat{p}$ باشد. به عبارت دیگر، همان قدر که دامنه A محتمل است، دامنه $-A$ هم محتمل است. بنابراین همان طور که در شکل ۳ پیداست نمودار فراوانی حول $A = 0$ متقارن خواهد بود.

برای حل این مسئله به این نکته توجه می کنیم که در مقدار به دست آمده برای A، برای هر نقشه عدم قطعیتی وجود دارد که از عدم قطعیت در اندازه گیری Δ به A منتقل شده و ناشی

از واریانس در کمیت B_r است، یعنی $\sigma_A = \frac{\sigma_{\Delta}}{4\sigma^2 \sum_r \cos\theta_r}$

اگر در رسم نمودارهای فراوانی به جای مقدار دقیقی برای A، بازه ای برای A در نظر بگیریم که با σ_A مشخص می شود، نتایج با $A = 0$ سازگار خواهند بود. شکل ۴ نمودار فراوانی دامنه های اندازه گیری شده را با اعمال این قدم برای ۱۰۰۰ نقشه شبیه سازی شده متقارن نشان می دهد؛ که در واقع به هر نقشه بازه ای از A نسبت داده شده و نه یک عدد. اکنون با داشتن توزیع دامنه های نقشه های متقارن، می توان اهمیت آماری دامنه دوقطبی اندازه گیری شده را برای هر نقشه مطابق رابطه (۷) محاسبه کرد. در شکل، خط چین قرمز نشان دهنده دامنه مشاهده شده در نقشه های پلانک یعنی $A = 0.07$ است که اهمیت

خانه‌ها، خطای آماری محاسبه واریانس را کمتر می‌کند و انتظار می‌رود دقت اندازه‌گیری را به صورت چشمگیری بیشتر کند. با افزایش دقت، قدم بعد اعمال این روش بر داده‌های پلانک خواهد بود.

محاسبات، با این که در فضای خانه و نه فضای هارمونیک انجام می‌شود، بسیار بالاتر از روش‌های مشابه است. در بررسی‌های آینده می‌توان به جای استفاده از حلقه‌های متقارن از عرق چین‌های متقارن استفاده کرد که با افزایش تعداد

مراجع

1. Planck Collaboration P. Ade, *et al.*, A & A **594** (2016) A16.
2. D Schwarz, C Copi, D Huterer and G Starkman, *Class. Quant. Grav.* **33** (2016) 184001.
3. P Vielva, E Martínez-González, R B Barreiro, J L Sanz, and L Cayón, *ApJ.* **609** (2004) 22.
4. M Cruz, M Tucci, E Martínez-González, and P Vielva, *MNRAS.* **369** (2006) 57.
5. M Cruz, N Turok, P Vielva, E Martínez-González, and M A Hobson, *Science* **318** (2007) 1612.
6. L Rudnick, S Brown, and L RWilliams, *ApJ.* **671** (2007) 40.
7. J D McEwen, S M Feeney, M C Johnson, and H V Peiris, *Phys. Rev. D* **85** (2012) 103502.
8. J C Bueno Sanchez, *Phys. Lett. B* **739** (2014) 269.
9. D Baumann, TASI Lectures on Inflation, arXiv : 0907.5424
10. H K Eriksen, F K Hansen, A J Banday, K M Górski, and P B Lilje, *ApJ.* **605** (2004a) 14.
11. Y Akrami, Y Fantaye, A Shafieloo, *et al.*, *ApJ.* **784** (2014) L42.
12. C Gordon, *ApJ.* **656** (2007) 636.
13. A Moss, D Scott, J P Zibin, and R Battye, *Phys. Rev. D* **84** (2011) 023014.
14. A Hajian and T Souradeep, *ApJ.* **597** (2003) L.
15. A Pontzen, and H V Peiris, *Phys. Rev. D* **81** (2010) 103008.
16. N Bartolo, S Matarrese, M Peloso and A Ricciardone, *JCAP.* **1308** (2013) 022.
17. N Bartolo, S Matarrese, M Peloso and A Ricciardone, *Phys. Rev. D* **87** (2013) 023504.
18. S Jazayeri, Y Akrami, H Firouzjahi, A R Solomon and Y Wang, *JCAP.* **1411** (2014) 044.