

اندازه‌گیری همدوسی فضایی با استفاده از تبدیل فوریه شدت فریزهای پراش از پله یک بعدی در بازتاب

رسول عالی‌پور^۱ و محمدتقی توسلی^۲

۱. گروه فیزیک، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز

۲. دانشکده فیزیک، دانشگاه تهران، تهران

پست الکترونیکی: aalipour@azaruniv.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۱/۱۷؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۰۴/۱۷)

چکیده

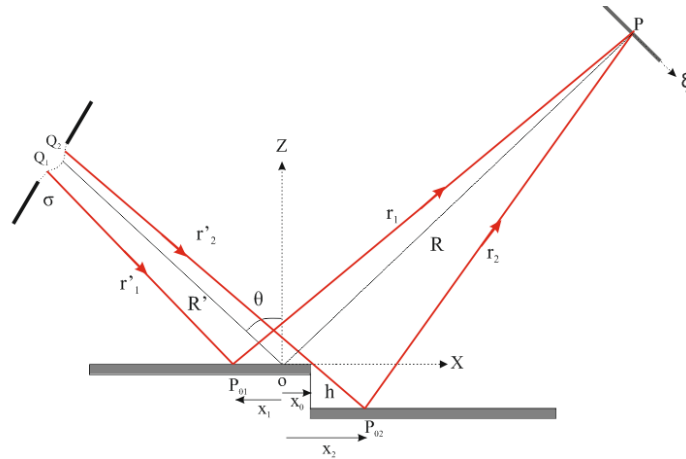
در این مقاله روشی جدید برای اندازه‌گیری همدوسی فضایی باریکه‌های نوری با استفاده از نقش پراش فرنل تشکیل شده از پله یک بعدی در بازتاب ارائه می‌شود. تابع همدوسی فضایی از نسبت دامنه تبدیل فوریه توزیع شدت پراش باریکه نور همدوس از پله تعیین می‌شود. نقاط قوت این روش امکان بررسی همزمان همبستگی تمام جفت نقاط در یک امتداد، استفاده از چیدمان تجربی بسیار ساده و ارزان و عدم نیاز به اندازه‌گیری در بیش از دو نقش پراش است. با استفاده از این روش همدوسی فضایی باریکه شل گوسی به صورت نظری و تجربی بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: همدوسی فضایی، پراش فرنل، پله فاری، تبدیلات فوریه

۱. مقدمه

تعداد زیادی از جفت نقاط تغییر داده شود. بدین منظور روش‌های جایگزینی بر پایه تغییرات روی تداخل‌سنج یانگ [۲]، آرایه‌ای از روزنه‌ها [۳]، و تداخل‌سنج‌های سنگک [۴] و [۵] پیشنهاد شده است. همچنین از رهیافت دیگری به نام پرتونگاری مقطعی فضای فاز بر پایه اندازه‌گیری نمایه شدت در یک محدوده‌ای از فواصل انتشار، استفاده می‌شود [۶] و [۷]. تمام این تکنیک‌ها یا نیاز به تعداد زیادی اندازه‌گیری یا چیدمان‌های اپتیکی پیچیده دارند.

اندازه‌گیری همدوسی فضایی باریکه‌های نوری از یک طرف برای مشخصه‌یابی چشمه‌های مورد استفاده در دستگاه‌های تصویرساز و از طرف دیگر برای تخمین ابعاد چشمه‌های دور همچون ستاره‌ها حائز اهمیت است. چندین روش تداخل‌سنجی و در رأس آنها دو روزنه‌ای یانگ برای اندازه‌گیری همدوسی فضایی پیشنهاد شده است [۱]. روش دو روزنه یانگ نیاز دارد که فاصله دو روزنه برای پوشاندن



شکل ۱. طرح هندسی پله فازی یک بعدی در بازتاب که توسط چشمه شبیه تکفام گسترده روشن شده است.

همبستگی بین میدان‌های مختلط $U_0(x_1)$ و $U_0(x_2)$ را بیان می‌کند.

توزیع شدت میدان در نقطه‌ای روی پرده به فاصله R از پله از رابطه زیر به دست می‌آید [۱۵]:

$$I(\xi) = \iint W_0(x_1, x_2) K(\xi - x_1) K^*(\xi - x_2) dx_1 dx_2 \quad (1)$$

که در این رابطه، k عدد موج مرکزی و $\frac{ikx^2}{2R}$ هسته انتگرال همپوشانی است. چگالی طیفی مقاطع روی پله را می‌توان بر حسب چگالی طیفی میدان‌های فرودی به پله به صورت زیر نوشت:

$$W_0(x_1, x_2) = \frac{A_0^2}{R} P(x_1) P^*(x_2) W_i(x_1, x_2), \quad (2)$$

که در این رابطه، W_i چگالی طیفی مقاطع میدان‌های فرودی به پله، A_0 و R' به ترتیب دامنه میدان فرودی به پله و فاصله چشمه تا پله و P تابع روزنه پله است که با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$P(x) = r_L H(x_0 - x) + r_R e^{i r k h \cos \theta} H(x - x_0), \quad (3)$$

در اینجا، r_L و r_R ضرایب بازتاب دامنه از طرف چپ و راست پله هستند، h و θ به ترتیب ارتفاع پله، زاویه نور فرودی به پله و مختصه لبه پله هستند و H تابع پله‌ای است.

با ایجاد تغییر متغیرهای $\bar{x} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ و $\Delta x = x_1 - x_2$ با فرض پایایی میدان فرودی، معادله (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

اخیراً روشی بر مبنای پراش از یک ماسک شفاف پیشنهاد شده است که در مقایسه با روش‌های مبتنی بر دو شکافی یانگ امکان مطالعه همزمان تمام جفت نقاط در یک راستا را فراهم می‌کند، با این وجود، مبنای نظری این روش مستلزم استفاده از روش‌های تقریبی است [۸]. در این مقاله، ما طرحی ساده بر مبنای اندازه‌گیری شدت در نقش پراش از یک پله یک بعدی در بازتاب وقتی پله به ترتیب توسط باریکه‌ای با همدوسی دلخواه و باریکه نور همدوس روشن می‌شود، پیشنهاد می‌کنیم. این روش امکان دسترسی به همدوسی تمام جفت نقاط در نزدیکی لبه پله را فراهم می‌کند. مطالعه نظری این روش بر مبنای تبدیل فوریه از شدت فریزهای پراش از پله است. انگیزه این روش از مطالعاتی که اخیراً روی پله فازی و کاربردهای آنها انجام یافته، گرفته شده است [۹-۱۴].

۲. پراش فرنل باریکه نور نسبی همدوس از پله یک بعدی در بازتاب

۱.۲. محاسبه توزیع شدت نور نسبی همدوس پراشیده از

پله در بازتاب با استفاده از روش تبدیل فوریه

یک چشمه نور شبه تکفام با گستردگی فضایی σ را در نظر بگیرید که مطابق شکل ۱ یک پله فازی یک بعدی در بازتاب را روشن می‌کند. ویژگی‌های همدوسی مرتبه دوم میدان‌های پایای همبسته در روی پله با استفاده از چگالی طیفی مقاطع $W_0(x_1, x_2) = U_0(x_1) U_0^*(x_2)$ توصیف می‌شود که

[۱۷]. در نهایت با علم بر این که تبدیل فوریه همپوشانی دو تابع برابر با حاصل ضرب تبدیل فوریه‌های دو تابع است، می‌توان با اعمال روش تبدیل فوریه روی طرفین معادله (۶)، شدت پراش نور نسبی همدوس از پله یک بعدی در بازتاب را به صورت زیر به دست آورد:

$$I = DFT^{(-1)} \{ DFT [B] \times DFT [I_{co}] \}, \quad (12)$$

در این معادله DFT^* نماد تبدیل فوریه گسسته است [۱۸].

۲.۲. باریکه شل گوسی

باریکه‌های شل گوسی به دلیل این که ویژگی‌های ضروری نور اغلب چشمه‌های واقعی را دارند، نقش مهم و فزاینده‌ای در نظریه همدوسی نوری ایفا می‌کنند. فرض کنید که پله فازی توسط باریکه شل گوسی یک بعدی روشن شود. یک چنین نوری با تابع چگالی طیفی متقاطع (تابع همدوسی) به صورت زیر مشخص می‌شود [۱۵]:

$$W_i(\Delta x, \nu) = I_i(\nu) e^{-\frac{\Delta x^2}{2\sigma_g^2}}, \quad (13)$$

در اینجا، $I_i(\nu)$ شدت نور فرودی درسامد ν به پله و σ_g طول مؤثر همدوسی باریکه نور فرودی، هستند.

با استفاده از معادلات (۶) تا (۱۳) و الگوریتم‌های تبدیل فوریه سریع برای اجرای تبدیل فوریه گسسته در نرم‌افزار متلب، توزیع شدت پراش از پله یک بعدی در بازتاب وقتی پله توسط باریکه شل گوسی یک بعدی روشن می‌شود، محاسبه کرد [۱۹]. منحنی‌های توزیع شدت پراش برای طول‌های مختلف همدوسی رسم و در شکل ۲ نشان داده شده است. چنانچه از روی منحنی‌ها مشخص است با کاهش طول همدوسی، نمایانی فریزهای پراش کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر بیشترین نمایانی متعلق به بیشترین طول همدوسی چشمه است.

۳.۲. بررسی تجربی باریکه شل گوسی در پراش از پله

یک بعدی در بازتاب

برای این که روابط نظری و نتایج عددی به دست آمده در بخش قبلی را به صورت تجربی مورد آزمون قرار دهیم،

$$I(\xi) = \frac{k}{r\pi R} \iint W_o(\Delta x) K(\xi - \bar{x} - \frac{1}{r}\Delta x) K^*(\xi - \bar{x} + \frac{1}{r}\Delta x) d\bar{x} d\Delta x, \quad (4)$$

حالا با استفاده از قضیه تعمیم یافته شل و با جایگذاری معادله (۲) در (۴) به رابطه انتگرالی زیر می‌رسیم [۱۶]:

$$I(\xi) = \frac{A_o^r}{\lambda R R'} \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta x) e^{-i r \pi \frac{\xi}{\lambda R} \Delta x} W_i(\Delta x) \int_{-\infty}^{\infty} [P(\bar{x} + \frac{\Delta x}{r}) K(\bar{x} + \frac{\Delta x}{r})] [P(\bar{x} - \frac{\Delta x}{r}) K(\bar{x} - \frac{\Delta x}{r})]^* d\bar{x} \quad (5)$$

چنانچه مشخص است عبارت داخل {...} انتگرال خود همبستگی تابع $P(\bar{x})K(\bar{x})$ است و خود معادله، تبدیل فوریه حاصل ضرب تابع $W_i(\Delta x)$ در انتگرال خود همبستگی است [۱۷]. از این رو حاصل این رابطه انتگرالی به صورت زیر قابل بیان است:

$$I(\xi) = B \left(\frac{\xi}{\lambda R} \right) \otimes I_{co}(\xi), \quad (6)$$

که در این معادله علامت \otimes انتگرال همپوشانی را نشان می‌دهد و

$$B \left(\frac{\xi}{\lambda R} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} W_i(\Delta x) e^{-i r \pi \frac{\xi}{\lambda R} \Delta x} d(\Delta x), \quad (7)$$

تبدیل فوریه $W_i(\Delta x)$ و

$$I_{co}(\xi) = \left| \frac{A_o}{\sqrt{\lambda R R'}} \int_{-\infty}^{\infty} P(\bar{x}) K(\xi - \bar{x}) d\bar{x} \right|^2, \quad (8)$$

توزیع شدت نور همدوس پراشیده از پله فازی است. با جاگذاری تابع روزنه برای پله از معادله (۳) در این معادله و با فرض این که $r_L = r_R = r$ باشد، رابطه توزیع شدت در معادله (۸) بعد از کمی محاسبه ساده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$I_{co}(\xi) = \left(\frac{r A_o}{\sqrt{R}} \right)^2 \{ a(\xi) + b(\xi) + r \sqrt{a(\xi)b(\xi)} \cos[\varphi + \phi_{ab}(\xi)] \}, \quad (9)$$

در این معادله $\varphi = r k h \cos \theta$ و

$$a = \left(\frac{1}{r} + C \right)^2 + \left(\frac{1}{r} + S \right)^2, \quad b = \left(\frac{1}{r} - C \right)^2 + \left(\frac{1}{r} - S \right)^2, \quad (10)$$

$$f_{ab} = \tan^{-1} \left(\frac{S - C}{\frac{1}{r} - C^2 - S^2} \right), \quad (11)$$

که در این معادلات S و C انتگرال‌های معروف فرنل هستند

دیفیوژری که توسط یک موتور DC می‌چرخد به چیدمان در همسایگی کانون شیئی اضافه می‌کنیم. همانند حالت همدوس، در این حالت نیز نقش پراش فرنل از پله وقتی توسط باریکه برای باریکه شل گوسی روشن می‌شود، ثبت می‌شود. نقش پراش باریکه شل گوسی از پله و نمایه توزیع شدت آن در شکل‌های ۴ ج و ۴ د نشان داده شده است.

نمایه‌های اندازه‌گیری شده روی نقش‌های پراش در شکل‌های ۴ ب و ۴ د، از میانگین‌گیری نقش‌های پراش در شکل‌های ۴ الف و ۴ ج در امتداد لبه پله به دست آمده‌اند. این کار باعث کاهش خطای آماری اندازه‌گیری شدت می‌شود. همچنین میانگین نمایه‌های شدت به مقدار واحد بهنجار شده‌اند.

۳. اندازه‌گیری همدوسی فضایی با استفاده از توزیع شدت نقش پراش از پله یک بعدی در

بازتاب

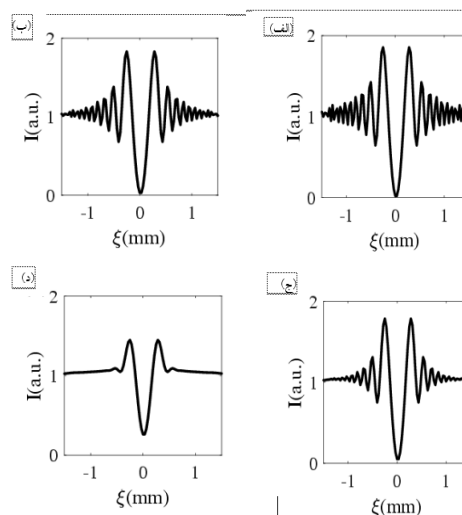
از روی نتایج به دست آمده در بخش ۱.۲، می‌توان معادله (۹) را به صورت زیر نوشت:

$$DFT(I) = DFT(B) \cdot DFT(I_{co}), \quad (14)$$

از طرفی طبق معادله (۷)، $B(\xi)$ تبدیل فوری تابع همدوسی $W_i(\Delta x)$ است، از این رو با جایگزین کردن $DFT(B)$ در معادله (۱۴) با $W_i(\Delta x)$ به رابطه زیر برای تابع همدوسی می‌رسیم:

$$W_i = \frac{DFT(I)}{DFT(I_{co})}, \quad (15)$$

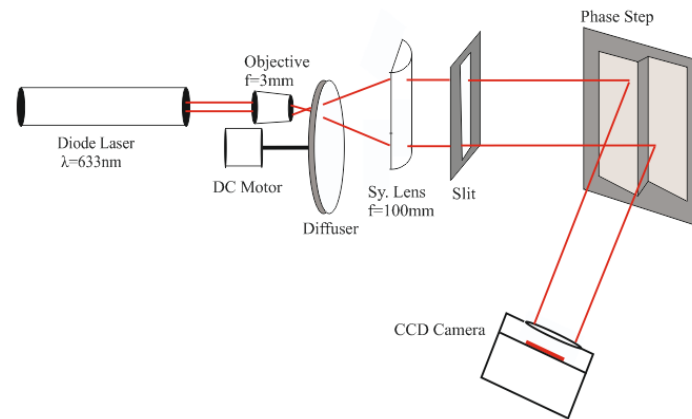
این معادله نشان می‌دهد که تابع همدوسی یک باریکه نور دلخواه از نسبت دامنه تبدیل فوریه توزیع شدت پراش باریکه نور نسبی همدوس از پله به دامنه تبدیل فوریه توزیع شدت پراش نور همدوس از پله قابل استخراج است. لذا می‌توان با استفاده از توزیع شدت‌های اندازه‌گیری شده روی نقش‌های پراش باریکه نور همدوس و نسبی همدوس از پله در شکل ۴، تابع همدوسی باریکه شل گوسی پیشنهاد شده در چیدمان شکل ۳ را اندازه‌گیری کرد. برای این کار با استفاده از روش تبدیل فوریه سریع از نمایه توزیع شدت‌ها



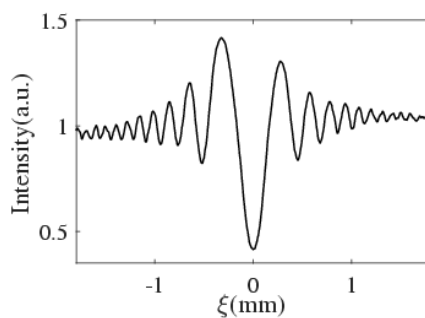
شکل ۲. منحنی‌های توزیع شدت پراش از پله یک بعدی در بازتاب به ارتفاع $\frac{\lambda}{4}$ ، وقتی پله توسط باریکه شل گوسی یک بعدی با طول همدوسی: (الف) $\sigma_g = 10 \text{ mm}$ ، (ب) $\sigma_g = 7 \text{ mm}$ ، (ج) $\sigma_g = 5 \text{ mm}$ و (د) $\sigma_g = 2 \text{ mm}$ تحت فرود عمود روشن شده است.

چیدمانی مطابق شکل ۳ ترتیب می‌دهیم. در این چیدمان نور گسیل شده از یک دیود لیزر با طول موج $\lambda = 670 \text{ nm}$ توسط یک عدسی شیئی با فاصله کانونی $f_{obj} = 3 \text{ mm}$ همگرا و در ادامه توسط عدسی استوانه‌ای به فاصله کانونی $f = 100 \text{ mm}$ موازی می‌شود. سپس باریکه نور حاصل، از میان یک شکاف خطی به پهنای $w = 1 \text{ mm}$ عبور داده می‌شود. باریکه نور تولید شده بدین ترتیب یک باریکه گوسی یک بعدی است که همدوسی فضایی آن توسط شکاف خطی فراهم می‌شود.

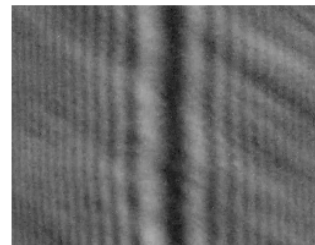
باریکه گوسی یک بعدی ایجاد شده، به پله یک بعدی با ارتفاع $h = 300 \text{ nm}$ که لبه آن در امتداد محور جبهه موج استوانه‌ای است، تحت زاویه $\theta = 3^\circ$ برخورد می‌کند. در نهایت نقش میدان پراشیده از پله توسط یک دوربین CCD (اچ‌دی، با اندازه پیکسل $3/7$ میکرومتر) ثبت می‌شود. نقش پراش حاصل از باریکه گوسی همدوس و نمایه توزیع شدت آن در شکل‌های ۴ الف و ۴ ب نشان داده شده است. در ادامه برای این که باریکه شل گوسی تولید کنیم که ویژگی‌های نور نسبی همدوس را داشته باشد، مطابق شکل ۳



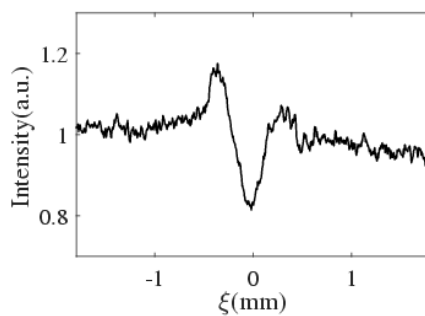
شکل ۳. چیدمان آزمایشی برای ثبت نقش پراش فرنل از پله یک بعدی در بازتاب، وقتی که پله توسط باریکه شل گوسی روشن می‌شود.



(ب)



(الف)



(د)



(ج)

شکل ۴. (الف) نقش پراش نور همدوس از پله یک بعدی در بازتاب به ارتفاع ۳۰۰ نانومتر، (ب) نمایه توزیع شدت روی آن، (ج) نقش پراش فرنل باریکه شل گوسی از پله و (د) نمایه توزیع شدت روی آن.

همدوس مدل شل گوسی به دست می‌آید. نقاط در شکل ۶ مقادیر حقیقی اندازه‌گیری شده از تابع همدوسی باریکه شل گوسی را برای جفت نقاط در یک امتداد روی پله را نشان می‌دهد. با برازش تابع چگالی طیفی متقاطع برای باریکه شل گوسی در معادله (۱۳) به مقادیر اندازه‌گیری شده برای تابع همدوسی، طول مؤثر همدوسی عرضی قابل حصول است.

که در شکل‌های ۴. ب و ۴. د نشان داده شده، تبدیل فوریه می‌گیریم. منحنی دامنه تبدیل فوریه‌ها در شکل ۵ نشان داده شده است.

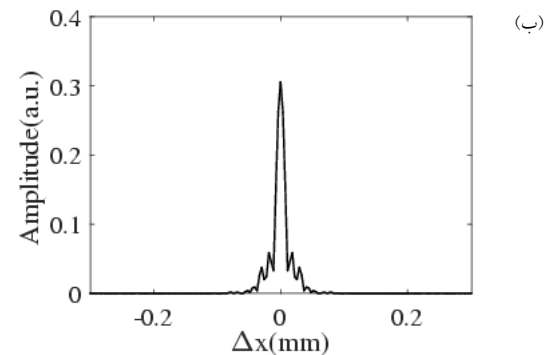
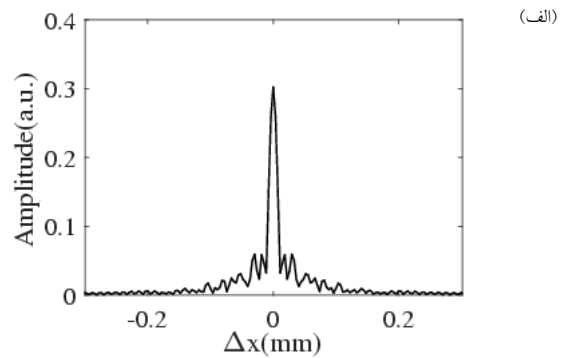
در این مرحله از نسبت دامنه تبدیل فوریه توزیع شدت پراش باریکه شل گوسی از پله به دامنه تبدیل فوریه توزیع شدت پراش نور همدوس از پله، تابع همدوسی باریکه نسبی

منحنی خط پیوسته در شکل ۶ تابع برازش شده به داده‌های تجربی است.

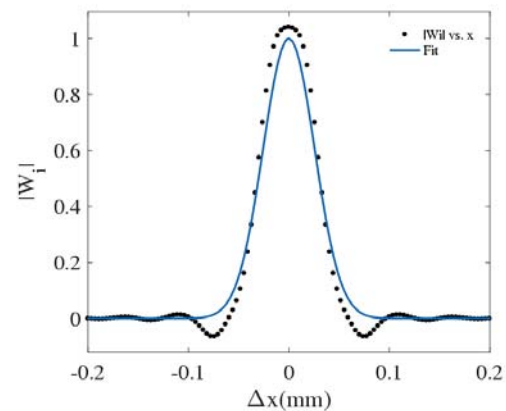
با مقایسه تابع برازش با معادله (۱۳)، طول مؤثر همدوسی عرضی باریکه پوسترهای گوسی از مرتبه دقت $\sigma_g = 0.03 \text{ mm}$ به دست می‌آید. باید ذکر کنیم که دقت برازش منحنی گوسی به داده‌های تجربی از مرتبه یک درصد خطا است.

۴. نتیجه گیری

در این مقاله، روشی جدید بر پایه پراش از پله یک بعدی در بازتاب برای اندازه‌گیری همدوسی فضایی باریکه‌های نوری به صورت عددی و تجربی ارائه شد. ما برای نمونه همدوسی فضایی یک باریکه شل گوسی را بررسی کردیم. تابع همدوسی فضایی از نسبت دامنه تبدیل فوریه توزیع شدت پراش باریکه نور نسبی همدوس از پله به دامنه تبدیل فوریه توزیع شدت پراش باریکه نور همدوس از پله به دست می‌آید. نتیجه این که اگر یک باریکه نور دلخواه داشته باشیم و بخواهیم همدوسی فضایی آن را اندازه بگیریم کافی است که یک بار به طور مستقیم نقش پراش باریکه نور از پله را ثبت و بار دیگر با قرار دادن یک شکاف خطی با پهنای مناسب در مقابل چشمه و فراهم کردن همدوسی فضایی کافی، نقش پراش از پله را برای نور همدوس ثبت کنیم. این روش دقت مناسبی برای اندازه‌گیری طول همدوسی فضایی دارد به طوری که برای باریکه شل گوسی، طول همدوسی با خطای یک درصد اندازه‌گیری شد. در مقایسه با روش‌های مبتنی بر دو روزنه یانگ که بایستی فاصله دو روزنه برای تمام نقاط در یک امتداد روی پله فازی و منحنی خط پیوسته، تابع گوسی برازش شده به مقادیر اندازه‌گیری شده را نشان می‌دهند.



شکل ۵. دامنه تبدیل فوریه توزیع شدت نقش پراش از پله یک بعدی در بازتاب به ارتفاع ۳۰۰ نانومتر برای چشمه نور (الف) همدوس و (ب) نسبی همدوس (باریکه شل گوسی).



شکل ۶. نقاط، مقادیر اندازه‌گیری شده از تابع همدوسی باریکه شل گوسی برای جفت نقاط در یک امتداد روی پله فازی و منحنی خط پیوسته، تابع گوسی برازش شده به مقادیر اندازه‌گیری شده را نشان می‌دهند.

مراجع

3. A I González and Y Mejía, *J. Opt. Soc. Am. A* **28** (2011) 1107.
4. C Iaconis and I A Walmsley, *Opt. Lett.* **21** (1996) 1783.

1. F Zernike, *Physica* **5** (1938) 785.
2. M Santarsiero and R Borghi, *Opt. Lett.* **31** (2006) 861.

13. R Aalipour, *Opt. Commun.* **382** (2017) 651.
۱۴. ع محمودی، مجله پژوهش فیزیک ایران، ۱۸، ۴ (۱۳۹۷) ۶۲۵.
14. A Mahmoodi, *Iran. J. Phys. Res.* **18**, 4 (2018) 625.
15. G Gbur and T D Visser, in: E. Wolf (Ed.), “*The structure of partially coherent fields*”, *Progress in Optics* **55** (2010) 285.
16. K A Nugent, *Opt. Commun.* **79** (1990) 267.
17. J W Goodman, “*Introduction to Fourier Optics*”, The McGraw-hill companies inc. New York (1968).
18. D Mas, J Garcia, C Ferreira, L M Bernardo, and F Marinho, *Opt. Commun.* **164** (1999) 233.
19. C V Loan, “*Computational Frameworks for the Fast Fourier Transform*”, SIAM Cornell University Ithaca New York, (1992).
5. D Mendlovic, G Shabtay, A W Lohmann, and N Konforti, *Opt. Lett.* **23** (1998) 1084.
6. K A Nugent, *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 2261.
7. J Tu and S Tamura, *J. Opt. Soc. Am. A* **15** (1998) 202.
8. S Cho, M A Alonso, and T G Brown, *Opt. Lett.* **37** (2012) 2724.
۹. م توسلی، ح سهل البیع، م صالحی و ح خالصی فرد، مجله پژوهش فیزیک ایران ۲، ۵ (۱۳۸۰) ۲۳۷.
9. M Tavasoli, H Sahal Albiea, M Salehi, and H Khalesifard, *Iran. J. Phys. Res.* **2**, 5 (2000) 237.
10. M Amiri and M T Tavassoly, *Opt. Commun.* **272** (2007) 349.
11. M T Tavassoly, M Amiri, A Darudi, R Aalipour, A Saber, and A R Moradi, *J. Opt. Soc. Am. A* **26** (2009) 540.
12. R Aalipour and M T Tavassoly, *Opt. Commun.* **294** (2013) 13.