



مطالعه سرعت ذرات اسپین دار در اطراف سیاه چاله های چرخان

جعفر خداقلی زاده^۱ و علی واحدی^۲

۱. گروه فیزیک، دانشگاه فرهنگیان، تهران

۲. دانشکده فیزیک، دانشگاه خوارزمی، تهران

پست الکترونیکی: j.gholizadeh@cfu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۳/۲۰؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۰۷/۲۲)

چکیده

سرعت چرخش ذرات در اطراف یک سیاه چاله چرخان در یک چارچوب موضعی غیر چرخشی رفتاری غیریکنواخت دارد که به اثر آشنباخ معروف است و به مقدار تکانه زاویه ای سیاه چاله ها وابسته است. با استفاده از ژئودزیک به دست آمده از معادله میدان ماتیسون-پاپاترو-دیکسون برای ذرات اسپین دار، حرکت این ذرات با تقریب خطی مورد مطالعه قرار گرفته و در مورد تأثیر انتخاب اسپین ذره در مشاهده این اثر صحبت خواهیم کرد.

واژه های کلیدی: ذرات اسپین دار، اثر آشنباخ و فیزیک سیاه چاله ها

۱. مقدمه

است. ماتیسون و سپس پیرانی [۳] با تعریف شرط کمکی $u^\alpha S_{\alpha\beta} = 0$ رابطه ای بین معادلات و پارامترهای نامشخص پیدا کردند. پاپاترو از شرط کمکی دیگری مانند $V^\alpha S_{\alpha\beta} = 0$ استفاده کرد که V^α یک میدان برداری شار زمانی است. در سال ۱۹۵۹ تولزرف با ساده سازی فرمول های چند قطبی ماتیسون، همان معادلات حرکت در مرتبه قطبی- دو قطبی را به دست آورد؛ ولی از شرط کمکی $P^\alpha S_{\alpha\beta} = 0$ استفاده کرد [۴] و [۵]. این شرط نشان داد که شرط ماتیسون- پیرانی یک شرط یکتایی نیست. بررسی و مطالعه شرایط کمکی اسپینی و ارتباط بین آنها در [۵ و ۶] قابل دسترس است. دیکسون در

حرکت اجسام در نسبیت عام اولین بار توسط مایرون ماتیسون در سال ۱۹۳۷ بیان شد. او از ممان های چند قطبی برای بسط تانسور انرژی- تکانه در اطراف یک جهانخط استفاده کرد [۱]. همچنین پاپاترو با استفاده از تعریف های متفاوت برای تکانه چند قطبی معادلات یکسانی را در سال ۱۹۵۱ به دست آورد [۲]. معادلات آنها منجر به ۱۰ معادله با ۱۳ پارامتر نامشخص شد. ۱۰ معادله شامل تحول زمانی چهار مولفه تکانه P^μ ، شش مولفه اسپینی $S^{\mu\nu}$ است، سیزده پارامتر نامشخص شامل تکانه، اسپین و سه درجه آزادی وابسته به سرعت ویژه ذرات u^α

دنبال پیدا کردن اثر آشنباخ برای ذراتی هستیم که اسپین غیر صفر دارند به طوری که اندازه اسپین آنها در مقایسه با اسپین سیاه‌چاله بسیار کوچک باشند و تأثیر متقابل مقدار اسپین ذره و تکانه زاویه‌ای سیاه‌چاله را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

۲. مطالعه اثر آشنباخ برای ذرات بدون اسپین

مؤلفه‌های متریک کر در مختصات بویِر-لیندکوئیست عبارتند

$$\text{از: } x^t = t \text{ و } x^r = \varphi, \quad x^\theta = \theta, \quad x^\phi = r \quad [۹]:$$

$$g_{tt} = -\frac{\Sigma}{\Delta}, \quad g_{rr} = -\Sigma, \quad g_{\theta\theta} = -\frac{A \sin^2 \theta}{\Sigma},$$

$$g_{r\phi} = \frac{rMr}{\Sigma} \sin^2 \theta, \quad g_{\phi\phi} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}, \quad (۳)$$

به طوری که $G=c=1$ است:

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2,$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta,$$

$$A = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta, \quad (۴)$$

که M جرم سیاه‌چاله و a اسپین آن است و $0 \leq a \leq M$. با انتخاب $a=0$ در رابطه (۱) متریک شوارتزشیلد به دست می‌آید. در چارچوب موضعی غیر چرخشی، جهانخطهای ناظر عبارتند از: $r = cte$, $\theta = cte$ و $\varphi = \omega t + cte$ که بر اساس پایه‌های یک فرمی بیان می‌شود [۹ و ۱۱]:

$$e^{(t)} = \left(\frac{\Sigma \Delta}{A} \right)^{1/2} dt,$$

$$e^{(r)} = \left(\frac{\Sigma}{\Delta} \right)^{1/2} dr,$$

$$e^{(\theta)} = \Sigma^{1/2} d\theta$$

$$e^{(\phi)} = \left(\frac{A}{\Delta} \right)^{1/2} \sin \theta (d\varphi - \omega dt), \quad (۵)$$

به طوری که $\omega = \frac{rMr}{A}$ سرعت زاویه‌ای ناظر است، بنابراین مولفه سوم سرعت در چارچوب موضعی غیر چرخشی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$V_{LNR}^{(r)} = \frac{u^\mu e_\mu^{(r)}}{u^\nu e_\nu^{(r)}} = \frac{A \sin \theta}{\Sigma \sqrt{\Delta}} \left(\frac{u^r}{u^\phi} - \omega \right), \quad (۶)$$

مجموعه‌ای از مقالات از سال ۱۹۷۰ تا ۱۹۷۴ در تانسور انرژی-تکانه، ممان چند قطبی را بر اساس تبدیلات فوریه مورد بحث قرار داد [۷-۹]. همچنین دیکسون با استفاده از اصل وردش ماتیسون، معادلات دینامیکی را برای P^α و $S_{\alpha\beta}$ پیدا کرد. شکل نهایی معادلات میدان برای ذرات اسپین‌دار یا معادلات ماتیسون-پاپاپترو-دیکسون که به اختصار معادلات MPD نوشته می‌شوند به صورت زیرند هستند [۱۰]:

$$\frac{D}{d\tau} P^\alpha = -\frac{1}{2} R^\alpha_{\beta\mu\nu} u^\beta S^{\mu\nu} + \mathcal{F}^\alpha, \quad (۱)$$

$$\frac{D}{d\tau} S^{\rho\sigma} = P^\rho u^\sigma - u^\sigma P^\rho + \mathcal{J}^{\rho\sigma}, \quad (۲)$$

به طوری که $\frac{D}{d\tau}$ مشتق هموردا در جهت جهانخط و همچنین $S^{\mu\nu}$ تانسور اسپین ذره به جرم m است. بردار تکانه P^ρ و بردار اسپین $S^{\mu\nu}$ دو ممان اول گشتاور $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$ هستند به طوری که نیروی دیکسون \mathcal{F}^α و گشتاور براساس جملات تکانه‌های چهار قطبی و بالاتر ذره آزمون نوشته می‌شود.

مدارهای دایروی ذرات اسپین‌دار و بدون اسپین در رژیم نسبیستی نقش مهمی در دسته‌بندی مسیرهای ژئودزیک و غیر ژئودزیک در متریک کر دارند. ابتدا جیمز باردین و سپس برنارد آشنباخ یک رفتار عجیبی از وابستگی شعاعی سرعت مداری ذرات جرم‌دار با سرعت زاویه‌ای کپلری در اطراف سیاه‌چاله‌های چرخان در چارچوب موضعی غیرچرخشی یا LNR مشاهده کردند [۵ و ۶]. انتظار می‌رفت که سرعت ذرات در اطراف سیاه‌چاله با فاصله از آن کاهش پیدا کند، اما در یک بازه‌ای ناگهان سرعت افزایش یافته و سپس سیر نزولی خود را دوباره طی خواهد کرد و این واقعیت جالب برای مدارهای اطراف یک سیاه‌چاله‌های کر با شرطی برای اسپین آن یعنی $a \geq 0.4953$ دیده می‌شود. این ویژگی "ساختار کمینه و بیشینه" در سرعت مداری ذره با تعمیم از متریک کر به متریک کر-دوسیت و کر-پاد-دوسیت همچنان حضور دارد و رابطه‌ای بین تکانه زاویه‌ای سیاه‌چاله a و ثابت کیهانشناسی Λ ، در صورت وجود "ساختار بیشینه-کمینه" به دست می‌آید [۷]. همچنین این رفتار غیر یکنواخت برای ذراتی با تکانه‌های زاویه‌ای ثابت و غیر کپلری نیز مورد مطالعه قرار گرفته است [۸]. در این مقاله به

کیهان‌شناسی در شکل ۳ مقاله [۷] قابل مشاهده است. این پدیده برای توزیع تکانه زاویه‌ای ثابت نیز مورد بررسی قرار گرفت [۸].

تاکنون این پدیده برای ذرات بدون اسپین بررسی شده و سؤالی که طرح می‌شود این است که تأثیر متقابل اسپین ذره و تکانه زاویه‌ای سیاه‌چاله در ایجاد ساختار بیشینه-کمینه چگونه است؟ برای پاسخ دادن به این سؤال ابتدا باید مسیر و مدارهای چرخشی ذرات اسپین‌دار را در اطراف سیاه‌چاله‌ها مورد مطالعه قرار دهیم.

۳. مطالعه مدارهای چرخشی ذرات اسپین‌دار در

اطراف سیاه‌چاله‌ها بر اساس معادلات MPD

همان طور که اشاره کردیم به طور معمول، حرکت ذرات اسپین‌دار با استفاده از معادلات ماتیسون-پاپترو-دیکسون (معادلات (۱) و (۲)) توصیف می‌شود [۱، ۲ و ۳]. ارتباط بین تانسور اسپین ذره، $S^{\mu\nu}$ و سرعت آن براساس شرط ماتیسون-پیرانی توصیف می‌شود [۱۲]:

$$S^{\mu\nu}u_{\mu} = 0, \quad (9)$$

در این مقاله علاقه‌مندیم که دینامیک ذره ای به جرم m را با اندازه اسپین S در میدان چرخشی به جرم M مورد بررسی قرار بدهیم که $m \ll M$ است بنابراین با چشم‌پوشی از ممان‌های چهار قطبی و بالاتر یعنی $F^{\alpha} = 0$ و $T^{\rho\sigma} = 0$ در معادلات MPD، جرم m و اندازه اسپین آن S همیشه در طول حرکت ثابت می‌ماند لذا شرط کمکی (۹) با شرط کمکی تولژیف-دیکسون یعنی $S^{\mu\nu}P_{\mu} = 0$ یکسان خواهد شد [۱۳].

همچنین اسپین ذره را می‌توان به صورت $\varepsilon = \frac{|S_0|}{mr}$ نمایش داد و $S_0^r = \frac{1}{r} S^{\mu\nu} S_{\mu\nu}$ است که $|S_0|$ اندازه اسپین ذره و r فاصله ذره جرم‌دار از سیاه‌چاله است. واضح است که $|\varepsilon| \ll 1$ است زیرا از مرتبه $\frac{v_{rot} r_{particle}}{rc}$ است که $r_{particle}$ شعاع ذره، v_{rot} سرعت ذره به دور خودش و c سرعت ذره است. لذا شرط $|\varepsilon| \ll 1$ برای هر r و جرمی صحیح است [۱۴].

که $u^{\mu}(s) = \frac{Dx^{\mu}}{Ds}$ سرعت ذره است. مولفه چهارم سرعت، u^r با استفاده از u^r و با استفاده از شرط $u^{\mu}u_{\mu} = 1$ به دست می‌آید:

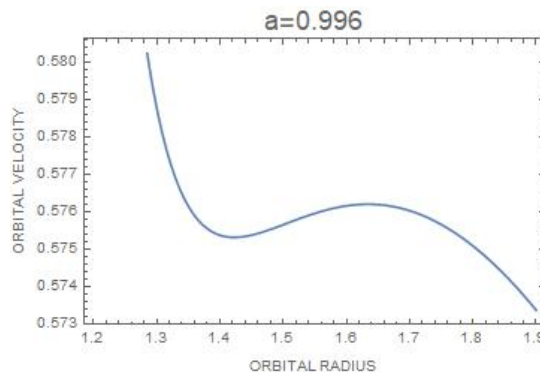
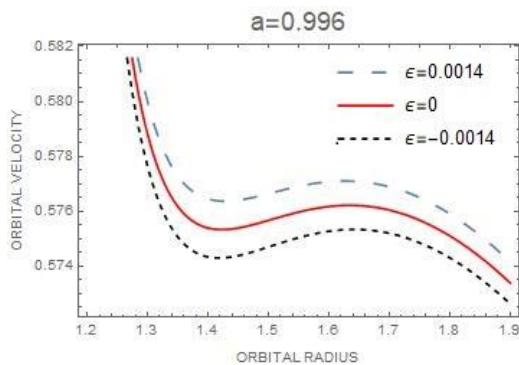
$$u^r = -\frac{g_{rr}}{g_{rr}} u^r + \sqrt{\frac{g_{rr}^2 - g_{rr}g_{\theta\theta}}{g_{\theta\theta}^2}} (u^{\theta})^2 + \frac{1}{g_{\theta\theta}}, \quad (7)$$

برای ذرات بدون اسپین، سرعت مداری غیر یکنواخت در مدارهای هم‌چرخش با سیاه‌چاله دیده می‌شوند به طوری که $\Omega_k = \frac{u^{\theta}}{u^r} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + a}}$ است. در این صورت سرعت مداری غیر چرخشی موضعی خواهد بود:

$$V_{LNRF}^{(r)} = \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2(a^2 - 2Mr + r^2)}{r^2 \sqrt{a^2 - 2Mr + r^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + a}} - \frac{rMar}{(r^2 + a^2)^2 - a^2(a^2 - 2Mr + r^2)} \right), \quad (8)$$

برای $M=1$ و $a=0/996$ ، ساختار کمینه-بیشینه در سرعت مداری چارچوب موضعی غیر چرخشی در شکل ۱ مشاهده می‌شود که به اثر آشنباخ معروف است و برای اولین بار برنارد آشنباخ آن را معرفی کرد. این اثر برای $a \geq 0/9953$ دیده می‌شود [۶].

با تعمیم این اثر به متریک کر-دوسیتته و همچنین متریک کر-پاد-دوسیتته، این اثر با حضور ثابت کیهان‌شناسی مثبت و منفی مورد بررسی قرار گرفته است [۷ و ۸]. اثر آشنباخ علاوه بر این که به تکانه زاویه‌ای سیاه‌چاله وابسته است، ثابت کیهان‌شناسی نیز در پدیدار شدن آن مؤثر است. اگر Λ مثبت باشد حداقل اسپین موثر سیاه‌چاله باید $a_{critical} = 0/9953 M$ باشد و اگر Λ منفی باشد، $a_{critical} = 0/991 M$ خواهد بود و همچنین Λ باید در بازه $-0/001 \leq \Lambda \leq 0/0017$ بر واحد $M=1$ باشد تا اثر آشنباخ وجود داشته باشد. به نظر می‌رسد که اسپین سیاه‌چاله و ثابت کیهان‌شناسی تأثیر متقابلی در ایجاد این "ساختار کمینه-بیشینه" دارند و این اثر را همزمان کنترل می‌کنند (نمودار محدوده وجود اثر آشنباخ در حضور ثابت



شکل ۱. نمودار سرعت دایره‌های ذرات بدون اسپین در چارچوب موضعی غیر چرخشی بر اساس تکانهٔ راولیه‌ای کپلری با اسپین سیاه‌چاله $a = 0/996$ و جرم سیاه‌چاله $M = 1$. با افزایش شعاع ذره از سیاه‌چاله، سرعت ذره یک مسیر ناهماهنگی را طی خواهد کرد که به اثر آشنباخ معروف است. این اثر برای $a \geq 0/9963$ دیده می‌شود.

شکل ۲. سرعت چرخشی در چارچوب موضعی غیر چرخشی برای ذرات اسپین‌دار در اطراف سیاه‌چاله‌ای که اسپین آن $a = 0/996$ و جرم آن یعنی $M = 1$ است. سرعت چرخشی برای اسپین‌های مختلف و فاصلهٔ بین نقاط بیشینه و کمینهٔ سرعت ذرات با یکدیگر متفاوت هستند.

$$\Gamma'_{rr}(u^r)^2 + 2\Gamma'_{rr}u^r u^r + \Gamma'_{rr}(u^r)^2 - \frac{\Delta^r S_r}{r^2 m u_f} \left[(u^r)^2 R'_{rr} + u^r u^r (R'_{rr} - R'_{rr}) - (u^r)^2 R'_{rr} \right] = 0, \quad (14)$$

با محاسبهٔ $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ و $R_{\rho\sigma}^{\lambda}$ (منبع [۱۶] را ببینید)، جواب معادلهٔ فوق خواهد شد:

$$(u^r)^2 = \frac{-F(r,a,M,\epsilon) \pm \sqrt{F^2(r,a,M,\epsilon) - 2P(r,a,M,\epsilon)Q(r,a,M,\epsilon)}}{2Q(r,a,M,\epsilon)}, \quad (15)$$

که

$$F(r,a,M,\epsilon) = -1\lambda a M^2 r^2 \epsilon + 6aM r^2 \epsilon + 1\lambda M^2 r^2 \epsilon^2 - 4M^2 r^2 \epsilon^2 + 6M^2 r^2 \epsilon - 2Mr^2, \\ P(r,a,M,\epsilon) = 4a^2 M^2 \epsilon^2 - 6aM^2 r \epsilon + M^2 r^2, \\ Q(r,a,M,\epsilon) = -2a^2 Mr^2 + 12a\Delta M r^2 \epsilon + 4M^2 r^2 \epsilon - 4\Delta M^2 r^2 \epsilon^2 - 6Mr^2 + r^4,$$

رابطهٔ به دست آمده برای توصیف مدارهای چرخشی نسبی برای فوتون‌ها که جهت چرخش آنها به دور سیاه‌چاله مخالف جهت چرخش اسپین آنهاست به کار می‌رود [۱۷]. در ادامه از رابطهٔ فوق، u^r ، برای بررسی حرکت ذرات اسپین‌دار در اطراف سیاه‌چاله استفاده خواهیم کرد. با استفاده از رابطهٔ فوق و روابط (۶) سرعت چرخشی در چارچوب موضعی غیر چرخشی برای ذراتی که اسپین دارند به دست می‌آید:

لذا با استفاده از بسیار کوچک بودن اندازهٔ اسپین، $|\epsilon| \ll 1$ معادلهٔ (۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$m \frac{D}{ds} u^\lambda = -\frac{1}{r} u^\pi S^{\rho\sigma} R^\lambda_{\pi\rho\sigma}, \quad (10)$$

بردار اسپین سه بعدی S^i را بر حسب تانسور اسپین $S^{\mu\nu}$ تعریف می‌کنیم:

$$s_i = \frac{1}{r} \sqrt{-g} \epsilon_{ikl} S^{kl}, \quad (11)$$

که ϵ_{ikl} نماد لوی چپویتا است. در این صورت معادلهٔ (۲) به صورت زیر در می‌آید [۱۵]:

$$u_f \dot{S}_i - \dot{u}_f S_i + 2 \left(\dot{u}_{[f} u_{i]} - u^\pi u_\rho \Gamma^\rho_{\pi[f} u_{i]} \right) S_k u^k + S_n \Gamma^n_{\pi[f} u_{i]} u^\pi = 0, \quad i=1,2,3 \quad (12)$$

با استفاده از شرط $S^i u_i = 0$ ، یعنی عمود بودن اسپین به صفحهٔ حرکت آن و با شرط این که ذره در صفحهٔ استوایی حرکت می‌کند یعنی $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، به راحتی می‌توان نشان داد که سه معادلهٔ به دست آمده از (۱۲) دارای جواب زیرند:

$$S_1 = S_r = 0, \quad S_2 = S_\theta = 0, \quad S_3 = S_\phi = r u_f S_\phi, \quad (13)$$

و می‌توان برای سادگی با شرایط $u^1 = u^2 = 0$ ، $u^3 \neq 0$ و $u^f \neq 0$ ، معادلهٔ مدار یک ذرهٔ اسپین‌دار در میدان کر را به صورت زیر نوشت:

که r در معادله مکانی است است که در بالای نقطه فرین نمودار رخ می‌دهد در این صورت رابطه خطی بین اسپین مؤثر سیاه‌چاله، a_{crit} و اسپین ذره ε در صورت وجود اثر آشنباخ یا "ساختار کمینه- بیشینه" برای مقادیر مثبت و منفی ε به صورت زیر به دست می‌آید (شکل ۳):

$$a_{crit} = 0/4953 - 0/04163\varepsilon / -0/12 \leq \varepsilon \leq 0/12, \quad (19)$$

۵. نتیجه‌گیری

تاکنون اطلاعات ما از جرم سیاه‌چاله‌ها بیشتر از اسپین آنهاست. برای ذره‌ای که در مدار چرخشی پایدار به دور سیاه‌چاله می‌چرخد، دو مدار متفاوت وجود دارد به طوری که نوسان‌های چرخشی شعاعی و عمودی آنها به دو صورت تشدید ۳:۱ یا ۳:۲ برای هر مقداری از تکانه زاویه ای سیاه‌چاله، a خواهد بود [۱۸ و ۱۹]. اثر آشنباخ روشی را برای تعیین اسپین بعضی از سیاه‌چاله‌ها پیشنهاد می‌دهد؛ زیرا وجود آن با تشدید چرخشی نوسان‌های شعاعی و عمودی همراه است. در ابتدای کشف اثر آشنباخ در سال ۲۰۰۴ برای ذرات بدون اسپین، فقط مقدار اسپین سیاه‌چاله در پدیدار شدن این "ساختار بیشینه-کمینه" اثر داشت. با بررسی این پدیده در حضور ثابت کیهان‌شناسی، رابطه‌ای بین حداقل مقدار اسپین سیاه‌چاله a_{crit} و ثابت کیهان‌شناسی به شرط وجود اثر آشنباخ به دست آمد به طوری که همزمان اسپین سیاه‌چاله و ثابت کیهان‌شناسی این اثر را کنترل می‌کنند و بازه قابل قبول برای وجود این اثر عبارت است از: $0/0017 < \Lambda < 0/001$. تا کنون این اثر برای ذرات اسپین دار بررسی نشده بود که با استفاده از معادلات MPD، سرعت دایره‌ای ذره در اطراف سیاه‌چاله چرخان به دست آمد و با انتقال این سرعت به چارچوب موضعی غیر چرخشی، رابطه (۱۶)، دوباره اثر آشنباخ مشاهده شد. مقدار اسپین ذرات، تأثیر مستقیم در سرعت ذرات در اطراف سیاه‌چاله‌ها خواهد داشت (شکل ۲). با به دست آوردن مشتق و سپس ریشه‌های اکسترمم رابطه‌ای بین حداقل مقدار اسپین سیاه‌چاله و اسپین ذره به دست آمد:

$$a_{crit} = 0/4953 - 0/04163\varepsilon,$$

$$V_{LNR,F,\varepsilon}^{(r)} = \frac{(r^2 + a^2)^r - a^2(a^2 - 2Mr + r^2)}{r^2 \sqrt{a^2 - 2Mr + r^2}} \left(\frac{rMa + \sqrt{r^2(a^2 + r^2 - 2Mr)} + 2MrQ - \frac{2r^2Q}{\sqrt{F^2 - 2PQ + F}}}{2Mar} - \frac{(r^2 + a^2)^r - a^2(a^2 - 2Mr + r^2)}{rM - r} \right), \quad (16)$$

با بررسی دقیق‌تر سرعت چرخشی در چارچوب موضعی غیر چرخشی متوجه می‌شویم که تنها در یکی از جواب‌های (۱۵) فقط اثر آشنباخ و یا "ساختار بیشینه-کمینه" دیده می‌شود و دیگر جواب‌ها با شرط $|\varepsilon| \ll 1$ و یا $0 < a < 1$ سازگار نیست. با رسم شکل ۲ برای $a = 0/496$ برای ε های مختلف متوجه می‌شویم که مکان موضعی کمینه و بیشینه برای سرعت چرخشی ذرات اسپین دار با کاهش مقدار اسپین ذره از مثبت به منفی افزایش می‌یابد. با بررسی دقیق‌تر متوجه می‌شویم که برای ε های مثبت، حداقل مقدار اسپین سیاه‌چاله باید $a_{critical} = 0/4194M$ و حداکثر $a_{critical} = 0/4953M$ باشد. برای ε های منفی حداقل این مقدار باید $a_{critical} = 0/4953M$ و حداکثر این مقدار $a_{critical} = 1/0011M$ باشد تا ساختار بیشینه-کمینه یا اثر آشنباخ وجود داشته باشد. به نظر می‌رسد که علاوه بر اسپین سیاه‌چاله، اسپین ذره نقش مهمی در ایجاد اثر آشنباخ دارد و می‌توان رابطه‌ای برای آن به دست آورد.

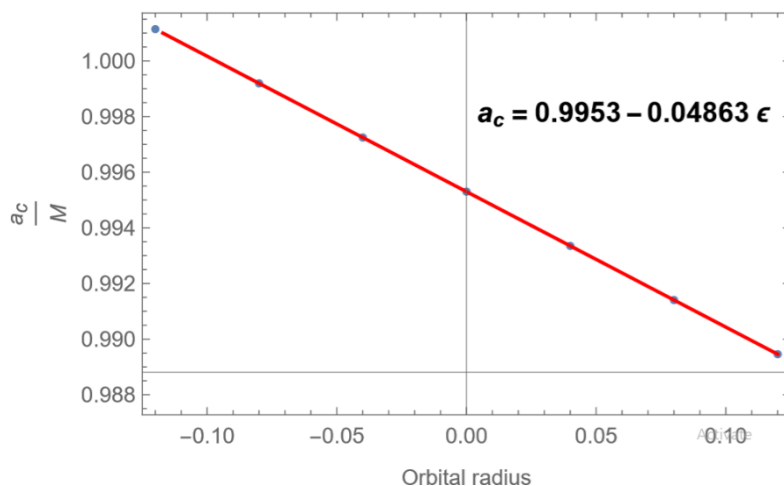
۴. تأثیر متقابل اسپین سیاه‌چاله و اسپین ذره

با محاسبه مشتق اول و دوم سرعت دایره‌ای در چارچوب موضعی غیر چرخشی، ریشه شعاعی مکان‌های اکسترمم برحسب a و ε به صورت دو تابع به دست می‌آید:

$$f(r, \varepsilon, a, M = 1) = 0, \quad g(r, \varepsilon, a, M = 1) = 0, \quad (17)$$

که در این صورت با حل این دو معادله خواهیم داشت:

$$\varepsilon = \left\{ r r (r^{3/2} - a) \left(a^2 (r r + r) + 2 a^2 (r r + 1) \sqrt{r} + r a^2 (r r - a) r^2 + 2 a (\delta r - 9) r^{5/2} + r^5 \right) \right\} / \left\{ -a^2 (r + \varepsilon) + a^2 (r r + 1) \sqrt{r} + 2 a^2 (r r + \delta r + 1) r + r a^2 (\varepsilon r^2 + 2 r^2 - 2 r r + \varepsilon) r^{3/2} + a^2 (11 r^2 + 2 r - 3 \varepsilon) r^2 + a (\delta r^2 - \varepsilon r - \varepsilon) r^{5/2} + 2 (r r - 3) r^6 \right\}, \quad (18)$$



شکل ۳. رابطه خطی بین اسپین سیاه‌چاله و اسپین ذره برای ذرات اسپین‌دار در اطراف سیاه‌چاله چرخان برای حالتی که یک ساختار بیشینه و کمینه وجود داشته باشد.

سیاه‌چاله از $a_{crit} \geq 0.9953$ به مقدار $a_{crit} \geq 0.9894$ در واحد $M=1$ تغییر کند. گام بعدی بررسی اثر اسپین ذره روی پارامترهای تشدید است و این کار در حال انجام است.

همچنین بازه‌ای که در آن اندازه اسپین ذره روی اثر آشنباخ تأثیر خواهد داشت عبارت است از:

$$-0.12 \leq \epsilon \leq 0.12$$

وجود اسپین ذره باعث خواهد شد که حداقل مقدار اسپین

مراجع

1. M Mathisson, *Acta Phys. Pol.* **6** (1937) 163.
2. A Papapetrou, *Proc. R. Soc. A* **209** (1951) 248.
3. W G Dixon, *Nuovo Cim.* **34** (1964) 317.
4. W Tulczjew, *Acta Phys. Pol.* **18** (1959) 393.
5. B Carter, *Phys. Lett. A* **26** 1968 (399).
6. B Aschenbach, *Astron. Astrophys.* **425** (2004) 1075.
7. A Mueller and B Aschenbach, *Class. Quant. Grav.* **24** (2007) 2637.
8. Z Stuchlik, P Slany, G Torok, and M A Abramowicz, *Phys. Rev. D* **71** (2005) 024037.
9. J M Bardeen, *APJ*, **162** (1970) 71.
10. W G Dixon, *Phil. Trans. R. Soc. A* **277** (1974) 59.
11. J M Bardeen, W H Press, and S A Teukolsky, *Astrophys. J.* **178** (1972) 347.
12. F A E Pirani, *Acta Phys. Polon.* **15** (1956) 389 (1956).
13. B Mashhoon, D Singh, *Phys. Rev. D*, **74** (2006) 124006.
14. R Wald, *Phys. Rev. D* **6** (1972) 406.
15. R Plyatsko, O Stefanyshyn and M Fenyk, *Phys. Rev. D*, **82** (2010) 044015.
16. O Semerak, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **308** (1999) 893.
17. R Plyatsko, *Phys. Rev. D*. **58** (1998) 084031.
18. R. Genzel, R. Schodel, and et al., *Nature* **425** (2003) 934.
19. B Aschenbach, N Grosso, D Porquet, P Predehl, *A&A* **417** (2004) 71.