

تأثیر بسامد برخورد روی سالیته‌های نسبیتی در برهم‌کنش لیزر پرشدت با پلاسما

لیلا رجایی و میترا ایمنی

دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم

پست الکترونیکی: l-rajaci@qom.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۱۱/۲؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۱۱/۲۵)

چکیده

تپ‌های لیزر کوتاه و پرشدت، در برهم‌کنش لیزر با پلاسما باعث تحریک ساختارهای موضعی مختلفی در پلاسما می‌شود. به طور خاص، می‌بایست سالیته‌های نسبیتی را مورد توجه قرار داد چرا که دامنه میدان الکترومغناطیسی آنقدر شدید است که می‌توان الکترون‌های پلاسما را به صورت نسبیتی فرض کرد. در برهم‌کنش لیزر پر شدت با پلاسما، برخورد می‌تواند نقش مهمی در پدیده‌های فیزیکی داشته باشد. در این مقاله، با در نظر داشتن برهم‌کنش لیزر پرشدت با پلاسما، تأثیر برخورد روی انتشار سالیته‌ها، بررسی شده است. سپس معادله NLS از نظر عددی حل شده و نتایج با یکدیگر مقایسه شده است. همچنین شرایط پایداری امواج انفرادی و تأثیر برخورد بر روی این امواج بررسی می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: برهم‌کنش لیزر پلاسما، سالیته‌های نسبیتی، معادله NLS ناپایداری.

۱. مقدمه

در برهم‌کنش لیزرهای پرشدت با پلاسما نیز امواج سالیته‌ای درون حفره‌ای از پلاسما به دام افتاده به گونه‌ای که مرزهای این حفره پلاسمایی را یک پلاسمای فوق چگال تشکیل داده است. این فرایند در یک بعد و برای انواع سالیته‌ها بررسی شده است. هنگامی که یک تپ لیزر پر شدت با یک پلاسمای غیرهمگن برخورد می‌کند در نزدیکی ناحیه بحرانی، سالیته‌ها منتشر می‌شوند. در واقع موج لیزر که درون پلاسما به دام افتاده، با بسامد پایین‌تر از موج اولیه لیزر روی چگالی پلاسما اثر می‌گذارد و باعث کاهش چگالی بحرانی می‌شود، در نتیجه موج لیزر به صورت موج سالیته‌ای درون پلاسما به دام می‌افتد [۲].

طبق نتایج به دست آمده از تحقیقات آزمایشگاهی [۳ - ۷]

امواج سالیته‌ای فرایندهای غیر خطی و دارای ساختار متمرکز هستند که به واسطه تعادل بین فرایند غیرخطی و پاشندگی ایجاد می‌شوند. برهم‌کنش لیزرهای پرشدت با پلاسما عامل ایجاد فرایندهایی غیر خطی با ساختارهای متمرکز مانند امواج سالیته‌ای هستند. با توجه به این که شدت این لیزرها از مرتبه 10^{18} W هستند، معمولاً سالیته‌های نسبیتی در این محدوده از شدت لیزرها ایجاد می‌شوند. سالیته‌ها ساختارهایی دارند که به راحتی انعطاف پذیر نیستند. این امواج در صنعت و تکنولوژی کاربردهای زیادی دارند. استفاده از این امواج در موجرها، مخابرات، شتاب‌دهی ذرات و در بخش اپتیک، نمونه‌هایی از کاربردهای آنها در صنعت و تکنولوژی هستند [۱].

در این روابط وارد می‌شود. تحت این شرایط مجموعه این معادلات به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \bar{a} = -\frac{\omega_p^2}{n_0} \frac{n - \bar{a}}{\gamma}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \left(\frac{n \bar{P}}{m \gamma}\right) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} = -\bar{\nabla} \cdot (\rho_a \phi + \gamma_a) + \bar{V}_a \times (\bar{\nabla} \times \bar{P}_a) - \nu \bar{P}, \quad (3)$$

که در این روابط $\bar{a} = \frac{e \bar{A}}{mc}$ پتانسیل برداری بدون بعد، در جهت y است. n ، n_0 ، ν و $\bar{P}$ به ترتیب چگالی الکترون، چگالی اولیه الکترون، بسامد برخورد و تکانه خطی الکترون

در جهت x است. $\gamma = \sqrt{1 + a^2 + \frac{P^2}{m^2 c^2}}$ ضریب نسبیتی و $\bar{E}_{||}$

میدان الکتریکی طولی و $\omega_p = \left(\frac{4\pi n_0 e^2}{m}\right)^{1/2}$ بسامد پلاسما هستند. برای حل این مجموعه معادلات غیرخطی ابتدا باید معادله موج برای پتانسیل به دست آورده شود [۱۶].

برای حل این مجموعه معادلات غیر خطی از روش‌های تقریبی استفاده می‌کنیم و در ابتدا چگالی n را به صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$n = n_0 \delta n + n_1, \quad (4)$$

در رابطه فوق δn قسمت اختلالی بدون بعد است و n_1 چگالی غیر اختلالی است. اکنون در رابطه (۱) چگالی n را از رابطه (۴) قرار داده و با استفاده از رابطه γ به معادله زیر برای پتانسیل برداری و چگالی می‌رسیم:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) a = -\left(1 + \delta n + \frac{a^2}{2}\right) a, \quad (5)$$

$$n_1 \frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} + \frac{\partial n_1}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad (6)$$

در ادامه قسمت زمانی متغیرهای a و δn به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (A e^{-it} + A^* e^{it}), \quad (7)$$

$$\delta n = N_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} (N_1 e^{-2it} + N_1^* e^{2it}). \quad (8)$$

با قرار دادن روابط (۷) و (۸) در معادله (۵) و (۶) معادله‌ای برحسب N_1 و N_0 به دست می‌آید. بعد از ساده‌سازی رابطه حاصله، معادله غیرخطی زیر به دست می‌آید:

$$i \dot{A} + \frac{1}{2} A_{xx} - \frac{1}{8} A |A|_{xx}^2 + \frac{1}{48} A^* A_{xx}^2 + \frac{3}{16} A |A|^2 + \frac{A \omega_p^2 \nu}{2m} \frac{\omega_p^2 \nu C}{16} \frac{d}{dx} A^* = 0. \quad (9)$$

و شبیه‌سازی شده [۸-۱۳] در برهم‌کنش لیزر پلاسما، امواج سالیتون چندگانه ایجاد می‌شود که سالیتون‌های این مجموعه با یکدیگر می‌توانند برهم‌کنش کنند [۱۴].

برای بررسی این امواج از مجموعه معادلات نویر-استوکس^۱ و معادلات ماکسول استفاده می‌شود که با توجه به نوع شرایط اولیه مسئله، منجر به دو دسته معادله غیر خطی شرودینگر^۲ (NLS) یا معادله کتروویچ-دی-وریس^۳ (KDV) می‌شود. تاکنون با روش‌های مختلف ریاضی این معادلات حل شده و جواب‌های سالیتونی بررسی شده‌اند. همچنین در بعضی از تحقیقات از شبیه‌سازی برای حل آنها استفاده شده است [۱۵ و ۱۶].

در این مقاله ما در نظر داریم امواج نسبیتی ایجاد شده در برهم‌کنش لیزر پرشدت با پلاسمای برخوردی را به روشی نوین و متفاوت از روش‌های تحقیقاتی اخیر، بررسی کنیم. در اینجا ما به روش تقریبی، معادله غیر خطی شرودینگر را حل خواهیم کرد. در ابتدا شرایط پایداری این امواج به دست آورده می‌شود و اثرات حضور برخورد روی شرط پایداری بررسی می‌شود. سپس با استفاده از نرم‌افزار، معادله غیرخطی شرودینگر را حل کرده و اثرات برخورد را روی این امواج بررسی می‌کنیم. این مقاله شامل ۴ بخش است که بخش اول آن مقدمه است. در بخش ۲ با استفاده از معادلات ماکسول، معادله اندازه حرکت و معادله پایستگی چگالی معادله غیرخطی شرودینگر به دست می‌آیند و بیشینه دامنه محاسبه می‌شود. در بخش ۳ شرط پایداری امواج بررسی خواهد شد. در بخش ۴ معادله غیرخطی شرودینگر به صورت عددی حل می‌شود و جواب‌های سالیتونی به دست می‌آیند و تأثیر برخورد بررسی می‌شود. در بخش ۵ نتیجه‌گیری نوشته شده است.

۲. معادلات اصلی

برای بررسی برهم‌کنش لیزر-پلاسما از مجموعه معادلات ماکسول همراه با معادله پیوستگی و اندازه حرکت استفاده می‌شود. از آنجایی که مسئله در حد نسبیتی است، عامل برخوردی نیز باید در نظر گرفته شود. در معادله حرکت، جمله برخوردی $\nu \bar{P}$ وارد شده است و ضریب نسبیتی گاما

۱. Navier-Stokes equations

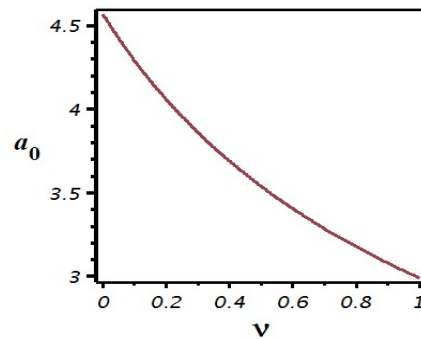
۲. Nonlinear Schrodinger equation

۳. Korteweg-De Vries Equation

بردار a قابل محاسبه است. قبل از حل آن و محاسبه a ، ابتدا بیشینه دامنه a_0 را از رابطه زیر به دست می‌آوریم [۱۶].

$$a_0 = \frac{\lambda_2 \sqrt{2}}{\sqrt{3 + 4\nu}}. \quad (12)$$

در رابطه فوق، بسامد برخورد در مخرج کسر قرار دارد. در شکل ۱ بیشینه دامنه، a_0 ، بر حسب بسامد برخورد، ν ، رسم شده است، همان گونه که انتظار داشتیم با افزایش برخورد، دامنه موج سالیونی کاهش می‌یابد.



شکل ۱. بیشینه دامنه موج به ازای بسامدهای برخورد مختلف.

۳. شرط پایداری

جواب معادله غیرخطی شرودینگر به صورت سالیون‌ها هستند. یکی از مسائل مهم، بررسی شرط پایداری این امواج است. با استفاده از انتگرال‌گیری مکانی روی هامیلتونی سیستم می‌توان به رابطه‌ای برای پایداری اندازه حرکت رسید [۱۷].

$$P = \int |A|^2 dx. \quad (12)$$

برای بررسی پایداری سالیون‌ها باید از معیار پایداری واخیتوف-کولکولو $\frac{dP}{d\lambda^2} > 0$ استفاده کرد [۱۷]. بدین منظور ابتدا با استفاده از رابطه (۱۱)، رابطه P را از رابطه (۱۳) حساب کرده سپس بیشینه دامنه a_0 را از رابطه (۱۲) درون رابطه حاصله برای p قرار می‌دهیم، نهایتاً $P_0(\lambda)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P_0(\lambda) = \frac{2(a_0\lambda^2\nu + 3a_0\lambda^2 - 32\lambda^2)(5a_0\lambda^2 - 6)\sqrt{2}}{(4\nu + 3)\sqrt{3a_0\lambda^2\nu - 36\sqrt{18a_0\lambda^2\nu + 6a_0\lambda^2 - 64\lambda^2}} + \sqrt{3a_0\lambda^2\nu - 36\sqrt{18a_0\lambda^2\nu + 6a_0\lambda^2 - 64\lambda^2}}} + \frac{1}{\sqrt{3a_0\lambda^2\nu - 36\sqrt{18a_0\lambda^2\nu + 6a_0\lambda^2 - 64\lambda^2}}} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{(4\nu + 3)\sqrt{20\nu + 15}} \left[\sqrt{12} \ln \left(\frac{-8a_0\lambda^2 - 12\nu - 9 + (20\nu + 15)a_0\lambda^2}{\sqrt{20\nu + 15}} \right) + \sqrt{(20\nu + 15)a_0\lambda^2 + (-16a_0\lambda^2 - 24\nu - 18)a_0\lambda^2 + 192\lambda^2} \right] \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \sqrt{12} \ln \left(\frac{-8a_0\lambda^2 - 12\nu - 9 + (20\nu + 15)a_0\lambda^2}{\sqrt{20\nu + 15}} + \frac{\sqrt{(20\nu + 15)a_0\lambda^2 + (-16a_0\lambda^2 - 24\nu - 18)a_0\lambda^2 + 192\lambda^2}}{(4\nu + 3)\sqrt{20\nu + 15}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{8} \sqrt{12} \ln \left(\frac{-8a_0\lambda^2 - 12\nu - 9 + (20\nu + 15)a_0\lambda^2}{\sqrt{20\nu + 15}} + \frac{\sqrt{(20\nu + 15)a_0\lambda^2 + (-16a_0\lambda^2 - 24\nu - 18)a_0\lambda^2 + 192\lambda^2}}{(4\nu + 3)\sqrt{20\nu + 15}} \right) \right) \right) \\ \sqrt{2}\sqrt{12}\sqrt{(4a_0\lambda^2\nu + 3a_0\lambda^2 - 32\lambda^2)(5a_0\lambda^2 - 6)}). \quad (13)$$

رسم شده است. اولین مسئله‌ای که باید بررسی شود، پایداری

معادله غیرخطی شرودینگر است.

در رابطه فوق کمیت‌های زمانی و مکانی به صورت $x \rightarrow (c\omega_p^{-1})\tilde{x}$ and $t \rightarrow (\omega_p^{-1})\tilde{t}$ بی بعد شده‌اند و برای راحتی در روابط فوق علامت $\sim$ را برداشته‌ایم. معادله (۸) می‌توان پتانسیل برداری A را به صورت زیر تعریف کرد:

$$A = a(x)e^{i\lambda^2 t}. \quad (10)$$

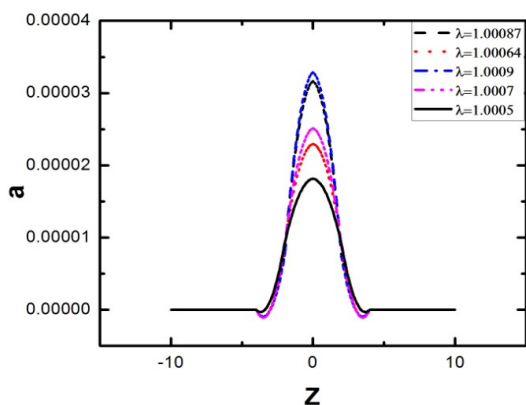
در رابطه فوق واحد λ ، $s^{-1/2}$ است البته در این رابطه λ با $\frac{1}{\omega_p^{-1/2}}$ بی بعد شده است. با جایگذاری رابطه (۱۰) در معادله

$$(9), \quad \left(\frac{da}{dx}\right)^2 \text{ به صورت زیر به دست می‌آید:}$$

$$\left(\frac{da}{dx}\right)^2 = \frac{-1 + \frac{3}{32\lambda^2}a^2 + \frac{\omega_p^2\nu C}{8\lambda^2}a^2}{-\frac{1}{2\lambda^2}a^2 + \frac{5}{12\lambda^2}}, \quad (11)$$

اگر از این رابطه جذر گرفته شود یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول غیرخطی حاصل می‌شود که با استفاده از آن پتانسیل

نمودار P_0 بر حسب λ به ازای ν های مختلف در شکل ۲

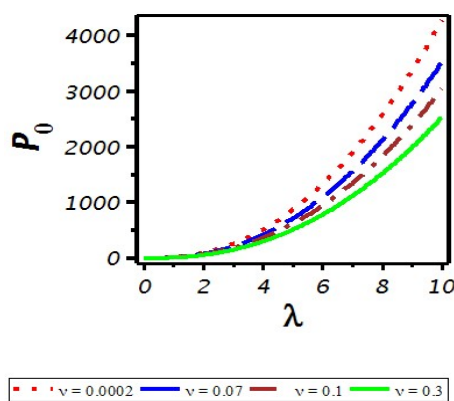


شکل ۳. (رنگی در نسخه الکترونیکی) منحنی پتانسیل برداری بر حسب مکان به ازای λ های مختلف و $\nu=0.0089$.

اثرات برخوردی در نظر گرفته نشده است). در اینجا ما از حل عددی استفاده کرده‌ایم و بدین منظور از نرم‌افزار PDE استفاده کرده و جواب‌ها را به صورت نمودار ارائه کرده‌ایم. همچنین این جواب‌ها برای مقادیر مختلف بسامد برخورد محاسبه شده و تأثیر بسامد برخورد روی این جواب‌ها بررسی می‌شود. اکنون پتانسیل برداری برای مقادیر مختلف λ و برای یک بسامد برخورد ($\nu=0.0089$) رسم شده و با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

همان طور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، تپ‌های سالیتون به ازای λ های متفاوت و برای یک مقدار بسامد برخورد رسم شده است. تپ سالیتون به ازای $\lambda=1/0.009$ بیشترین ارتفاع یا بیشترین مقدار پتانسیل برداری و همچنین قله تیزتری نیز دارد که هر چه λ کوچک‌تر می‌شود، ارتفاع یا پتانسیل برداری نیز کمتر می‌شود و قله تپ‌های سالیتونی نیز پهن‌تر می‌شوند.

در شکل ۴ جواب‌های سالیتونی دو تپی برای حالتی که بسامد برخورد اعمال شده، به ازای سه λ مختلف رسم شده است. تپ‌های سالیتونی به ازای $\lambda=1/211$ بیشترین ارتفاع یا بیشترین مقدار پتانسیل برداری و همچنین قله تیزتری نسبت به تپ‌های سالیتونی با $\lambda=1/800$ و $\lambda=1/0.043$ دارد. همچنین تپ‌های سالیتونی با $\lambda=1/800$ ، بیشترین پتانسیل برداری را نسبت به تپ‌های سالیتونی دارای $\lambda=1/0.043$ دارد. برای بررسی اثرات برخوردی جواب‌های سالیتون به ازای λ ثابت و بسامدهای برخورد مختلف برای دو حالت تک تپی و دو تپی بررسی شده است. ابتدا برای $\lambda=1/0.0064$ و بسامدهای



شکل ۴. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار P_0 بر حسب λ در بسامدهای مختلف.

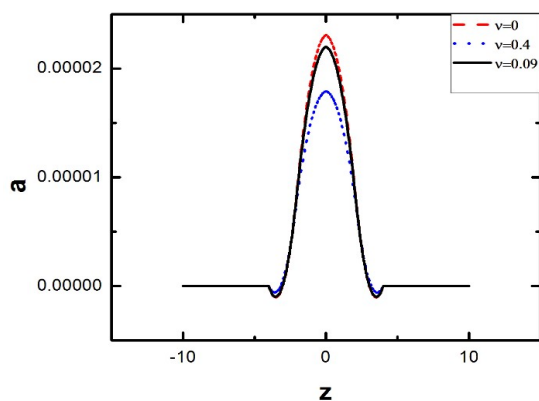
سیستم است. مطابق این شکل تغییرات P_0 بر حسب λ ، یک تابع همواره صعودی است و لذا شرط پایداری سیستم به ازای تمام λ ها برقرار خواهد بود. بنابراین به ازای تمام λ ها شرط امواج سالیتونی پایدار هستند. در این نمودار، تغییرات P_0 بر حسب λ با تغییر بسامد برخورد هم بررسی می‌شود. طبق این نمودار با افزایش بسامد برخورد، شیب منحنی کم شده و به سمت صفر میل می‌کند.

۴. جواب‌های سالیتونی

برای بررسی سالیتون‌ها باید معادله دیفرانسیل غیر خطی (۸) حل شود. برای حل این معادله، ابتدا رابطه (۹) را درون رابطه (۸) قرار می‌دهیم و به معادله زیر می‌رسیم:

$$\frac{d^2 a}{dx^2} \left(-2(1-\lambda^2) + 2a^2 \right) + 2(1-\lambda^2)a + 2\left(\frac{da}{dx}\right)^2 a + \nu \frac{da}{dx} a + (1-\lambda^2)a^2 = 0, \quad (14)$$

این معادله همانند معادلات شرودینگر ویژه مقادیر ویژه توابع دارند. در حقیقت جواب‌های سالیتونی ویژه توابع این معادلات هستند. بنابراین به ازای مقادیر خاص λ ، این معادلات جواب دارند. برای این معادلات دو نوع موج سالیتونی به دست آمده، یک موج سالیتونی تک تپی و یک موج سالیتونی دو تپی. برای این معادلات غیرخطی به راحتی نمی‌توان حل تحلیلی ارائه کرد. یکی از روش‌های حل این معادلات، استفاده از جواب‌هایی به صورت سینوس هایپربولیک ماست [۱۶] (شایان ذکر است که در این مقالات

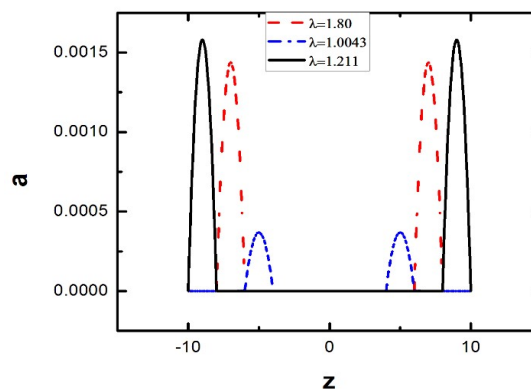


شکل ۵. (رنگی در نسخه الکترونیکی) منحنی پتانسیل برداری بر حسب مکان به ازای بسامدهای مختلف و $\lambda = 1/0.0064$.

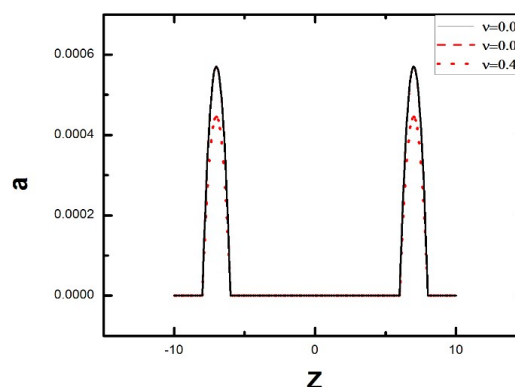
بیشترین ارتفاع یا پتانسیل برداری را دارد و نوک قله به ازای این بسامد تیزتر است. اما هر چه بسامد افزایش می یابد پتانسیل برداری یا ارتفاع تپ های سالیتهون کمتر و قله آن نیز پهن تر می شود. همان گونه که دیده می شود مجدداً برخورد، عامل کاهش دامنه است. البته اثرات برخورد در $\nu = 0.009$ اختلاف زیادی با $\nu = 0$ ندارد ولی با زیاد شدن مقدار بسامد، اثرات آن دیده می شود.

۵. نتیجه گیری

در این مقاله معادله غیرخطی شرودینگر برای پلاسمای نسبیتی برخوردی به دست آمده و ابتدا شرایط پایداری امواج سالیتهونی بررسی شدند. نتایج نشان دادند که در این مسئله، به ازای تمام مقادیر λ شرط پایداری برقرار است. در مرحله بعد با استفاده از نرم افزار، معادله غیر خطی شرودینگر را حل کرده و جواب های سالیتهونی برای دو حالت تک تپی و دو تپی به دست آمدند و اثرات برخورد روی آنها بررسی شدند. نتایج حاصله نشان دادند که به ازای بسامد برخورد ثابت، با افزایش λ ، دامنه موج سالیتهونی نیز افزایش می یابد. اما هنگامی که همین جواب ها را به ازای λ ثابت و بسامد برخورد مختلف به دست آوردیم، مشاهده کردیم که هر چه بسامد را افزایش می دهیم، دامنه موج سالیتهون بیشتر کاهش می یابد. در واقع همان نتیجه ای است که با رسم نمودار بیشینه دامنه بر حسب بسامدهای مختلف به دست آوردیم که با افزایش بسامد یک روند کاهشی را نشان می داد. پس همان طور که از قبل انتظار



شکل ۴. (رنگی در نسخه الکترونیکی) منحنی پتانسیل برداری بر حسب مکان به ازای λ های متفاوت و $\nu = 0.0089$.



شکل ۶. (رنگی در نسخه الکترونیکی) منحنی پتانسیل برداری بر حسب مکان به ازای بسامدهای مختلف و $\lambda = 1/0.342$.

برخورد متفاوت جواب های تک تپی با هم مقایسه می شود.

در شکل ۵ جواب های سالیتهونی تک تپی به ازای بسامدهای برخورد مختلف و λ ثابت رسم شده است. در این شکل همان طور که مشخص است به ازای $\nu = 0$ ، جواب سالیتهونی بیشترین ارتفاع یا پتانسیل برداری را دارد و نوک قله به ازای این بسامد تیزتر است اما هر چه بسامد افزایش می یابد پتانسیل برداری یا ارتفاع تپ سالیتهون کمتر و قله آن نیز پهن تر می شود. این نتیجه نشان می دهد که بسامد برخورد، عامل کاهش دامنه موج سالیتهونی می شود.

حال جواب های سالیتهونی دو تپی به ازای $\lambda = 1/0.342$ و بسامدهای برخورد مختلف با هم مقایسه می شوند.

در شکل ۶ جواب های دو تپی سالیتهون به ازای بسامدهای برخورد مختلف و λ ثابت رسم شده است. همان طور که در این شکل مشاهده می شود به ازای $\nu = 0$ جواب سالیتهونی

دامنه موج سالیتون بیشتر کاهش یافته و رو به انهدام می‌رود.

داشتیم با وجود اتلاف دامنه موج سالیتون کاهش می‌یابد به طوری که هر چه بسامد یا همان اتلاف را افزایش می‌دهیم،

مراجع

1. Sh Zhang, et al., *Physics of Plasmas* **18**, 3 (2011) 033104.
2. Siminos, et al., *Physical Review E*. **90** 6 (2014) 063104.
3. A Akhiezer and R Polovin, *Sov Phys JETP*. **3**, 696 (1956).
4. J H Marburger and R F Tooper, *Phys Rev Lett*. **35**, 1001 (1975).
5. V A Kozlov, A G Litvak, and E V Suvorov, *Soviet JETP*. **49**, 75 (1979).
6. P K Kaw, A Sen, and T Katsouleas, *Phys Rev Lett*. **68**, 3172 (1992).
7. T Esirkepov, F Kamenets, S Bulanov, and N Naumova, *JETP. Lett*. **68**, 36 (1998).
8. S V Bulanov, I N Inovenkov, V I Kirsanov, N M.Naumova, and A S Sakharov, *Phys Fluids B*. **4**, 1935 (1992).
9. S V Bulanov, T Z Esirkepov, N M Naumova, F Pegoraro, and V A Vshivkov, *Phys Rev Lett*. **82**, 3440 (1999).
10. N M Naumova, S V Bulanov, T Z Esirkepov, D Farina, K Nishihara, F Pegoraro, H Ruhl, and A S Sakharov, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 185004 (2001).
11. T Esirkepov, K Nishihara, S V Bulanov, and F Pegoraro, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 275002 (2002).
12. S S Bulanov, T Z Esirkepov, F F Kamenets, and F Pegoraro, *Phys. Rev. E* **73**, 036408 (2006).
13. D Wu, C Y Zheng, X Q Yan, M Y Yu, and X T He, *Phys Plasma*. **20**, 033101 (2013).
14. S V Bulanov, F Califano, T Z Esirkepov, K Mima, N M Naumova, K Nishihara, F Pegoraro, Y Sentoku, and V A Vshivkov, *Physica D* **152**, 682 (2001).
15. A Hasegawa and Y Kodama, *Solitons in Optical Communications* Clarendon Press, Oxford (1995).
16. Lj Hadžievski, M S Jovanović, M M Škorić, and K Mima, *physics of plasmas*. **9** (2002).
17. Y Jianke and S Nixon, *Physics Letters A*. **45** (2016).