



## تصحیح طیف انرژی پتانسیل نمایی با فرض کمینه طول

نوید رمضانلو و صدیقه میرابوطالبی\*

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال، تهران

پست الکترونیکی: S\_mirabotalebi@iau-tnb.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۹/۱۹؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۰/۴/۳۱)

### چکیده

در نظریه‌های متفاوت گرانش کوانتومی از قبیل نظریه ریسمان، نسبت خاص دوگانه و فیزیک سیاه‌چاله‌ها، وجود یک طول کمینه از درجه بزرگی مقیاس طول پلانک مطرح می‌شود. برای اعمال این طول کمینه در مکانیک کوانتومی معمولی لازم است که اصل عدم قطعیت معمول هاینبرگ اصلاح شده و تعمیم یابد. در این روش تکانه سیستم اصلاح می‌شود و هامیلتونی عباراتی اضافی به دست می‌آورد. بنابراین، با فرض وجود طول کمینه، انتظار می‌رود طیف انرژی هر سیستم فیزیکی تصحیح شود. در این مقاله، این اثرات بر سطوح انرژی پتانسیل نمایی در حالت پایه با اعمال روش اختلالی مورد بررسی قرار می‌گیرد. به‌عنوان یکی از متداول‌ترین موارد استفاده از پتانسیل نمایی، توصیف حالت مقید دوترون با استفاده از آن است. در اینجا، تصحیح طیف انرژی دوترون با فرض وجود کمینه طول، محاسبه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: معادله شرودینگر، پتانسیل نمایی، اصل عدم قطعیت تعمیم‌یافته، کمینه طول، طیف انرژی دوترون

### ۱. مقدمه

کمینه طول رسید، اما با اصلاح و اضافه کردن یک جمله به آن، می‌توان وجود یک کمینه طول محدود  $\Delta x$  را در آن مشاهده کرد. با فرض وجود کمینه طول، رابطه عدم قطعیت معمول باید به شکل زیر اصلاح شود [۸]:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \left[ 1 + 3\beta(\Delta p)^2 + \tau \right], \quad (1)$$

در این رابطه که به اصل عدم قطعیت تعمیم یافته ( $GUP$ ) معروف است  $\tau$  تابعی است که به طور کلی مستقل از  $\Delta p$  و  $\Delta x$  است. در اینجا  $\beta$  یک پارامتر ابعادی و مثبت است و

یکی از سؤالاتی که همواره ذهن انسان را درگیر خود کرده این است که آیا حد پایینی برای اندازه گیری طول اجسام وجود دارد؟ در دوران مدرن، هاینبرگ از جمله اولین کسانی بود که وجود کمینه طول را پیش بینی کرد [۱]. بعدها وجود کمینه طول قابل مشاهده، در نظریه‌های گرانش کوانتومی [۲] به ویژه نظریه ریسمان [۳-۵]، فیزیک سیاه‌چاله [۶]، فیزیک جهان اولیه [۷] و... هم مطرح شد.

از اصل عدم قطعیت هاینبرگ معمولی نمی‌توان به وجود

۱. Generalized Uncertainty Principle

می تواند به صورت:

$$\beta = \frac{\beta_0}{P_p^\nu} = \frac{\beta_0}{(cM_p)^2}, \quad (2)$$

تعریف شود که در آن  $M_p$  و  $P_p$  به ترتیب تکانه و جرم پلانک هستند.  $\beta$  پارامتری بدون بعد با مقدار پیش فرض  $\beta \approx 1$  است؛ اما مقادیر دیگری هم برای آن پیش بینی شده است [۹].

با استفاده از رابطه جابه جایی زیر می توان رابطه عدم قطعیت (۱) را به دست آورد:

$$\begin{aligned} [x_i, x_j] &= [p_i, p_j] = 0, \\ [x_i, p_j] &= i\hbar(\delta_{i,j} + \beta(p^\nu \delta_{i,j} + 2p_i p_j)). \end{aligned} \quad (3)$$

بدین منظور باید تکانه تعمیم یافته  $p_i$  و موقعیت  $x_i$  به صورت زیر نوشته شوند:

$$x_i = x_{,i}, \quad p_i = p_{,i} (1 + \beta p^\nu), \quad (4)$$

به طوری که  $p_{,i} = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_{,i}}$  و  $x_{,i}$  نمایانگر تکانه و موقعیت معمولی هستند. خاطر نشان می شود که رابطه (۱) را می توان با استفاده از رابطه جابه جایی دیگری، به جز رابطه (۳) هم به دست آورد [۱۰ و ۱۱]. ما در اینجا روابط تعمیم یافته طبق معادلات (۳) را در نظر می گیریم.

تحت جبر اصلاح شده فوق و تعریف تکانه (۴)، هامیلتونی

هر سیستم فیزیکی به صورت زیر تغییر می کند:

$$H = H_0 + H_1 + O(\beta^\nu), \quad (5)$$

به طوری که:

$$H_0 = \frac{P_0^\nu}{2m} + V(\vec{r}), \quad H_1 = \frac{\beta}{m} P_0^\nu, \quad (6)$$

که در آن  $H_0$  هامیلتونی معمولی سیستم با پتانسیل مربوطه  $V(\vec{r})$  و  $H_1$  هم اصلاح مرتبه اول هامیلتونی نسبت به  $\beta$  است.

با در نظر گرفتن هامیلتونی اصلاح شده به نظر می رسد که مقادیر چشم داشتی هر سیستم فیزیکی نیازمند تصحیح است. این امر می تواند ما را هدایت کند تا آزمایش هایی را جهت بررسی صحت اصل عدم قطعیت تعمیم طراحی کنیم. به ویژه، طیف انرژی پتانسیل های فیزیکی با فرض وجود کمینه طول، تصحیح می شوند. تصحیحات طیف انرژی نوسانگر هارمونیک ساده و

اتم هیدروژن در مراجع [۱۰-۱۵]، از روش اختلالی بررسی شده است. هم چنین این تصحیحات، با استفاده از روش های غیر اختلالی در فضای تکانه در [۱۶-۱۹] به دست آمده است. طیف انرژی تصحیح یافته پتانسیل عکس مربع فاصله و کراتزرا<sup>۱</sup> با به کارگیری معادله (۳) و از روش اختلالی به ترتیب در [۲۰] و [۲۱] محاسبه شده است. تصحیح طیف انرژی نوسانگر موریس هم با استفاده از روش اختلالی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است [۲۲]. در این مقاله اثر وجود کمینه طول و عدم قطعیت تعمیم یافته بر سطوح انرژی پتانسیل نمایی مطالعه می شود. بدین منظور، از روش اختلالی استفاده می کنیم. یکی از مهم ترین کاربردهای پتانسیل نمایی در توصیف حالت مقید، دوترون است. از این رو، این تصحیحات را در مورد مدل دوترون بررسی خواهیم کرد.

ساختار این مقاله به این صورت است: در بخش بعدی به ارائه روش به کار برده شده و طرح کلی مسئله پرداخته می شود. بخش سوم به محاسبه جواب های معادله شرودینگر در حالت پایه پتانسیل نمایی اختصاص یافته است. در بخش چهارم، به عنوان مثالی از کاربرد پتانسیل نمایی، مدل دوترون در نظر گرفته شده و تصحیحات طیف انرژی آن در حضور طول کمینه محاسبه می شوند. در پایان، در بخش پنجم نتایج بیان می شود.

## ۲. روش کلی

تفاوت کمی بین اصل عدم قطعیت معمولی هایزنبرگ و اصل عدم قطعیت تعمیم یافته وابسته به فرض وجود کمینه طول، وجود دارد. در اصل، پارامتر تصحیح  $\beta$  در روابط (۱) تا (۶)، آن قدر کوچک فرض می شود که در این معادلات از توان دوم  $\beta$  صرف نظر می شود. از این رو بهترین روش برای محاسبه اصلاحات القایی بر ترازهای انرژی، روش اختلالی است. در اینجا، از روش اختلال مرتبه اول، نسبت به پارامتر تصحیح  $\beta$ ، برای محاسبه طیف انرژی پتانسیل نمایی استفاده می کنیم. در پیکربندی معادلات (۱)-(۶) طیف انرژی تصحیح شده می تواند به شکل زیر نوشته شود:

۱. Kratzer

که در آن  $Y_m^\ell(\theta, \phi)$  ها، هارمونیک های کروی هستند. با جای-گذاری معادله (۱۲) در معادله (۱۱)، معادله برای تابع موج شعاعی به صورت زیر درمی آید:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] R_\ell(r) = [E_\ell - V] R_\ell(r). \quad (13)$$

برای حالت زمینه،  $\ell = 0$ ، و برای پتانسیل نمایی (۱۰)، این معادله به صورت زیر نوشته می شود:

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E + V_0 e^{-r/a}) \right] R_\ell(r) = 0, \quad (14)$$

این معادله مناسب برای بررسی حالت مقید دوترون است. دوترون، هسته دوتریوم (هیدروژن سنگین) است که از یک پروتون و یک نوترون تشکیل شده است. برهم کنش نوترون-پروتون در حالت مقید دوترون به صورت پتانسیل نمایی  $V(r) = V_0 e^{-r/a}$  دوترون ها عمدتاً با دوتریوم یونیزه

شده (حذف الکترون های منفرد از اتم) تشکیل می شوند و پس از دریافت انرژی زیاد در شتاب دهنده های ذرات، به عنوان پرتابه برای تولید واکنش های هسته ای مورد استفاده قرار می گیرند. یک دوترون هم چنین از گرفتن یک نوترون کند توسط پروتون همراه با انتشار یک فوتون گاما حاصل می شود [۲۷]. در رابطه (۱۴)،  $m$  جرم کاهیده است و چنانچه نوکلئون ها را هم جرم فرض کنیم،  $m = \frac{m_n}{2}$  می شود که در آن  $m_n$  جرم نوکلئون است. ویژه مقادیر و ویژه توابع معادله (۱۴) در مرجع [۲۳] محاسبه شده است. در اینجا برای محاسبه تصحیح انرژی نیاز به ویژه مقادیر و ویژه توابع است، لذا به مرور روش حل [۲۳] می پردازیم. بدین منظور، ابتدا تغییر متغیری به صورت زیر را در معادله (۱۴) در نظر می گیریم:

$$y = e^{-r/2a}, \quad (15)$$

در این صورت داریم:

$$\left[ \frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d}{dy} + \left( p^2 - \frac{q^2}{y^2} \right) \right] R(y) = 0, \quad (16)$$

که پارامتر های این رابطه به صورت زیر تعریف شده اند:

$$p^2 = \frac{2m_n}{\hbar^2} V_0 a^2, \quad q^2 = \frac{2m_n}{\hbar^2} E a^2, \quad (17)$$

$$E_n = E_n^0 + \Delta E_n, \quad \Delta E_n = \Delta E_n^{(1)} + \dots, \quad (V)$$

که در آن  $E_n^0$  ویژه مقدار انرژی مختل نشده است. اصلاح مرتبه اول  $\Delta E_n^{(1)}$  با رابطه زیر داده می شود:

$$\begin{aligned} \Delta E_n^{(1)} &= \langle \psi_n^{(0)} | H_0 | \psi_n^{(0)} \rangle \\ &= \frac{\beta}{m} \langle \psi_n^{(0)} | P_0^2 | \psi_n^{(0)} \rangle, \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن  $\psi_n^{(0)}$  تابع موج غیراختلالی را نشان می دهد. ماتریس عناصر رابطه (۸) برای یک پتانسیل دلخواه، به دلیل تبهگنی احتمالی یک تراز انرژی نوعی، به طور معمول قطری نیست [۱۲]، اما برای یک پتانسیل مرکزی، قطری می شود و با استفاده از رابطه:

$$P_0^2 = 2m(H_0 - V(r)),$$

می تواند به صورت زیر درآید:

$$\Delta E_n^{(1)} = \beta m \left[ \langle E_n^{(0)} \rangle^2 - 2 \langle E_n^{(0)} \rangle \langle V \rangle + \langle V^2 \rangle \right]. \quad (9)$$

از این رابطه می توان برای محاسبه اصلاحات وارد شده در طیف انرژی استفاده کرد. در اینجا، از آن برای مطالعه تصحیح طیف انرژی پتانسیل نمایی استفاده می شود. پتانسیل مرکزی نمایی به شکل زیر در نظر گرفته می شود [۲۳]:

$$V(r) = V_0 e^{-r/a}, \quad (10)$$

در این رابطه  $V_0 > 0$  عمق چاه پتانسیل است. پارامتر دارای بعد  $a$  بازه اثر پتانسیل را مشخص می کند. این پتانسیل به ویژه برای توصیف برهمکنش نوترون و پروتون مورد استفاده قرار می گیرد.

### ۳. معادله شرودینگر برای پتانسیل نمایی

معادله شرودینگر مستقل از زمان برای یک پتانسیل دلخواه  $V(\vec{r})$  به صورت زیر بیان می شود [۲۴-۲۶]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) = [E - V(\vec{r})] \psi(\vec{r}). \quad (11)$$

برای پتانسیل دارای تقارن کروی، تابع موج  $\psi(\vec{r})$  را می توان به دو بخش مداری و زاویه ای به صورت زیر، مجزا کرد:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{r} R_\ell(r) Y_m^\ell(\theta, \phi) \quad (12)$$

انتخاب کوچکترین  $q$  کمترین ارتفاع سد پتانسیل به دست می‌آید. با قراردادن این مقادیر در رابطه (۲۲) عمق چاه پتانسیل  $V_0 = 179 \text{ MeV}$  می‌شود. جدول (۱) مقادیر عددی دیگری را که با همین روش به دست آمده‌اند نشان می‌دهد.

برای محاسبه ضریب  $C_1$  از شرط بهنجارش زیر برای تابع موج (۲۰) و (۱۹) استفاده می‌شود:

$$\int_0^\infty dr |\psi(r)|^2 r^2 = \int_0^1 dy \frac{y^a}{y} |R(y)|^2 = 1, \quad (23)$$

که در این صورت داریم:

$$C_1 = \left(\frac{2}{p}\right)^q \frac{\Gamma(1+q)\sqrt{q}}{\left(ahy \left(\left[q, q + \frac{1}{2}\right], [1+q, 1+q, 1+2q], -p^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (24)$$

که  $hy$  تابع فوق هندسی<sup>۱</sup> است.

نمودار تابع موج  $(\psi)^2$  بر حسب  $r$  در نمودار شکل ۱ رسم شده است. در این نمودار هم‌چنین نمایی از تابع  $(R)^2$  بر حسب  $y$  وجود دارد. در رسم این شکل از مقادیر ردیف دوم جدول ۱ استفاده شده است.

#### ۴. محاسبه تصحیح طیف انرژی دوترون

در قسمت قبل مقدار ویژه و توابع ویژه حالت پایه را برای حالت مقید دوترون به دست آوردیم. حال به محاسبه تصحیح انرژی حالت پایه آن می‌پردازیم. بدین منظور باید از رابطه (۹) استفاده شود، و باید مقادیر انتظاری  $\langle V \rangle$  و  $\langle V^2 \rangle$  را محاسبه کنیم. برای محاسبه  $\langle V \rangle$  انتگرال زیر باید محاسبه شود:

$$\langle V \rangle = \int_0^\infty dr r^2 (\psi(r)) V(r) = \int_0^1 dy \frac{y^a}{y} (R(y))^2 V(r). \quad (25)$$

با اعمال تغییر متغیر (۱۵) در پتانسیل (۱۲) داریم:

$$V(y) = -V_0 y^2, \quad (26)$$

با قرار دادن تابع موج (۱۹) و پتانسیل (۲۶) در رابطه (۲۵) به نتیجه زیر می‌رسیم:

معادله (۱۶) معادله دیفرانسیل بسل است و جوابش به صورت زیر است:

$$R(y) = C_1 J_q(py) + C_2 J_{-q}(py), \quad (18)$$

که  $J_q$  و  $J_{-q}$  به ترتیب توابع بسل نوع اول و نوع دوم و ضرایب  $C_1$  و  $C_2$  ثوابت انتگرال‌گیری هستند. طبق رابطه (۱۵) در حد  $r \rightarrow \infty$  که داریم  $y = 0$ ، باید  $R$  محدود باشد. از این رو  $C_2 = 0$  و فقط توابع بسل نوع اول مورد قبول هستند و بنابراین تابع موج به صورت زیر درمی‌آید:

$$R(y) = C_1 J_q(py), \quad (19)$$

و یا با توجه به روابط (۱۲) و (۱۵):

$$\psi(r) = \frac{C_1}{r} J_q\left(pe^{-r/2a}\right), \quad (20)$$

هم‌چنین در حد  $r = 0$ ، که طبق رابطه (۱۵) داریم  $y = 1$ ، تابع موج  $\psi$  باید محدود باشد. برای فراهم‌شدن این محدودیت، شرط زیر را بر روی تابع بسل (۱۹) در  $y = 1$  اعمال می‌کنیم:

$$J_q(p) = 0. \quad (21)$$

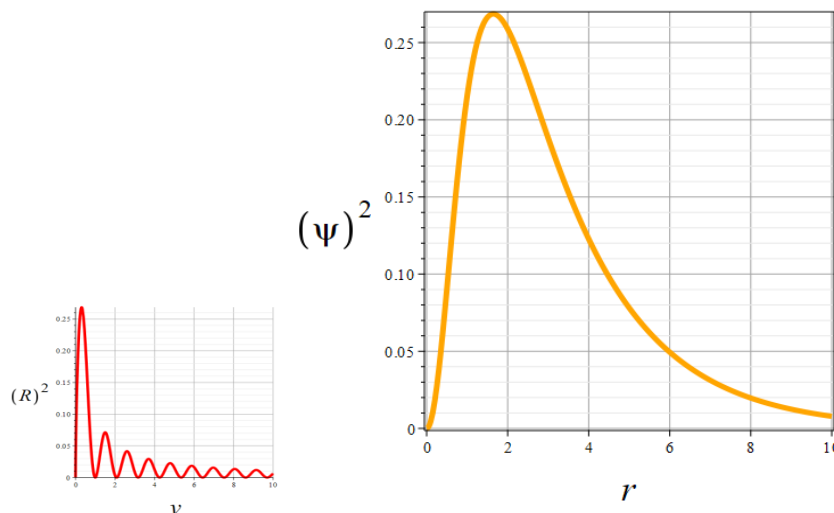
با انتخاب هر مقدار برای پارامتر  $q$  می‌توان با توجه به ریشه‌های رابطه (۲۱)، مقادیری را برای پارامتر  $p$  پیدا کرد.

برای انتخاب مقدارهای مناسب از پارامترهای مسئله دقت می‌کنیم که طبق آزمایش‌های انجام‌شده، یک حالت مقید پایه با انرژی بستگی  $E = -2/23 \text{ MeV}$  برای دوترون موجود است. با استفاده از این مقدار انرژی پایه، مطابق تعاریف (۱۷) داریم:

$$q = 0/46a, \quad V_0 = 2/23 \frac{p^2}{q}. \quad (22)$$

در این رابطه  $a$  بر حسب واحد  $fm$  و  $V_0$  بر حسب  $\text{MeV}$  است. برای محاسبه روابط (۲۲) از مقادیر عددی:  $\hbar c = 197/3 \text{ MeV} \cdot fm$  و  $m_n = 938/3 \text{ MeV}$  استفاده شده است. برای استفاده از رابطه (۲۲)، ابتدا مقداری را به  $a$  اختصاص می‌دهیم و سپس  $q$  به دست می‌آید. آنگاه با معلوم بودن  $q$ ، مقدار مناسب  $p$  با استفاده از رابطه (۲۱)، حساب می‌شود. سپس با دانستن  $q$  و  $p$  عمق چاه پتانسیل  $V_0$  تعیین می‌شود. به عنوان مثال برای  $a = 0/7 \text{ fm}$ ، طبق رابطه (۲۲) داریم  $q = 0/32$  و از رابطه (۲۱) مقادیر متفاوتی برای  $p$  به دست می‌آید که کوچک‌ترین آنها  $p \approx 2/89$  است. در واقع با

۱. Hypergeometric function



شکل ۱. نمودار تابع موج به ازای مقادیر ردیف اول جدول ۱.

جدول ۱.

(a) fm	q	p	V <sub>0</sub> (MeV)	$\Delta E_n^{(1)} \times 10^{-3} \beta_s$ (MeV)
۰/۲	۰/۰۹	۲/۵۵	۱۷۰۷	۴۰/۸
۰/۴	۰/۱۸	۲/۶۸	۴۷۴	۶/۵۰
۰/۷	۰/۳۲	۲/۸۹	۱۷۹	۱/۷۱
۱	۰/۴۶	۳/۰۸	۱۰۰	۰/۸۰
۱/۲	۰/۵۵	۳/۲۲	۷۵/۷	۰/۵۷
۱/۴	۰/۶۴	۳/۳۴	۶۰	۰/۴۳

است. حال با جای‌گذاری (۲۷) و (۲۹) در رابطه (۹) تصحیح انرژی حالت پایه به دست می‌آید. با توجه به رابطه (۲)، رابطه (۹) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\Delta E_n^{(1)} = \frac{m_n c^2}{(M_p c^2)^2} \left[ (\Delta E_n^{(0)}) - 2E_n^{(0)} \langle V \rangle + \langle V^2 \rangle \right], \quad (30)$$

به طوری که  $\langle V \rangle$  و  $\langle V^2 \rangle$  به ترتیب از روابط (۲۷) و (۲۹) داده شده‌اند. در رابطه (۳۰) تصحیح انرژی حالت پایه دوترون داده شده است که برابر  $E_n^{(0)} = 2/3 \text{ MeV}$  است. همچنین جرم پلانک برابر  $M_p c^2 = 1/22 \times 10^{22} \text{ MeV}$  است. با قرار دادن این مقادیر در رابطه (۳۰)، تصحیح مرتبه اول انرژی حالت

$$\langle V \rangle = -\frac{a C_1 V_0}{p} \left[ J_q(p)^2 p - 2J_q(p) J_{q+1}(p) q + J_{q+1}(p)^2 p \right]. \quad (27)$$

مقدار انتظاری  $\langle V^2 \rangle$  هم با استفاده از انتگرال زیر به دست می‌آید:

$$\langle V^2 \rangle = \int_0^1 dy \frac{2a}{y} (R(y))^2 (V(y))^2, \quad (28)$$

که با قرار دادن روابط (۱۹) و (۲۶) در آن به شکل ساده شده زیر در می‌آید:

$$\langle V^2 \rangle = a \left( \frac{p}{r} \right)^q C_1 V_0^2 \frac{hy \left( \left[ 2+q, +\frac{1}{r} \right]; [1+q, 1+2q, 3+q], -p^2 \right)}{(2+q)\Gamma(1+q)^2}. \quad (29)$$

در روابط (۲۷) و (۲۹) ضریب  $C_1$  با رابطه (۲۴) داده شده

این مقاله به بررسی اثرات این اصل تعمیم یافته بر طیف انرژی پتانسیل نمایی پرداخته شده است. ابتدا ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی پتانسیل نمایی به صورت تحلیلی معرفی شدند. سپس با اعمال یک روش اختلالی تصحیحات انرژی پتانسیل نمایی به دست آمدند.

علاوه بر کاربردهای بسیار پتانسیل نمایی، این پتانسیل برای توصیف حالت مقید دوترون مناسب است. به ویژه که در مدل دوترون ترازهای پایین انرژی مورد نظر و کاربردی هستند. با نتایج به دست آمده برای تصحیح طیف انرژی پتانسیل نمایی، طیف انرژی پتانسیل حالت مقید دوترون به صورت تحلیلی به دست آمد. چنانچه مطابق فرض اولیه  $\beta_0 \approx 1$  فرض کنیم، این تصحیحات بسیار کوچک می‌شوند. اما اگر حدهای بالای دیگری را برای این ثابت نظریه بپذیریم، آنگاه تصحیحات قابل اندازه گیری می‌شوند. حد بالای پیش بینی شده در اینجا با توجه به دقت فعلی اندازه گیری طیف انرژی دوترون معرفی شد که در حدود مقدار تخمینی با استفاده از اثر تونل زنی الکترونی است و بسیار بهتر از مقادیر ارائه شده از روش های دیگر است. با این وجود، امید می‌رود که با پیشرفت فناوری و بالا رفتن دقت اندازه گیری در آزمایش‌ها، بتوانیم این اثرات را مشاهده کنیم.

پایه دوترون به دست می‌آید. نتایج در جدول ۱ ذکر شده است. در این جدول پارامترهای مسئله که برای سه مقدار متفاوت از  $a$  محاسبه شده، نمایش داده شده است. مطابق این جدول، میانگین تصحیح انرژی با اعمال اثرات گرانش کوانتمی به مقدار زیر است:

$$\Delta E_0^{(1)} = 1/47 \times 10^{-38} \beta_0 \text{ MeV}, \quad (31)$$

اگر در رابطه فوق  $\beta_0 \approx 1$  فرض کنیم، این تصحیح انرژی بسیار کوچک می‌شود. اما در تحقیقات انجام شده مقادیر دیگری نیز برای  $\beta_0$  پیشنهاد شده است، به عنوان مثال می‌توان مقادیر مندرج در مرجع [۹] را مشاهده کرد. چنانچه دقت اندازه گیری انرژی  $E_0^{(1)}$  را از درجه  $10^{-8}$  فرض کنیم، آنگاه چنانچه  $\beta_0 \approx 10^{30}$  باشد، تصحیح انرژی (۴۳) به خوبی قابل اندازه گیری می‌شود. این تخمین در حدود مقدار پیش بینی شده  $\beta_0$  برای پدیده تونل زنی الکترونی است [۱۱]. همچنین، این تخمین برای  $\beta_0$  از تخمین انجام شده در مرجع [۲۲] در مورد تصحیح ترازهای انرژی نوسانگر مورس و یا تصحیحات ترمودینامیکی [۳۱-۳۴] بهتر است.

## ۵. نتایج

وجود کمینه طول موجب تصحیح و تعمیم اصل عدم قطعیت هایزنبرگ معمول می‌شود. در چارچوب این اصل عدم قطعیت تعمیم یافته، هامیلتونی سیستم‌های فیزیکی تصحیح می‌شود. در

## مراجع

1. S Hossenfelder, *Living Rev. Relativ.* **16**, 1 (2013) 2.
2. L J Garay, *Int. J. Mod. Phys. A* **10** (1995) 145.
3. D J Gross and P F Mende, *Nucl. Phys. B* **303** (3) (1988) 407.
4. T Yoneya, *Mod. Phys. Lett. A* **4** (1989) 1587.
5. R Lafrance and R C Myers, *Phys. Rev. D* **51**, 6 (1995) 2584.
6. F Scardigli, *Phys. Lett. B* **452**, 1-2 (1999) 39.
7. G M Hossain, V Husain, and S S Seahra, *Class. Quantum Grav.* **27**, 16 (2010) 165013.
8. A Kempf, G Mangano, and R B Mann, *Phys. Rev. D* **52**, 2 (1995) 1108.
9. I Pikovski, *et al.*, *Nature Phys.* **8** (2012) 393.
10. S Benczik, *et al.*, *Phys. Rev. A* **72**, 1 (2005) 012104.
11. S Das and E C Vagenas, *Rev. Lett.* **101**, 22 (2008) 221301.
12. F Brau, *J. Phys. A- Math. Gen.* **32**, 44 (1999) 7691.
13. B Mu, *J. Mod. Phys.* **4**, 5 (2013) 29.
14. M M Khalil, *Adv. High Energy Phys.* **2014** (2014) 619498.
15. B. Mu, R. Yu, and D. Wang, *J. High Energy Phys. Gravitation and Cosmology* **5** (2019) 279.

16. I Dadić, L Jonke, and S. Meljanac, *Phys. Rev. D* **67**, 8 (2003) 087701.
17. T V Fityo, I O Vakarchuk, and V. M. Tkachuk, *J. Phys. A-Math. Gen.* **39**, 9 (2006) 2143.
18. P Pedram, *Europhys. Lett. (EPL)* **101**, 3 (2013) 30005.
19. H Hassanabadi, *et al.*, *Adv. High Energy Phys.* **2013** (2013) 923686.
20. D Bouaziz, and M. Bawin, *Phys. Rev. A* **76**, 3 (2007) 032112.
21. D Bouaziz, *Ann. Phys.* **355** (2015) 269.
22. S Miraboutalebi, *Ann. Phys.* **422** (2020) 168307.
23. S Flügge, “*Practical Quantum Mechanics*” Springer, Berlin, (1974).
24. S Miraboutalebi and L Rajaei, *J. Math. Chem.* **52**, 4 (2014) 1119.
25. S Miraboutalebi, *Chin. Phys. B* **25**, 10 (2016) 100301.
26. S Miraboutalebi, *J. Theor. Appl. Phys.* **10**, 4 (2016) 323.
27. A Kamal, “*Nuclear Physics*”, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2014).
28. S Miraboutalebi and L. F. Matin, *Can. J. Phys.* **93**, 5 (2015) 574.
29. L F Matin and S Miraboutalebi, *Physica A: Stat. Mech. Appl.* **425** (2015) 10.
30. M Mirtorabi, *et. al.*, *Physica A: Stat. Mech. Appl.* **537** (2020) 122787.
31. M Mirtorabi, *et. al.*, *Physica A: Stat. Mech. Appl.* **506** (2018) 602.