مجلۀ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۲۲، شمارۀ ۴، زمستان ۱۴۰۱
DOI: 10.47176/ijpr.22.4.61469

تحول کاهش یافته کاملاً مثبت با حالت‌های اولیۀ نامارکوفی

سمیرا نظیف کار* و ایمان سرگلزهی

گروه فیزیک، دانشگاه نیشابور، نیشابور

پست الکترونیکی: nazifkar@neyshabur.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۰۳/۲۹ ؛ دریافت نسخۀ نهایی: ۱۴۰۱/۰۸/۰۱)

چکیده

سامانۀ S، در حال برهم کنش با محیط E، و همچنین زیرفضای کمکی R را در نظر بگیرید. تحول کاهش یافتۀ سامانه را می‌توان به صورت نگاشتی کاملا مثبت بیان کرد، اگر مجموعه حالات اولیه سامانه-محیط $\boldsymbol{S}=\{\rho_{SE}\}$ را بتوان به صورت یک مجموعه هدایت شده از یک حالت مارکوف سه جزئی τ_{RSE} بیان کرد. ما در این مقاله ρ_{SE}های هدایت شده از یک حالت مارکوف τ_{RSE} را حالات *مارکوفی* می‌نامیم و در قالب یک مثال فیزیکی نشان می‌دهیم که تحول کاهش یافته سامانه، حتی برای حالات اولیه سامانه-محیط ρ_{SE} نامارکوفی هم، ممکن است به صورت کاملا مثبت قابل بیان باشد.

واژه‌های کلیدی: سامانۀ کوانتومی باز، نگاشت کاملاً مثبت، حالت مارکوف

۱. مقدمه

تحول زمانی یک سامانۀ بسته (منزوی) کوانتومی به صورت یکانی قابل بیان است:

$$\rho' = U\rho U^{\dagger} \ , \quad U^{\dagger}U = I, \tag{۱}$$

که عملگرهای چگالی ρ و ρ'، به ترتیب، حالات اولیه و نهایی سامانه، U عملگر یکانی تحول زمانی و I هم عملگر همانی هستند [۱]. در حالت کلی، سامانۀ S منزوی نیست و در حال برهم‌کنش با محیط E است. می‌توان مجموعۀ سامانه-محیط را به عنوان یک سامانۀ بسته در نظر گرفت که تحول آن با رابطۀ (۱) بیان می‌شود. بنابراین عملگر چگالی کاهش یافتۀ نهایی سامانه با رابطۀ زیر داده می‌شود:

$$\rho'_S = Tr_E(U\rho_{SE}U^{\dagger}) \ , \quad U^{\dagger}U = I_{SE} \ , \tag{۲}$$

که ρ_{SE} حالت اولیه سامانه-محیط، U عملگر تحول زمانی کل سامانه-محیط و I_{SE} هم عملگر همانی روی کل SE است [۱].

چنان که مشهور است، اگر مجموعۀ حالات اولیۀ سامانه-محیط به شکل

$$\boldsymbol{S} = \{\ \rho_{SE}\ \} = \{\ \rho_S \otimes \tilde{\sigma}_E\ \}\ , \tag{۳}$$

باشد، که ρ_S حالتی دلخواه از سامانه و $\tilde{\sigma}_E$ حالتی ثابت از محیط هستند، آنگاه تحول کاهش یافتۀ سامانه، برای هر U دلخواه، به صورت کاملاً مثبت قابل بیان است. یعنی حالت نهایی سامانه، در رابطۀ (۲)، با عبارتی به شکل زیر داده می‌شود:

$$\rho'_S = \sum_i F_i \rho_S F_i^{\dagger} \ , \quad \sum_i F_i^{\dagger} F_i = I_S \ , \tag{۴}$$

که $\rho_S = Tr_E(\rho_{SE})$ حالت اولیۀ سامانه، F_iها عملگرهایی

خطی و I_S عملگر همانی روی فضای هیلبرت S هستند [۱]. در نظریهٔ سامانه‌های کوانتومی باز نیز، برای به دست آوردن معادلهٔ حاکم[۱]، حالت اولیهٔ سامانه-محیط (در واقع حالت سامانه-محیط در هر لحظه از زمان) را به شکل رابطهٔ (۳) در نظر می‌گیرند (تقریب می‌زنند) [۲ و ۳].

علاوه بر مجموعهٔ $\boldsymbol{S}$ در رابطهٔ (۳)، می‌توان مجموعه‌های دیگری از حالات اولیهٔ سامانه-محیط را نیز یافت که برای آنها هم تحول کاهش یافتهٔ سامانه، برای هر U دلخواه، همواره کاملاً مثبت است [۴-۹]. نکتهٔ جالب این که تمام این مجموعه‌ها، از جمله مجموعهٔ رابطهٔ (۳)، را می‌توان به صورت مجموعه‌های *هدایت شده*[۲] از یک حالت *مارکوف* سه جزئی τ_{RSE}، که R مشخص کننده یک زیرفضای کمکی است، بیان کرد [۸ و ۹]. ما این موضوع را در بخش بعدی به نحو مفصل‌تری مرور خواهیم کرد.

ما در این مقاله حالت‌های ρ_{SE} هدایت شده از یک حالت مارکوف τ_{RSE} را حالت‌های مارکوفی می‌نامیم. حال این سؤال پیش می‌آید که آیا برای حالت‌های اولیهٔ سامانه-محیط ρ_{SE} که مارکوفی نیستند هم می‌توان تحول کاهش یافته سامانه را به صورت کاملاً مثبت بیان کرد یا خیر؟ پاسخ این سؤال مثبت است اگر که، به جای کل تحول‌های یکانی U ممکن برای سامانه-محیط، خود را محدود به رده‌ای خاص از Uها کنیم [۱۰-۱۲]. این موضوع را نیز در بخش سوم این مقاله مرور خواهیم کرد.

مثال‌های در نظر گرفته شده در مراجع [۱۰-۱۲] هر چند که امکان تحول کاهش یافتهٔ کاملاً مثبت با حالات اولیه ρ_{SE} نامارکوفی را نمایش می‌دهند، ولی معطوف به یک وضعیت فیزیکی روشن نیستند. هدف مقالهٔ حاضر بررسی و نشان دادن همین نتیجه در قالب یک مثال فیزیکی روشن، یعنی مدل جینز-کامینگز برای برهم کنش اتم-فوتون [۱۳]، است. این کار در بخش‌های چهارم و پنجم انجام خواهد شد، و مقاله را در بخش ششم با جمع بندی به پایان خواهیم برد.

۱. Master equation
۲. Steered

۲. حالت‌های مارکوف و تحول کاملاً مثبت

فرض کنیم که فضای هیلبرت سامانهٔ S را بتوان به صورت جمع مستقیم فضاهای هیلبرت $S_j = S_j^l \otimes S_j^r$ در نظر گرفت. یعنی، مجموعه بردارهای پایهٔ فضای هیلبرت S از اجتماع مجموعهٔ بردارهای پایهٔ همه S_jها به دست می‌آید. S_jها نیز از ضرب تانسوری فضاهای هیلبرت S_j^l و S_j^r به دست می‌آیند، که l و r، به ترتیب، نمایشگر چپ و راست هستند. بعد فضاهای هیلبرت S_j^l و S_j^r نیز، هر چند متناهی، ولی، در حالت کلی، دلخواه است.

اکنون می‌توانیم تعریف یک حالت (عملگر چگالی) مارکوف را بیان کنیم. حالت سه جزئی τ_{RSE} را یک حالت مارکوف گویند، اگر که برای آن بسطی به شکل زیر وجود داشته باشد [۱۴]:

$$\tau_{RSE} = \sum_j \lambda_j \tau_{RS_j^l} \otimes \tau_{S_j^r E} \,, \tag{۵}$$

در عبارت فوق، $\{\lambda_j\}$ یک توزیع احتمال است ($\lambda_j \geq 0,\ \sum_j \lambda_j = 1$). $\tau_{RS_j^l}$ ($\tau_{S_j^r E}$) نیز یک عملگر چگالی در فضای هیلبرت $R \otimes S_j^l$ ($S_j^r \otimes E$) است.

مجموعهٔ $\boldsymbol{S}$ هدایت شده از حالت سه جزئی τ_{RSE} نیز به شکل زیر تعریف می‌شود [۸، ۹ و ۱۵]:

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \frac{Tr_R\left[\left(P_R \otimes I_{SE}\right)\tau_{RSE}\right]}{Tr\left[\left(P_R \otimes I_{SE}\right)\tau_{RSE}\right]} \right\}, \tag{۶}$$

که P_R عملگر مثبت دلخواهی در فضای R است، به نحوی که $Tr\left[\left(P_R \otimes I_{SE}\right)\ \tau_{RSE}\right] \neq 0$. در عبارت فوق، P_R را می‌توان، تا حد یک ضریب مثبت، عنصری دلخواه از یک POVM [۱] در نظر گرفت. بنابراین، می‌توان $\boldsymbol{S}$ را مجموعهٔ حاصل از انجام تمام اندازه‌گیری‌های POVM ممکن، روی جزء R از حالت سه جزئی τ_{RSE}، در نظر گرفت.

حال، با استفاده از روابط (۵) و (۶)، می‌توان دید که مجموعهٔ $\boldsymbol{S}$، هدایت شده توسط یک حالت سه جزئی τ_{RSE} مارکوف، شامل عناصری به شکل زیر است:

$$\rho_{SE} = \sum_j p_j \rho_{S_j^l} \otimes \tau_{S_j^r E} \,, \tag{۷}$$

که $\{p_j\}$ یک توزیع احتمال است و $\rho_{S_j^l}$ نیز یک عملگر

چگالی در فضای هیلبرت S_j^l است. دقت شود که در رابطهٔ فوق، $\rho_{S_j^l}$ و p_j، با تغییر P_R در رابطهٔ (۶)، در حالت کلی، تغییر می‌کنند، ولی $\tau_{S_j^r E}$ ثابت باقی می‌ماند. ما، در این مقاله، حالت‌های سامانه-محیط ρ_{SE} را که بتوان به صورت رابطهٔ (۷)، یعنی به صورت عضوی از یک مجموعهٔ $\boldsymbol{S}$ هدایت شده از یک حالت مارکوف سه جزئی ثابت τ_{RSE} در رابطهٔ (۵)، نوشت حالت‌های مارکوفی می‌نامیم.

به عنوان یک مثال، وضعیتی را در نظر بگیرید که جمع‌بندی روی j، در رابطهٔ (۵)، فقط شامل یک عنصر است، یعنی: $S = S^l \otimes S^r$. همچنین، فرض کنید که S^r یک فضای هیلبرت تک بعدی (بی اهمیت) است و لذا $S^l = S$. بنابراین، حالت مارکوف τ_{RSE}، در رابطهٔ (۵)، به شکل زیر در می‌آید:

$$\tau_{RSE} = \tau_{RS} \otimes \tau_E \,. \qquad (۸)$$

اکنون، اگر مجموعهٔ هدایت شده از این حالت مارکوف τ_{RSE} را، طبق روابط (۶) و (۷)، بسازیم، به مجموعه رابطهٔ (۳) خواهیم رسید، که $\tilde{\sigma}_E = \tau_E$.

همچنان که در بخش مقدمه گفته شد، علاوه بر مجموعهٔ حالت‌های سامانه-محیط (۳)، سایر مجموعه‌های $\boldsymbol{S}$ را، که برای آنها تحول کاهش یافتهٔ سامانه، برای هر U دلخواه، به صورت کاملاً مثبت قابل بیان است، نیز می‌توان به صورت یک مجموعهٔ هدایت شده از یک حالت مارکوف τ_{RSE}، یعنی به صورت رابطهٔ (۷)، بیان کرد [۸ و ۹].

به عنوان آخرین مطلب این بخش، این نکته را نیز اضافه می‌کنیم که، بر خلاف ρ_{SE}های مجموعهٔ (۳)، که به شکل حاصل‌ضربی (حاصل‌ضرب ρ_S در $\tilde{\sigma}_E$) هستند، عناصر مجموعهٔ (۷) ممکن است شامل همبستگی های کلاسیکی و کوانتومی، و حتی درهم‌تنیدگی، بین سامانه و محیط نیز باشند [۸].

۳. تحول کاملاً مثبت با حالت‌های اولیهٔ نامارکوفی

تحول کاهش یافتهٔ سامانه، در حالت کلی، کاملاً مثبت نیست [۱۶]. چنان که در بخش قبل بیان شد، تحول کاهش یافتهٔ سامانه، برای هر تحول یکانی دلخواه سامانه-محیط U، به شکلی کاملاً مثبت قابل بیان است، اگر و فقط اگر، مجموعه حالات اولیهٔ سامانه-محیط $\boldsymbol{S}$ به صورت یک مجموعهٔ هدایت شده از یک حالت مارکوف سه جزئی τ_{RSE} قابل بیان باشد [۸ و ۹].

بنابراین، اگر به جای در نظر گرفتن کل Uهای ممکن، فقط ردهٔ خاصی از Uها را در نظر بگیریم، انتظار داریم که تحول کاهیدهٔ کاملاً مثبت، برای مجموعه‌های $\boldsymbol{S}$ شامل ρ_{SE}های نامارکوفی هم ممکن باشد.

ساده‌ترین مثال مربوط به زمانی است که خود را محدود به Uهایی به شکل $U = U_S \otimes U_E$، یعنی حاصل‌ضرب یک فرایند یکانی U_S روی سامانه در یک فرایند یکانی U_E روی محیط، کنیم [۱۲]. در این صورت، به سادگی می‌توان نشان داد که تحول کاهش یافتهٔ سامانه، برای هر ρ_{SE} دلخواه، خواه مارکوفی یا نامارکوفی، کاملاً مثبت و در واقع یکانی است.

یک مثال دیگر در مرجع [۱۱] بررسی شده است. در این مثال، *نگاشت ارجاع*[۱] [۱۷ و ۱۸] نگاشتی نامثبت است و درنتیجه مجموعه حالات اولیهٔ سامانه-محیط $\boldsymbol{S}$ قابل هدایت از تک حالت مارکوف τ_{RSE} نیست [۱۱ و ۱۵]. حال می‌توان نشان داد که، برای این $\boldsymbol{S}$ نامارکوفی، تحول کاهش یافتهٔ سامانه، برای هر تحول یکانی U که بعد سامانه و محیط را عوض نمی‌کند، کاملاً مثبت است [۱۱].

یک وضعیت دیگر، که در مرجع [۱۰] بررسی شده است، مربوط به زمانی است که هر چند نگاشت ارجاع کاملاً مثبت است، ولی مجموعه حالات اولیهٔ سامانه-محیط، به جای (۶)، به شکل زیر است:

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \rho_{SE} + Y,\ \rho_{\mathrm{SE}} = \frac{Tr_R\left[(P_R \otimes I_{SE})\tau_{RSE}\right]}{Tr\left[(P_R \otimes I_{SE})\tau_{RSE}\right]} \right\}, \qquad (۹)$$

که Y عملگری هرمیتی روی SE است، به نحوی که $Tr_E(Y) = ۰$، و τ_{RSE} یک حالت مارکوف است. یعنی، مجموعهٔ $\boldsymbol{S}$ شامل حالت‌های سامانه-محیط $\sigma_{SE} = \rho_{SE} + Y$ است که هرچند ρ_{SE} مارکوفی است، ولی σ_{SE}، در حالت کلی، نامارکوفی است.

۱. Assignment map

اگر تحول کاهش یافتهٔ سامانه، برای هر U دلخواه، به صورت کاملاً مثبت قابل بیان بود، در این صورت Y در رابطهٔ (۹) صفر می‌بود [۱۷] و $\sigma_{SE} \in \boldsymbol{S}$ها حالاتی مارکوفی می‌بودند. اما اگر تحول کاهیده، فقط برای ردهٔ خاصی از Uها کاملاً مثبت باشد، در این صورت Y ممکن است ناصفر باشد و بالتبع $\sigma_{SE} \in \boldsymbol{S}$، در حالت کلی، نامارکوفی خواهد بود.

مثال‌هایی، برای نمایش وضعیت اخیر، در مرجع [۱۰] آمده است، لیکن، این مثال‌ها معطوف به یک وضعیت فیزیکی روشن نیستند. در دو بخش آتی، بنا داریم تا به عنوان کار اصلی این مقاله، با در نظر گرفتن یک مثال فیزیکی، یعنی تحول یکانی U ناشی از هامیلتونی جینز-کامینگز، و مجموعه $\boldsymbol{S}$ی به شکل (۹)، نشان دهیم که تحول کاهیدهٔ کاملاً مثبت، با حالات اولیهٔ نامارکوفی $\sigma_{SE} \in \boldsymbol{S}$ هم ممکن است.

۴. مدل جینز-کامینگز: ویژه حالات، ویژه مقادیر و عملگر تحول زمانی

سامانهٔ مورد نظر یک اتم دو ترازه است که در یک کاواک با تک مد گیر افتاده است و با فوتون‌های درون کاواک برهم‌کنش می‌کند. بنابراین، فوتون‌های درون کاواک نقش محیط را در مسئلهٔ ما بازی می‌کنند. وضعیتی را در نظر می‌گیریم که در کاواک حداکثر j فوتون می‌تواند وجود داشته باشد. حالت‌های مختلف که نشان‌دهندهٔ تعداد فوتون‌های موجود در کاواک هستند را با $|0\rangle$، $|1\rangle$، ... و $|j\rangle$ نشان می‌دهیم. حالات پایه و برانگیختهٔ اتم گیرافتاده در کاواک نیز با $|-\rangle$ و $|+\rangle$ نشان داده می‌شوند. هامیلتونی توصیف کنندهٔ تحول کل سامانه و محیط، هامیلتونی مدل جینز-کامینگز است [۱۳]:

$$H = \omega\, I_S \otimes a^{\dagger} a + \frac{\omega_{\circ}}{2}\sigma_Z \otimes I_E + g\,(\sigma^{+} \otimes a \;+\; \sigma^{-} \otimes a^{\dagger}\,), \tag{۱۰}$$

در این رابطه $a^{\dagger}$ و a، به ترتیب، عملگرهای خلق و نابودی فوتون، σ^{+} و σ^{-} عملگرهای بالابرنده و پایین‌آورندهٔ حالت اتم، و σ_Z نیز عملگر پائولی هستند. همچنین، ضریب g میزان قدرت برهم کنش سامانهٔ اتم دو ترازه با محیط، یعنی همان فوتون‌های درون کاواک، را مشخص می‌کند. در ادامه، حالت تشدید، یعنی $\omega = \omega_0$، را در نظر خواهیم گرفت.

با توجه به این که بیشینه تعداد فوتون‌های درون کاواک را برابر با j در نظر گرفته ایم، عناصر پایهٔ فضای کل سامانه-محیط به صورت زیر خواهند بود:

$$|-, 0\rangle,\ |-, 1\rangle,\ |+, 0\rangle,\ |-, 2\rangle,\ |+, 1\rangle,\ \cdots,\ |-, j\rangle,\ |+, j-1\rangle\ , \tag{۱۱}$$

ملاحظه می‌کنیم که بعد فضای هیلبرت کل سامانه-محیط برابر $2j+1$ است. توجه شود که جملهٔ سطر دوم در هامیلتونی رابطهٔ (۱۰)، حالت $|+, j\rangle$ را به حالت $|-, j+1\rangle$ جفت می کند. بنابراین، از آنجا که خود را به وضعیتی محدود کرده‌ایم که تعداد فوتون‌های درون کاواک، در طول زمان، از j فراتر نمی‌رود، کت پایهٔ $|+, j\rangle$ را در مجموعهٔ (۱۱) وارد نکرده ایم.

هامیلتونی، در رابطهٔ (۱۰)، را می‌توان به شکل زیر نیز بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{-\omega_0}{2}|-, 0\rangle\langle -, 0| \\ & + \sum_{i=1}^{j} \omega_0\left(i-\frac{1}{2}\right) \\ & \left(|+, i-1\rangle\langle +, i-1| + |-, i\rangle\langle -, i|\right) \\ & + \sum_{i=1}^{j} g\sqrt{i}\ \left(|+, i-1\rangle\langle -, i| + |-, i\rangle\langle +, i-1|\right), \end{aligned} \tag{۱۲}$$

که نمایش ماتریسی آن به شکل زیر است:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{-\omega_0}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{\omega_0}{2} & g & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & g & \frac{\omega_0}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3\omega_0}{2} & \sqrt{2}g & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}g & \frac{3\omega_0}{2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{۱۳}$$

ویژه مقادیر و ویژه کت‌های هامیلتونی هم عبارتند از:

$$\begin{aligned} & E_1 = \frac{-\omega_0}{2}, \qquad |\psi_1\rangle = |-, 0\rangle, \\ & E_{2i} = \left(i-\frac{1}{2}\right)\omega_0 - \sqrt{i}g, \\ & |\psi_{2i}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|-, i\rangle - |+, i-1\rangle\right), \\ & E_{2i+1} = \left(i-\frac{1}{2}\right)\omega_0 + \sqrt{i}g \\ & |\psi_{2i+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|-, i\rangle + |+, i-1\rangle\right), \end{aligned} \tag{۱۴}$$

که $i = 1, 2, \ldots, j$.

عملگر تحول زمانی یکانی کل سامانه-محیط، برحسب ویژه کت‌های هامیلتونی، به شکل زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
U(t) &= e^{-iHt} \\
&= e^{-iE_1 t}\left|\psi_1\right\rangle\left\langle\psi_1\right| \\
&\quad + \sum_{i=1}^{j} e^{-iE_{2i}t}\left|\psi_{2i}\right\rangle\left\langle\psi_{2i}\right| \\
&\quad + \sum_{i-1}^{j} e^{-iE_{2i+1}t}\left|\psi_{2i+1}\right\rangle\left\langle\psi_{2i+1}\right|,
\end{aligned}
\qquad (۱۵)
$$

که نمایش ماتریسی آن به شکل زیر است:

$$
U(t)=\begin{pmatrix}
e^{\frac{i\omega_0 t}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & e^{\frac{-i\omega_0 t}{2}}\cos(gt) & -ie^{\frac{-i\omega_0 t}{2}}\sin(gt) & 0 & 0 & \cdots \\
0 & -ie^{\frac{-i\omega_0 t}{2}}\sin(gt) & e^{\frac{-i\omega_0 t}{2}}\cos(gt) & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & e^{\frac{-3i\omega_0 t}{2}}\cos(\sqrt{2}gt) & -ie^{\frac{-3i\omega_0 t}{2}}\sin(\sqrt{2}gt) & \cdots \\
0 & 0 & 0 & -ie^{\frac{-3i\omega_0 t}{2}}\sin(\sqrt{2}gt) & e^{\frac{-3i\omega_0 t}{2}}\cos(\sqrt{2}gt) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}.
\qquad (۱۶)
$$

۵. تحول کاهیدهٔ کاملاً مثبت با حالتهای اولیهٔ نامارکوفی در مدل جینز-کامینگز

کلی‌ترین عملگر هرمیتی Y را با استفاده از عناصر پایهٔ تعریف شده در رابطهٔ (۱۱)، می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$
\begin{aligned}
Y &= c_{1,1}\left|-,0\right\rangle\left\langle -,0\right| \\
&+ \sum_{k=1}^{j}\left(c_{1,2k}\left|-,0\right\rangle\left\langle -,k\right| + c_{1,2k+1}\left|-,0\right\rangle\left\langle +,k-1\right|\right) \\
&+ \sum_{k=1}^{j}\left(c_{2k,1}\left|-,k\right\rangle\left\langle -,0\right| + c_{2k+1,1}\left|+,k-1\right\rangle\left\langle -,0\right|\right) \\
&+ \sum_{l=1}^{j}\sum_{k=1}^{j}\left(c_{2k,2l}\left|-,k\right\rangle\left\langle -,l\right| + c_{2k+1,2l+1}\left|+,k-1\right\rangle\left\langle +,l-1\right|\right) \\
&+ \sum_{l=1}^{j}\sum_{k=1}^{j}\left(c_{2l,2k+1}\left|-,l\right\rangle\left\langle +,k-1\right| + c_{2k+1,2l}\left|+,k-1\right\rangle\left\langle -,l\right|\right),
\end{aligned}
\qquad (۱۷)
$$

که $c_{k,l} = m_{k,l} + in_{k,l} = c_{l,k}^*$، $m_{k,l}$ و $n_{k,l}$ اعـدادی حقیقـی و $i=\sqrt{-1}$ هستند. البته بـرای آن کـه Y فـوق قابـل اسـتفاده در مجموعهٔ رابطهٔ (۹) باشد، بایستی $Tr_E(Y)=0$.

همچنین، همان‌طور که در مرجع [۱۰] نشان داده شده اسـت، شرط کاملاً مثبت شدن تحول کاهش یافتهٔ سـامانه (اتـم)، بـرای مجموعـهٔ نامـارکوفی $\boldsymbol{S}$ در رابطـهٔ (۹)، عبـارت اسـت از $Tr_E(Y')=Tr_E\left(U(t)YU^{\dagger}(t)\right)=0$، که $U(t)$ در روابـط (۱۵) و (۱۶) آمده اسـت. بنـابراین، در رابطـهٔ (۱۷)، بایسـتی خـود را محدود به Yهایی بکنیم که برای آنها داریم:

$$
\begin{aligned}
Tr_E(Y) &= \sum_{k=0}^{j}\left\langle k\right|Y\left|k\right\rangle = 0\,, \\
Tr_E(Y') &= \sum_{k=0}^{j}\left\langle k\right|Y'\left|k\right\rangle = 0\,.
\end{aligned}
\qquad (۱۸)
$$

در ادامه، به بررسی دو وضعیت $j=1$ و $j=2$ خواهیم پرداخت.

الف) وضعیت اول: $j=1$

با توجه به رابطهٔ (۱۷)، در ایـن وضـعیت، Y بـه شـکل زیـر خواهد بود:

$$
Y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}
c_{1,1} & m_{1,2}+in_{1,2} & m_{1,3}+in_{1,3} \\
m_{1,2}-in_{1,2} & c_{2,2} & m_{2,3}+in_{2,3} \\
m_{1,3}-in_{1,3} & m_{2,3}-in_{2,3} & c_{3,3}
\end{pmatrix},
\qquad (۱۹)
$$

ضریب $\frac{1}{2}$، در عبارت فوق، به جهت ساده‌تر شدن نوشتار رابطهٔ (۲۴)، که در ادامه خواهد آمد، وارد شده است.

عمگرتحول زمانی سـامانه- محـیط $U(t)$، در رابطـهٔ (۱۶)، برای این زیرفضا، برابر است با:

$$
U(t)=\begin{pmatrix}
e^{\frac{i\omega_0 t}{2}} & 0 & 0 \\
0 & e^{\frac{-i\omega_0 t}{2}}\cos(gt) & -ie^{\frac{-i\omega_0 t}{2}}\sin(gt) \\
0 & -ie^{\frac{-i\omega_0 t}{2}}\sin(gt) & e^{\frac{-i\omega_0 t}{2}}\cos(gt)
\end{pmatrix},
\qquad (۲۰)
$$

در نتیجه

$$
Y'=U(t)YU^{\dagger}(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}
c_{1,1}(t) & c_{1,2}(t) & c_{1,3}(t) \\
c_{2,1}(t) & c_{2,2}(t) & c_{2,3}(t) \\
c_{3,1}(t) & c_{3,2}(t) & c_{3,3}(t)
\end{pmatrix},
$$

که

$$
\begin{aligned}
c_{1,1}(t) &= c_{1,1}\,, \\
c_{2,2}(t) &= c_{2,2}\cos(gt)^2 + c_{3,3}\sin(gt)^2 - n_{2,3}\sin(2gt)\,, \\
c_{3,3}(t) &= c_{2,2}\cos(gt)^2 + c_{3,3}\sin(gt)^2 + n_{2,3}\sin(2gt)\,, \\
c_{1,2}(t) &= c_{2,1}^*(t) = e^{i\omega_0 t}\left(\cos(gt)\left(m_{1,2}+in_{1,2}\right) + i\sin(gt)\left(m_{1,3}+in_{1,3}\right)\right), \\
c_{1,3}(t) &= c_{3,1}^*(t) = e^{i\omega_0 t}\left(\cos(gt)\left(m_{1,3}+in_{1,3}\right) + i\sin(gt)\left(m_{1,2}+in_{1,2}\right)\right), \\
c_{2,3}(t) &= c_{3,2}^*(t) = m_{2,3} + in_{2,3}\cos(2gt) + \frac{i}{2}\left(c_{2,2}-c_{3,3}\right)\sin(2gt)\,,
\end{aligned}
\qquad (۲۲)
$$

برای برآورده شدن روابط (۱۸)، باید داشته باشیم:

$$
c_{1,1}=c_{2,2}=c_{3,3}=m_{1,2}=n_{1,2}=m_{1,3}=n_{1,3}=n_{2,3}=0
$$

یعنی

$$Y' = Y = \frac{1}{2} m_{2,3} \left(|-,1\rangle\langle +,0| + |+,0\rangle\langle -,1| \right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & m_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{2,3} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (۲۳)$$

اکنون، در رابطهٔ (۹)، اگر بخواهیم که حالت اولیهٔ سامانه (اتم) $\rho_S = Tr_E(\rho_{SE})$ دلخواه باشد، بایستی ρ_{SE} مارکوفی را به شکلی مشابه رابطهٔ (۳) انتخاب کنیم؛ یعنی $\rho_{SE} = \rho_S \otimes \tilde{\sigma}_E = \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|$. بنابراین

$$\begin{aligned} \rho_{SE} + Y &= \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| + Y \\ &= \frac{1}{2}\left(I_S + \sum_{i=1}^{3} a_i\sigma_i \right) \otimes |0\rangle\langle 0| + Y \\ &= \frac{1}{2}\Big((1-a_3)\, |-,0\rangle\langle -,0| + (1+a_3)\, |+,0\rangle\langle +,0| \\ &\quad + (a_1 + ia_2)\, |-,0\rangle\langle +,0| + (a_1 - ia_2)\, |+,0\rangle\langle -,0| \\ &\quad + m_{2,3}\left(|-,1\rangle\langle +,0| + |+,0\rangle\langle -,1| \right)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-a_3 & 0 & a_1 + ia_2 \\ 0 & 0 & m_{2,3} \\ a_1 - ia_2 & m_{2,3} & 1 + a_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \qquad (۲۴)$$

که a_iها اعدادی حقیقی و σ_iها عملگرهای پائولی هستند. در نوشتن عبارت فوق از این مطلب استفاده کرده ایم که هر حالت دلخواه اتم دوترازه را می‌توان به صورت $\rho_S = \frac{1}{2}\left(I_S + \sum a_i\sigma_i \right)$ بسط داد [۱].

در نهایت، برای آن که عملگر $A_{SE} = \rho_{SE} + Y$، در رابطهٔ (۲۴)، یک عملگر چگالی معتبر σ_{SE} باشد، لازم است تا ویژه مقادیرش مثبت باشند. با یافتن ویژه مقادیر، به این نتیجه می‌رسیم که تنها هنگامی که $m_{2,3} = 0$ باشد، یعنی فقط وقتی که $Y = 0$، عملگر A_{SE} یک عملگر چگالی است.

قبلا بیان کرده بودیم که اگر تحول کاهش یافته برای هر U دلخواه کاملاً مثبت باشد، آنگاه $Y = 0$ است [۱۷]. اکنون ملاحظه می‌کنیم که در مثال تحت بررسی ما، یعنی زیرفضای $j = 1$ مدل جینز-کامینگز با حالت اولیهٔ اتم ρ_S دلخواه، قید کاملاً مثبت شدن تحول کاهیدهٔ اتم، برای هر زمان t دلخواه، یعنی رابطهٔ (۱۸)، هم می‌تواند منجر به صفر شدن Y شود.

به بیان دیگر، در مثال تحت بررسی ما، نیازی به دلخواه بودن عملگر تحول زمانی اتم-فوتون U، و بالتبع دلخواه بودن هامیلتونی برهم کنش اتم و فوتون، برای صفر شدن Y نیست. بلکه، برای آن که Y، در مجموعهٔ $\boldsymbol{S}$ در رابطهٔ (۹)، صفر باشد، صرفا کاملاً مثبت بودن تحول کاهیدهٔ اتم، ناشی از تک هامیلتونی جینز-کامینگز در رابطهٔ (۱۰)، البته برای هر t دلخواه، کافی است.

ب) وضعیت دوم: $j = 2$

اکنون وضعیتی را در نظر می‌گیریم که در کاواک حداکثر دو فوتون وجود داشته باشد. بنابراین، بعد (زیر)فضای هیلبرت مجموعهٔ سامانه– محیط پنج خواهد بود. در نتیجه، نمایش ماتریسی عملگر هرمیتی Y، با استفاده از رابطهٔ (۱۷)، به شکل زیر خواهد بود:

$$Y = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} c_{1,1} & m_{1,2} + in_{1,2} & m_{1,3} + in_{1,3} & m_{1,4} + in_{1,4} & m_{1,5} + in_{1,5} \\ m_{1,2} - in_{1,2} & c_{2,2} & m_{2,3} + in_{2,3} & m_{2,4} + in_{2,4} & m_{2,5} + in_{2,5} \\ m_{1,3} - in_{1,3} & m_{2,3} - in_{2,3} & c_{3,3} & m_{3,4} + in_{3,4} & m_{3,5} + in_{3,5} \\ m_{1,4} - in_{1,4} & m_{2,4} - in_{2,4} & m_{3,4} - in_{3,4} & c_{4,4} & m_{4,5} + in_{4,5} \\ m_{1,5} - in_{1,5} & m_{2,5} - in_{2,5} & m_{3,5} - in_{3,5} & m_{4,5} - in_{4,5} & c_{5,5} \end{pmatrix}, \qquad (۲۵)$$

که ضریب $\frac{1}{4}$ به جهت ساده‌تر شدن نوشتار رابطهٔ (۲۸)، که در ادامه خواهد آمد، وارد شده است. همچنین، عمگرتحول زمانی سامانه– محیط $U(t)$ در رابطهٔ (۱۶)، برای این زیرفضا، برابر است با

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\omega_0 t}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{-i\omega_0 t}{2}} cos(gt) & -ie^{\frac{-i\omega_0 t}{2}} sin(gt) & 0 & 0 \\ 0 & -ie^{\frac{-i\omega_0 t}{2}} sin(gt) & e^{\frac{-i\omega_0 t}{2}} cos(gt) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{-3i\omega_0 t}{2}} cos(\sqrt{2}gt) & -ie^{\frac{-3i\omega_0 t}{2}} sin(\sqrt{2}gt) \\ 0 & 0 & 0 & -ie^{\frac{-3i\omega_0 t}{2}} sin(\sqrt{2}gt) & e^{\frac{-3i\omega_0 t}{2}} cos(\sqrt{2}gt) \end{pmatrix}, \qquad (۲۶)$$

اکنون، با استفاده از رابطهٔ $Y' = U(t)YU^{\dagger}(t)$، می‌توان عملگر Y' را یافت. از اعمال دو شرط رابطهٔ (۱۸)، مؤلفه‌های غیر صفر Y، در رابطهٔ (۲۵)، به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$Y = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & m_{1,4} + in_{1,4} & m_{1,5} + in_{1,5} \\ 0 & 0 & m_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & m_{2,3} & 0 & 0 & 0 \\ m_{1,4} - in_{1,4} & 0 & 0 & 0 & m_{4,5} \\ m_{1,5} - in_{1,5} & 0 & 0 & m_{4,5} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (۲۷)$$

حال ρ_{SE} مارکوفی، در رابطهٔ (۹)، را به شکل $\rho_{SE} = \rho_S \otimes \tilde{\sigma}_E = \rho_S \otimes \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \right)$ انتخاب می‌کنیم، که باز هم همچون مثال $j = 1$، حالت اولیهٔ اتم ρ_S را دلخواه فرض می‌کنیم. بنابراین، با استفاده از رابطهٔ (۲۷)، داریم:

$$
\begin{aligned}
A_{SE} &= \rho_{SE} + Y = \rho_S \otimes \tilde{\sigma}_E + Y \\
&= \frac{1}{4}\left(I_S + \sum_{i=1}^{3} a_i \sigma_i \right) \otimes \left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \right) + Y \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}
1-a_3 & 0 & a_1+ia_2 & m_{1,4}+in_{1,4} & m_{1,5}+in_{1,5} \\
0 & 1-a_3 & m_{2,3} & 0 & a_1+ia_2 \\
a_1-ia_2 & m_{2,3} & 1+a_3 & 0 & 0 \\
m_{1,4}-in_{1,4} & 0 & 0 & 0 & m_{4,5} \\
m_{1,5}-in_{1,5} & a_1-ia_2 & 0 & m_{4,5} & 1+a_3
\end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{28}
$$

در انتها، باید بررسی شود که به ازای چه مقادیری از $m_{2,3}$، $m_{4,5}$، $c_{1,4} = m_{1,4} + in_{1,4}$ و $c_{1,5} = m_{1,5} + in_{1,5}$ ویژه مقادیر عملگر خطی A_{SE}، در رابطهٔ فوق، اعدادی مثبت هستند. برای ساده‌تر شدن محاسبات فرض می‌کنیم که $c_{1,5}$ حقیقی باشد($n_{1,5} = 0$). با یافتن ویژه مقادیر A_{SE}، به این نتیجه می‌رسیم که با انتخاب شرایط زیر برای مؤلفه‌های Y، می‌توان مطمئن بود که عملگر خطی A_{SE} یک عملگر مثبت، و بالتبع یک عملگر چگالی معتبر σ_{SE} در مجموعهٔ (۹)، هستند:

$$
\begin{aligned}
& c_{1,4} = m_{4,5} = 0, \\
& \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 1}{\sqrt{1-a_3^2}} + 0.25 \le m_{2,3} \le \frac{1 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}{\sqrt{1-a_3^2}} - 0.2\,, \\
& \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 1}{\sqrt{1-a_3^2}} + 0.25 \le m_{1,5} \le \frac{1 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}{\sqrt{1-a_3^2}} - 0.2\,,
\end{aligned}
\tag{29}
$$

بنابراین، به طور خلاصه، برای این وضعیت $j = 2$ موفق شدیم مجموعه‌ای از Yهای ناصفر معتبر را بیابیم، که با اضافه کردن آنها به ρ_{SE}هایی مارکوفی به شکل $\rho_{SE} = \rho_S \otimes \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\right)$، در رابطهٔ (۹)، می‌توان یک مجموعهٔ $\boldsymbol{S}$ نامارکوفی را یافت، که تحول کاهش یافتهٔ آن، نظیر مجموعهٔ مارکوفی $\left\{\rho_{SE} = \rho_S \otimes \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\right)\right\}$، برای عملگر تحول زمانی $U(t)$ در رابطهٔ (۲۶)، کاملاً مثبت است.

۶. جمع بندی

در مرجع [۱۰] نشان داده شده است که، به شرط برقراری روابطی نظیر (۱۸)، تحول کاهش یافته برای مجموعهٔ نامارکوفی (۹)، کاملاً مثبت خواهد بود. این نتیجه مشابه و مرتبط با شرط خطی شدن تحول کاهش یافته است، که در مراجع [۱۹ و ۲۰] بررسی شده است. همچنین، اگر تحول کاهش یافتهٔ سامانه، برای هر U دلخواه، کاملاً مثبت باشد، آنگاه Y، در مجموعه رابطهٔ (۹)، صفر خواهد بود [۱۷].

ما، در مقالهٔ حاضر، این نتایج کلی را برای یک مثال فیزیکی، برهم کنش جینز-کامینگز برای اتم (به عنوان سامانه) و فوتون (به عنوان محیط)، آزمودیم. ما، در واقع، ساده‌ترین وضعیت‌های ممکن، یعنی $j = 1$ و $j = 2$، را در نظر گرفتیم. اما همین وضعیتهای ساده نتایج جالب توجهی در بر داشت.

در وضعیت $j = 1$، ملاحظه کردیم که برای صفر شدن Y، کاملاً مثبت بودن تحول کاهیدهٔ اتم برای هر U دلخواه نیست، بلکه صرفاً فرض کاملاً مثبت بودن تحول کاهیده، برای $U(t)$ ناشی از برهم کنش جینز- کامینگز، باعث صفر شدن Y می‌شود.

مطالعهٔ وضعیت $j = 2$ نیز نشان داد که تحول کاهیده کاملاً مثبت، برای مجموعه نامارکوفی (۹)، با ρ_{SE}هایی به شکل $\rho_{SE} = \rho_S \otimes \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\right)$ و Yهایی که شرایط (۲۹) را ارضا می‌کنند، تحت برهم کنش جینز-کامینگز، رخ می‌دهد.

مراجع

1. M A Nielsen and I L Chuang, “*Quantum Computation and Quantum Information*” Cambridge University Press, Cambridge (2000).
2. D A Lidar, *arXiv:1902.00967* (2019).
3. A Rivas and S F Huelga, "*Open Quantum Systems: An Introduction",* Springer, Heidelberg (2011).
4. C A Rodríguez-Rosario, *et al*., *J. Phys.* A **41** (2008) 205301.
5. A Shabani and D A Lidar, *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 100402; **116** (2016) 049901(E).
6. L Liu and D M Tong, *Phys. Rev*. A **90** (2014) 012305.
7. A Brodutch, *et al*., *Phys. Rev*. A **87** (2013) 042301.
8. F Buscemi, *Phys. Rev. Lett.* **113** (2014) 140502.
9. X M Lu, *Phys. Rev. A* **93** (2016) 042332.

10. I Sargolzahi and S Y Mirafzali, *Open Syst. Info. Dyn.* **25** (2018) 1850012.
11. I Sargolzahi and S Y Mirafzali, *Phys. Rev*. A **100** (2019) 042121.
12. D Salgado and J L Sanchez-Gomez, arXiv:quant-ph/0211164 (2002).
13. P Lambropoulos and D Petrosyan, "*Fundamentals of Quantum optics and Quantum Information*"و Springer, Berlin (2007).
14. P Hayden, *et al*., *Commun. Math. Phys*. **246** (2004) 359.
15. I Sargolzahi, *J. Phys.* A: *Math. Theor*. **51** (2018) 315301.
16. P Pechukas, *Phys. Rev. Lett*. **73** (1994) 1060.
17. J M Dominy, *et al*., *Quant. Inf. Process*. **15** (2016) 465**.**
18. I Sargolzahi, *Iran. J. Phys. Res*. **21,** 3 (2021) 451(in Persian).
19. I Sargolzahi, *Phys. Rev.* A **102** (2020) 022208.
20. I Sargolzahi, *Iran. J. Phys. Res*. **20**, 2 (2020) 267(in Persian).